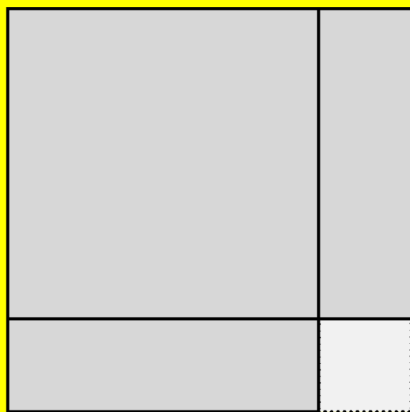


Quadratische Gleichungen

Anschaulich und algebraisch

Alexander Roux

2., überarbeitete Auflage



Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Anschaulich und algebraisch

Alexander Roux

2. Auflage

Impressum

Copyright: © 2023 Alexander Roux

Alle Rechte vorbehalten

www.a-roux.de

ISBN 9798856737010

Selbstverlag, Alexander Roux

c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb: Kindle Direct Publishing

Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,

L-1855 Luxemburg

Vorwort

Das Hauptziel dieses kleinen Textes ist es, den Leser mit dem Lösen von quadratischen Gleichungen vertraut zu machen.

Der Leser benötigt nur wenige Vorkenntnisse. Für das Verständnis des anschaulichen Lösungsweges reichen die Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken und Quadraten und das Verständnis von einfachen Gleichungen. Bei dem Lösungsweg in algebraischen Formulierung werden ferner die erste und zweite binomische Formel benutzt.

Bei der der Lektüre des Textes wird sich der Leser auf eine Zeitreise begeben, die etwa 2000 v. Chr. in Mesopotamien anschaulich beginnt und im 16. Jahrhundert mit der abstrakten p - q -Formel von François Viète endet.

Beim Lösen quadratischer Gleichungen müssen Wurzeln berechnet werden. Wir betrachten das Verfahren von Heron zur Wurzelberechnung. Da auch Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten können, wird im Anhang kurz auf die komplexen Zahlen eingegangen.

Es gibt eine ständig steigende Tendenz in den Schulen des Westens, die Grundideen in der Mathematik durch eine Vielzahl von vermeintlich praktischen oder alltäglichen Beispielen zu verdunkeln.

Der vorliegende Text möchte einen Beitrag dazu leisten, die wesentlichen Gedanken wieder deutlich erkennbar zu machen.

Brühl, Februar 2016, Dr. A. Roux

Zur zweiten Auflage

Die vorliegende zweite Auflage enthält Korrekturen, einige zusätzliche Erläuterungen und einen neuen Anhang mit Eulers vereinfachender Variante der p - q -Formel.

Brühl, August 2023, Dr. A. Roux

Nachtrag vom 18.05.2025

Dank der Hinweise von Herrn Gunnar Heiden konnten zahlreiche Druckfehler korrigiert werden.

Inhalt

Vorwort	5
Inhalt	7
1. Einführung	9
2. Anschaulicher Lösungsweg	10
2.1 Quadrate und Rechtecke	10
2.2 Anschauliches Lösen quadratischer Gleichungen	12
Aufgaben	15
3. Algebraischer Lösungsweg	16
3.1 Quadratische Ergänzung	16
3.2 Sonderfälle	21
Aufgaben	23
4. Die p - q -Formel	25
4.1 Einführung und Herleitung der p - q -Formel	25
4.2 Beispiele	27
4.3 Der Satz von Vieta	33
Aufgaben	36
5. Lösung durch Substitution	37
Aufgaben	41
6. Bruch- und Wurzelgleichungen	42
6.1 Bruchgleichungen	42
6.2 Wurzelgleichungen	44
Aufgaben	49
7. Wurzelberechnung	50
7.1 Erläuterungen zum Heronverfahren	50
7.2 Praktische Durchführung des Heronverfahrens	52
Aufgaben	55
Lösungen	56
Anhang 1: Zusammenfassung	59
Anhang 2: Komplexe Zahlen	64
Anhang 3: Eulers Variante der p - q -Formel	68

1. Einführung

Auf einer etwa 4000 Jahre alten babylonischen Tontafel befindet sich folgende geometrische Aufgabe:

Ein Rechteck hat eine Fläche von 60 und es ist um 7 länger als breit. Wie breit ist es?

In heutiger Schreibweise entspricht diese Aufgabe der Gleichung $x^2 + 7x = 60$. Die Babylonier kannten keine Gleichungen, keinen Buchstaben wie x für eine Unbekannte, keine Rechenzeichen und kein Gleichheitszeichen.

Die Aufgabe wird auf der Tontafel vorgerechnet. Es spricht einiges dafür, dass dabei anschauliche Vorstellungen zugrunde lagen.

In seinem Buch *Elemente* hat Euklid (ca. 325 – 265 v. Chr.) solche Aufgaben anschaulich mithilfe von geometrischen Zeichnungen gelöst.

Der Inder Brahmagupta (ca. 598 – ca. 668) hat die negativen Zahlen erfunden und sie als Lösungen quadratischer Gleichungen einbezogen. Er bezeichnete Unbekannte bereits mit Buchstaben: die erste Unbekannte mit *ya* (die ersten zwei Buchstaben von *yavat-tavat*), die zweite Unbekannte mit *ca* (Anfangsbuchstaben von *calaca* = schwarz), die dritte mit *ni* (*nilaca* = blau), die vierte mit *pi* (*pitaca* = gelb), die fünfte mit *pa* (*pandu* = weiß), die sechste mit *lo* (*lohita* = rot).

Nach der Einführung der Buchstaben auch für bekannte Größen durch François Viète (1540 – 1603) konnten auch allgemeine quadratische Gleichungen ins Auge gefasst werden. Aus der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat Viète die uns heute geläufige *p-q-Formel* gewonnen.

Der geschilderten historischen Entwicklung werden wir hier im Wesentlichen folgen.

2. Anschaulicher Lösungsweg

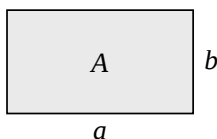
2.1 Quadrate und Rechtecke

Rechtecke sind Vierecke mit vier rechten Winkeln. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist:

$$\text{Fläche} = \text{Länge mal Breite.}$$

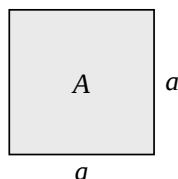
Wenn A der Flächeninhalt des Rechtecks ist, a die Länge und b die Breite, so ist also:

$$A = a \cdot b.$$



Quadrate sind die besonderen Rechtecke, bei denen alle vier Seiten gleich lang sind. Der Flächeninhalt A eines Quadrates mit der Seitenlänge a ist:

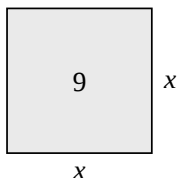
$$A = a^2.$$



Hierbei ist a^2 nur eine Abkürzung für $a \cdot a$ und wird als *a Quadrat* gelesen, eine schöne geometrische Sprechweise.

Bei der Berechnung von Seitenlängen eines rechtwinkligen Drei-

ecks mithilfe des Satzes des Pythagoras muss man umgekehrt aus dem Flächeninhalt eines Quadrates seine Seitenlänge berechnen, zum Beispiel:



Die Flächenformel wird hier zu einer einfachen *quadratischen Gleichung*, nämlich

$$x^2 = 9.$$

Gesucht ist also eine Zahl x , die mit sich selbst multipliziert genau 9 ergibt. Hier muss offenbar $x = 3$ sein. Man nennt 3 die **Quadratwurzel** (oder kurz **Wurzel**) aus 9 und schreibt:

$$\sqrt{9} = 3.$$

Das Wurzelzeichen ist historisch etwa folgendermaßen entstanden. Früher war Latein die Sprache der Wissenschaft in Europa, statt von der *Wurzel* aus 9 sprach man von der *radix* aus 9 und schrieb dann zur Abkürzung nur den Anfangsbuchstaben r , aus dem durch Stilisierung $\sqrt{}$ wurde. Schließlich kam zur Vermeidung von Klammern noch der Überstrich hinzu: $\sqrt{}$.

Fassen wir zusammen:

1. Selbst einfache quadratische Gleichungen wie

$$x^2 = 9$$

sind anschaulich mit *Quadraten* verbunden.

2. Das Lösen selbst solch einfacher quadratischen Gleichungen erfordert das (prinzipiell nicht ganz einfache) Wurzelziehen:

$$x = \sqrt{9} = 3.$$

In Kapitel 7 wird die Berechnung von Wurzeln mit dem Verfahren von Heron (1. Jahrhundert n. Chr.) erläutert.

2.2 Anschauliches Lösen quadratischer Gleichungen

Wir lösen nun auch kompliziertere quadratische Gleichungen wie:

$$x^2 + 6x = 16.$$

Wir deuten diese Gleichung geometrisch, d. h. wir übersetzen sie von der Formelsprache in die Bildersprache. Oben haben wir bereits x^2 als *Fläche* eines *Quadrates* mit der Seitenlänge x interpretiert. Dann sollte $6x$ auch als *Fläche* betrachtet werden, und zwar als Fläche eines *Rechtecks* mit den Seitenlängen 6 und x . Nun halbieren wir das Rechteck und kleben die Hälften an das Quadrat. Das Ergebnis ist ein größeres Quadrat mit einer Lücke (ein kleines Quadrat). Nach dem Auffüllen der Lücke liegt ein vollständiges Quadrat mit bekannter Fläche vor. Daraus ergibt sich seine Seitenlänge und aus ihr wiederum x .

Die grob umrissenen Schritte sehen im Einzelnen wie folgt aus:

Schritt 1

Übersetze die Gleichung

$$x^2 + 6x = 16$$

in die Bildersprache. Deute x^2 geometrisch als Quadratfläche, und $6x$ als Rechtecksfläche:

$$\begin{array}{c} x \\ \hline \square \\ \hline x \end{array} + \begin{array}{c} 6 \\ \hline \square \\ \hline x \end{array} = 16$$

Schritt 2

Halbiere das Rechteck:

$$\begin{array}{c} x \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline x \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \square \quad \square \\ \hline \end{array} \\ \hline x \end{array} = 16$$

Schritt 3

Klebe die kleinen Rechtecke an das Quadrat:

$$\begin{array}{c} x \quad 3 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \hline x \\ \hline 3 \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = 16$$

Lücke: $3 \cdot 3 = 9$

Die Lücke ist ein Quadrat und hat den Flächeninhalt 9.

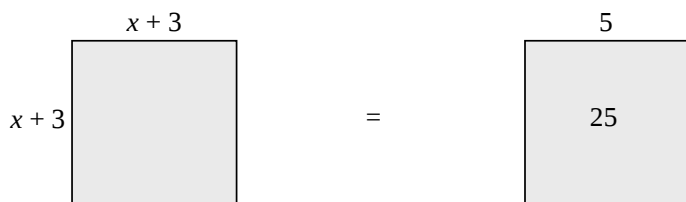
Schritt 4

Addiere 9 auf beiden Seiten der Gleichung, um die Lücke des Quadrates zu schließen:

$$\begin{array}{c} x + 3 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline x + 3 \end{array} = 25$$

Schritt 5

Deute die 25 auf der rechten Seite ebenfalls als Quadratfläche.
Die Seitenlänge des Quadrates beträgt $\sqrt{25} = 5$:



Schritt 6

Da die beiden Quadrate die gleiche Fläche haben, müssen auch die Seitenlängen übereinstimmen:

$$x + 3 = 5.$$

Subtrahiert man nun 3 auf beiden Seiten, so bekommt man die Lösung:

$$x = 2.$$

Aufgaben

1. Finde auf anschaulichem Wege jeweils eine Lösung der quadratischen Gleichung:

a) $x^2 + 2x = 3$

b) $x^2 + 4x = 12$

c) $x^2 + 6x = 7$

d) $x^2 + 8x = 9$

e) $x^2 + 8x = 65$

f) $x^2 + 4x = 21$

g) $x^2 + 3x = 10$

h) $x^2 + x = 12$

i) $x^2 + 5x = 66$

j) $x^2 + 12x = 64$

2. Finde auf anschaulichem Wege jeweils eine Lösung der quadratischen Gleichung:

a) $x^2 + 10x = 24$

b) $x^2 + 9x = 36$

3. Ein Rechteck ist 6 cm länger als breit und hat eine Fläche von 16 cm^2 . Wie breit ist das Rechteck?

3. Algebraischer Lösungsweg

3.1 Quadratische Ergänzung

Wir übersetzen nun den anschaulichen Lösungsweg in die Formelsprache. Nur an einer Stelle wird es schwierig: Während man nach dem Auffüllen der Lücke anschaulich sofort ein Quadrat bekommt, muss man in der Formelsprache eine binomische Formel anwenden. Dieses Auffüllen der quadratischen Lücke bezeichnet man als *quadratische Ergänzung*.

Wir werden nun wieder die Gleichung

$$x^2 + 6x = 16$$

lösen.

Schritt 1

Halbiere das Rechteck $6x$, berechne dazu $6:2=3$ (die halbe Vorzahl von x). Man erhält zwei kleine Rechtecke:

$$x^2 + 2 \cdot 3x = 16$$

Schritt 2

Addiere die *quadratische Ergänzung* 3^2 auf beiden Seiten. (Die Lücke wird gefüllt.)

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 16 + 3^2$$

Schritt 3

Auf der linken Seite können wir die erste binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

anwenden. Die rechte Seite ergibt 25.

$$(x+3)^2 = 25$$

Schritt 4

Wir müssen nun den Wert der Klammer $(x + 3)$ finden. Mit sich selbst multipliziert ergibt die Klammer 25. Somit ist $(x + 3)$ die Wurzel aus 25, also 5. Wenn wir negative Zahlen einbeziehen, dann müssen wir auch noch -5 als Wert der Klammer zulassen. Denn -5 mit sich selbst multipliziert ergibt ebenfalls 25:

$$(-5) \cdot (-5) = 25.$$

Mit diesen Überlegungen im Hinterkopf sagen wir in abgekürzter Sprechweise, dass wir bei der Gleichung

$$(x + 3)^2 = 25$$

die *Wurzel ziehen* und schreiben:

$$x + 3 = \pm 5.$$

Schritt 5

Unterscheide nun die Fälle $+5$ und -5 . Man erhält zwei Werte für x . Man bezeichnet sie als x_1 und x_2 .

Fall $+5$:

$$\begin{aligned} x_1 + 3 &= 5 & | -3 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Fall -5 :

$$\begin{aligned} x_2 + 3 &= -5 & | -3 \\ x_2 &= -8 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -8 \end{aligned}$$

Wir werden nun noch fünf weitere Beispiele quadratischer Gleichungen betrachten. An ihnen kann man einige Besonderheiten kennen lernen:

- Anwendung der *zweiten* binomischen Formel.
- Vorzahl bei x^2
- keine Vorzahl bei x
- quadratische Gleichungen mit *keiner* Lösung
- quadratische Gleichungen mit nur *einer* Lösung

Beispiel 1 (zweite binomische Formel)

$$x^2 - 8x = -15$$

Lösung

$$x^2 - 8x = -15 \quad | 8 : 2 = 4$$

$$x^2 - 2 \cdot 4x = -15 \quad | + 4^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 = -15 + 4^2 \quad | 2. \text{ binomische Formel}$$

$$(x - 4)^2 = 1 \quad | \text{ Wurzel ziehen}$$

$$x - 4 = \pm 1 \quad | + 4$$

$$x = \pm 1 + 4 \quad | \text{ Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = +1 + 4 = 5$$

$$x_2 = -1 + 4 = 3$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 3$$

Beispiel 2 (x^2 mit Vorzahl)

$$5x^2 + 10x - 15 = 0$$

Lösung

$$5x^2 + 10x - 15 = 0 \quad | +15 \text{ (Unbekannte links)}$$

$$\begin{array}{ll}
 5x^2 + 10x = 15 & | :5 \text{ (Vorzahl von } x^2) \\
 x^2 + 2x = 3 & | 2 : 2 = 1 \\
 x^2 + 2 \cdot 1x = 3 & | +1^2 \text{ (quadratische Ergänzung)} \\
 x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2 = 3 + 1^2 & | 1. \text{ binomische Formel} \\
 (x+1)^2 = 4 & | \text{ Wurzel ziehen} \\
 x+1 = \pm 2 & | -1 \\
 x = \pm 2 - 1 & | \text{ Fallunterscheidung} \\
 x_1 = +2 - 1 = 1 & \\
 x_2 = -2 - 1 = -3 &
 \end{array}$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 1 \\
 x_2 = -3
 \end{array}$$

Beispiel 3 (x ohne sichtbare Vorzahl)

$$x^2 + x = 12$$

Lösung

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + x = 12 & | \text{schreibe } x \text{ als } 1x \\
 x^2 + 1x = 12 & | 1 : 2 = 0,5 \\
 x^2 + 2 \cdot 0,5x = 12 & | +0,5^2 \text{ (quadr. Ergänzung)} \\
 x^2 + 2 \cdot 0,5x + 0,5^2 = 12 + 0,5^2 & | 1. \text{ binomische Formel} \\
 (x+0,5)^2 = 12,25 & | \text{ Wurzel ziehen} \\
 x+0,5 = \pm 3,5 & | -0,5 \\
 x = \pm 3,5 - 0,5 & | \text{ Fallunterscheidung} \\
 x_1 = +3,5 - 0,5 = 3 &
 \end{array}$$

$$x_2 = -3,5 - 0,5 = -4$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -4$$

Beispiel 4 (Gleichung ohne Lösung)

$$x^2 + 6x = -18$$

Lösung

$$x^2 + 6x = -18 \quad | 6 : 2 = 3$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x = -18 \quad | + 3^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = -18 + 3^2 \quad | 1. \text{ binomische Formel}$$

$$(x+3)^2 = -9$$

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliziert, kommt stets eine positive Zahl oder Null heraus. Daher kann $(x+3)^2$ niemals eine negative Zahl wie -9 sein.

Die Gleichung hat also **keine** Lösung.

Beispiel 5 (nur eine Lösung)

$$x^2 + 6x = -9$$

Lösung

$$x^2 + 6x = -9 \quad | 6 : 2 = 3$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x = -9 \quad | + 3^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = -9 + 3^2 \quad | 1. \text{ binomische Formel}$$

$$(x+3)^2 = 0 \quad | \text{ Wurzel ziehen } (-0 = 0)$$

$$x+3 = 0 \quad | -3$$

$$x = -3$$

Die Gleichung hat also nur **eine** Lösung: $x = -3$.

3.2 Sonderfälle

Wir betrachten zwei Typen von quadratischen Gleichungen, die **ohne** quadratische Ergänzung gelöst werden können:

- **Rein** quadratische Gleichungen, bei denen die Unbekannte **nur** als Quadrat vorkommt.
- Quadratische Gleichungen, bei denen der **konstante** Term fehlt (**Null** ist).

Beispiel 1

$$3x^2 = 12$$

Lösung

$$\begin{array}{ll} 3x^2 = 12 & | :3 \text{ (Vorzahl von } x^2 \text{)} \\ x^2 = 4 & | \text{ Wurzel ziehen} \\ x = \pm 2 & \end{array}$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}$$

Beispiel 2

$$x^2 + 6x = 0$$

Lösung

$$\begin{array}{ll} x^2 + 6x = 0 & | x \text{ ausklammern} \\ x(x+6) = 0 & \end{array}$$

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Wir haben also zwei Fälle zu betrachten:

Erster Faktor ist Null:

$$x = 0$$

Zweiter Faktor ist Null:

$$x + 6 = 0 \quad | -6$$

$$x = -6$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -6$$

Aufgaben

1. Finde jeweils alle Lösungen der quadratischen Gleichung:

- a) $x^2 = 4$
- b) $x^2 = 49$
- c) $x^2 = 0$
- d) $x^2 = 50$
- e) $x^2 = 2$
- f) $x^2 = -2$
- g) $x^2 = 3$
- h) $x^2 = 10$
- i) $x^2 = 10.000$

2. Finde mit Hilfe der quadratischen Ergänzung alle Lösungen der jeweiligen quadratischen Gleichung:

- a) $x^2 + 2x = 3$
- b) $x^2 + 4x = 12$
- c) $x^2 + 6x = 7$
- d) $x^2 + 8x = 9$
- e) $x^2 + 3x = 10$
- f) $x^2 + x = 12$
- g) $x^2 + 5x = 66$

3. Finde mit Hilfe der quadratischen Ergänzung alle Lösungen der jeweiligen quadratischen Gleichung:

- a) $x^2 - 6x + 8 = 0$
- b) $2x^2 - 8x + 6 = 0$
- c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$
- d) $x^2 + x - 2 = 0$
- e) $x^2 - 7x + 12 = 0$
- f) $x^2 - 7x + 10 = 0$
- g) $x^2 + 2x - 3 = 0$

h) $x^2 - 4x - 12 = 0$

4. Löse die Gleichung: $2x^2 + x - 4 = -x^2 + 4x + 2$.

(Tipp: Umformen ergibt eine Gleichung wie in Aufgabe 3.)

5. Löse die Gleichung: $-4x^2 - 6x + 3 = -5 - 2x$.

6. Ein Rechteck ist 4 cm länger als breit und hat einen Flächeninhalt von 45 cm^2 . Wie breit ist das Rechteck?

4. Die p - q -Formel

4.1 Einführung und Herleitung der p - q -Formel

Jede konkret gegebene quadratische Gleichung ist mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösbar. Ersetzt man die *konkreten Zahlen* der quadratischen Gleichungen wie

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

durch *Buchstaben*, so erhält man eine *allgemeine* quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0.$$

(Im Beispiel ist also $p = 6$ und $q = -16$.)

Nun werden wir diese allgemeine quadratische Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösen. Als Ergebnis werden wir natürlich keine konkreten Zahlen bekommen, sondern einen *allgemeinen Rechenausdruck*. Dieser bildet eine Formel, nämlich die p - q -Formel.

Der erste Mensch, der Buchstaben in diesem Sinne (zur Erfassung einer *allgemeinen* Situation) benutzt hat, war François Viète (1540 – 1603). Die Wahl der Buchstaben p für die Vorzahl von x und q für den konstanten Summanden geht auf ihn zurück, ebenso die p - q -Formel in ihrer heutigen Gestalt als *Formel*.

Wir werden nun also die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

lösen:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$| -q \text{ (Unbekannte links)}$$

$$x^2 + px = -q \quad | \text{ setze } p = 2 \cdot \frac{p}{2}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x = -q \quad | + \left(\frac{p}{2} \right)^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2} \right)^2 = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q \quad | 1. \text{ binomische Formel}$$

$$\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q \quad | \text{ Wurzelziehen}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q} \quad | -\frac{p}{2}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q}$$

Um anzudeuten, dass es im Allgemeinen zwei Lösungen gibt, schreibt meist nicht x , sondern $x_{1/2}$ (was für x_1 bzw. x_2 steht):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q}$$

Wir fassen zusammen:

Die p-q-Formel
Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösung(en) $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q}$

Die p - q -Formel bezieht sich auf eine quadratische Gleichung, die in standardisierter (normierter) Form vorliegt:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Sie muss folgende zwei Bedingungen erfüllen:

- Auf der einen Seite der Gleichung steht **Null**.
- x^2 hat **keine** Vorzahl.

Der Lösungsausdruck der p - q -Formel

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

beginnt mit der negativen halben Vorzahl von x , dann folgt + oder – die Wurzel aus dem Quadrat der Zahl, die man gerade geschrieben hat, minus die Konstante (die Zahl, die kein x enthält). *Diesen* gerade beschriebenen *Inhalt* der Lösungsformel muss man sich einprägen, wie Euler hervorhebt. Bei der Lektüre der nachstehenden Beispiele kann sich der Leser die p - q -Formel zu Gemüte führen und ihren Inhalt verinnerlichen.

4.2 Beispiele

Wir werden nun sieben Beispiele von quadratischen Gleichungen betrachten. An ihnen kann man die praktische Anwendung der p - q -Formel und einige Besonderheiten kennenlernen:

- Negative Zahlen für p und q .
- Vorzahl bei x^2 und keine Seite ist Null.
- Keine Vorzahl bei x .
- Quadratische Gleichungen mit *keiner* Lösung.
- Quadratische Gleichungen mit nur *einer* Lösung.

Beispiel 1 (p und q positiv)

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Lösung

Die p - q -Formel ist direkt anwendbar ($p = 6$, $q = 5$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = 6 \text{ und } q = 5 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{4} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm 2 \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = -3 + 2 = -1$$

$$x_2 = -3 - 2 = -5$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -5$$

Beispiel 2 (q negativ)

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

Lösung

Die p - q -Formel ist direkt anwendbar ($p = 6$, $q = -16$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = 6 \text{ und } q = -16 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-16)} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{3^2 + 16} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{25} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm 5 \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = -3 + 5 = 2$$

$$x_2 = -3 - 5 = -8$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -8$$

Beispiel 3 (p negativ)

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Lösung

Die p - q -Formel ist direkt anwendbar ($p = -8$, $q = 15$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = -8 \text{ und } q = 15 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 15} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{1} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm 1 \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = 4 + 1 = 5$$

$$x_2 = 4 - 1 = 3$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 3$$

Beispiel 4 (x^2 hat Vorzahl, keine Seite ist Null)

$$5x^2 + 10x = 15$$

Lösung

Die p-q-Formel ist **nicht** direkt anwendbar, da x^2 eine Vorzahl hat und auf keiner der Seiten der Gleichung Null steht. Daher muss die Gleichung zunächst umgeformt werden:

$$5x^2 + 10x = 15 \quad | -15$$

$$5x^2 + 10x - 15 = 0 \quad | :5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Nun ist die p-q-Formel anwendbar ($p = 2$, $q = -3$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = 2 \text{ und } q = -3 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{4} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm 2 \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = -1 + 2 = 1$$

$$x_2 = -1 - 2 = -3$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

Beispiel 5 (x ohne Vorzahl)

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Lösung

Bei der Gleichung hat x keine sichtbare Vorzahl, aber man kann x als $1x$ auffassen:

$$x^2 + 1x - 6 = 0$$

Die p - q -Formel ist dann anwendbar ($p=1$, $q=-6$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p=1 \text{ und } q=-6 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

Beispiel 6 (Gleichung ohne Lösung)

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Lösung

Die p-q-Formel ist direkt anwendbar ($p = 4$, $q = 5$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = 4 \text{ und } q = 5 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 5} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1}$$

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliziert, kommt stets eine positive Zahl oder Null heraus. Man kann (im Rahmen der reellen Zahlen) nicht die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen. Daher existiert $\sqrt{-1}$ nicht.

Die Gleichung hat also **keine** (reelle) Lösung.

Beispiel 7 (nur eine Lösung)

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Lösung

Die p-q-Formel ist direkt anwendbar ($p = 6$, $q = 9$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = 6 \text{ und } q = 9 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{3^2 - 9} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{0} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm 0 \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -3$$

Die Gleichung hat also nur **eine** Lösung: $x = -3$.

4.3 Der Satz von Vieta

Aus der p - q -Formel kann man zwei interessante Aussagen über Summe und das Produkt der beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung folgern. Sie sind als *Satz von Vieta* bekannt. Hierbei ist *Vieta* die latinisierte Form des Namens *Viète*.

Sind x_1 und x_2 die zwei Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

so besagt der **Satz von Vieta**, dass

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

gilt.

Beweis

Es gibt verschiedene Beweise des Satzes von Vieta. Wir betrachten den kürzesten. Er benutzt die p - q -Formel.

1. Summe der Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beim Addieren der beiden Lösungen heben sich die Wurzeln auf:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} \\ &= -p \end{aligned}$$

2. Produkt der Lösungen

Beim Multiplizieren der beiden Lösungen kann man die dritte binomische Formel, $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$, benutzen:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\ &= q \end{aligned}$$

Damit ist der Satz des Vieta bewiesen.

Beispiel

Wir betrachten wieder die Gleichung aus Beispiel 2 in 4.2:

$$x^2 + 6x - 16 = 0.$$

Sie hat die Lösungen:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -8$$

Die Summe der Lösungen ist:

$$x_1 + x_2 = 2 + (-8) = -6 = -p.$$

Das Produkt der Lösungen ist:

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-8) = -16 = q.$$

Anmerkungen

1. Der Satz von Vieta kann als *Probe* für die Lösungen einer quadratischen Gleichung benutzt werden.

2. Der Satz von Vieta kann auch benutzt werden, um *ganzzahlige* Lösungen (wenn es welche gibt) zu finden. Beispiel: Die möglichen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

können nur

$$x_1 = 1, x_2 = -3 \text{ oder } x_1 = -1, x_2 = 3$$

sein. Denn nur sie haben als Produkt $q = -3$.

Da die Summe der Lösungen $-p = -2$ sein muss, bleiben nur die Lösungen

$$x_1 = 1, x_2 = -3.$$

Aufgaben

1. Finde mit Hilfe der p-q-Formel alle Lösungen der jeweiligen quadratischen Gleichung:

- a) $x^2 - 6x + 8 = 0$
- b) $2x^2 - 8x + 6 = 0$
- c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$
- d) $x^2 + x - 2 = 0$
- e) $x^2 - 7x + 12 = 0$
- f) $x^2 - 7x + 10 = 0$
- g) $x^2 + 2x - 3 = 0$
- h) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2. Finde mit Hilfe der p-q-Formel alle Lösungen der jeweiligen quadratischen Gleichung:

- a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
- b) $x^2 - x = 6$
- c) $x^2 + 2 = 2x$
- d) $4x^2 - 16x = -15$
- e) $3x^2 + 2x = 1$
- f) $5x^2 + 15x + 5 = 0$

3. Löse die Gleichung: $2x^2 + x - 4 = -x^2 + 4x + 2$.

4. Löse die Gleichung: $-4x^2 - 6x + 3 = -5 - 2x$.

5. Ein Rechteck ist 5 cm länger als breit und hat einen Flächeninhalt von 104 cm². Wie breit ist das Rechteck?

5. Lösung durch Substitution

Ein in der Mathematik weit verbreiteter Kunstgriff ist die so genannte **Substitution** (Ersetzung) von Unbekannten oder Variablen. Sie dient der Vereinfachung.

Wir betrachten beispielsweise die quadratische Gleichung

$$x^2 + 6x = 16.$$

Wir wählen zunächst die Substitution

$$x = z + 1,$$

wobei z die neue Unbekannte ist. Wir setzen diese Substitution in die quadratische Gleichung ein:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 6x = 16 & | \ x = z + 1 \text{ einsetzen} \\ (z + 1)^2 + 6(z + 1) = 16 & | \text{ Klammern auflösen} \\ z^2 + 2z + 1 + 6z + 6 = 16 & | \text{ zusammenfassen} \quad . \\ z^2 + 8z + 7 = 16 & | -7 \\ z^2 + 8z = 9 \end{array}$$

Analog erhalten wir aus der Substitution

$$x = z + 3$$

die quadratische Gleichung:

$$z^2 + 12z = -11.$$

Wir betrachten nun eine allgemeine Substitution der Gestalt

$$x = z + a.$$

Wir werden später a so wählen, dass die resultierende quadratische Gleichung keinen z -Term außer z^2 enthält. Dann kann die Gleichung durch bloßes Wurzelziehen gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 6x &= 16 & | \ x = z + a \text{ einsetzen} \\
 (z + a)^2 + 6(z + a) &= 16 & | \text{ Klammern auflösen} \\
 z^2 + 2az + a^2 + 6z + 6a &= 16 & | \text{ zusammenfassen} \\
 z^2 + (2a + 6)z + a^2 + 6a &= 16 & | \ -(a^2 + 6a) \\
 z^2 + (2a + 6)z &= 16 - a^2 - 6a
 \end{aligned}$$

Damit der z -Term verschwindet, muss der Koeffizient (Vorzahl) Null sein:

$$\begin{aligned}
 2a + 6 &= 0 & | -6 \\
 2a &= -6 & | :2 \\
 a &= -3
 \end{aligned}$$

Die konkrete Substitution lautet also:

$$x = z - 3$$

Wir setzen nun $a = -3$ ein in die quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
 z^2 + (2a + 6)z &= 16 - a^2 - 6a \\
 z^2 + 0 &= 16 - (-3)^2 - 6 \cdot (-3) \\
 z^2 &= 16 - 9 + 18 \\
 z^2 &= 25 \\
 z_{1/2} &= \pm 5
 \end{aligned}$$

Daraus können wir nun die Lösungen der ursprünglichen quadratischen Gleichung ermitteln:

$$x = z - 3 \quad | \ z_1 = 5 \text{ einsetzen}$$

$$x_1 = 5 - 3 = 2$$

$$x = z - 3 \quad | \ z_2 = -5 \text{ einsetzen}$$

$$x_2 = -5 - 3 = -8$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -8$.

Wir werden abschließend noch ein weiteres Beispiel mit kürzer gefasstem Lösungsweg betrachten.

Beispiel

$$x^2 + 2x = 3$$

Lösung

1. Substituiere $x = z + a$:

$$x^2 + 2x = 3$$

$$(z + a)^2 + 2(z + a) = 3$$

$$z^2 + 2az + a^2 + 2z + 2a = 3$$

$$z^2 + (2a + 2)z + a^2 + 2a = 3$$

$$z^2 + (2a + 2)z = 3 - a^2 - 2a$$

Aus $2a + 2 = 0$ folgt $a = -1$. Die Substitution ist $x = z - 1$.

2. Setze $a = -1$ in die quadratische Gleichung ein:

$$z^2 + (2a + 2)z = 3 - a^2 - 2a$$

$$z^2 = 3 - 1 + 2$$

$$z^2 = 4$$

$$z_{1/2} = \pm 2$$

3. Setze $z_{1/2} = \pm 2$ ein in $x = z - 1$:

$$x_1 = z_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = z_2 - 1 = -2 - 1 = -3$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$.

Anmerkungen

Die Substitutionsmethode ist in der Ausführung etwas langwieriger als die anderen besprochenen Lösungswege. Sie weist aber folgende Vorzüge auf:

1. Die Substitution wird oft in der Mathematik benutzt.
2. Sie erfordert keine besondere zusätzliche Idee bei der Anwendung auf quadratische Gleichungen.
3. Kubische Gleichungen (Gleichungen mit x^3) werden durch eine entsprechende Substitution vereinfacht (zu reduzierten kubischen Gleichungen) und dann formelmäßig lösbar.

Aufgaben

1. Benutze die Substitutionsmethode, um folgende quadratische Gleichungen zu lösen:

a) $x^2 + 2x = 8$

b) $x^2 + 4x = 12$

c) $x^2 + 6x = 7$

d) $x^2 + 8x = 9$

e) $x^2 + 3x = 10$

2. Benutze die Substitutionsmethode, um folgende quadratische Gleichungen zu lösen:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $2x^2 - 8x + 6 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$

e) $x^2 - 7x + 12 = 0$

6. Bruch- und Wurzelgleichungen

6.1 Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Nenner eines Bruches steht. Man kann sie dadurch lösen, dass man nacheinander alle vorkommenden Brüche auflöst. Dies erreicht man durch Multiplikation mit dem Nenner des jeweiligen Bruches.

Wir bieten folgende Begründungen für die Methode der Multiplikation mit dem Nenner an:

1. Begründung

Der Bruch steht für eine **Divison** (Zähler durch Nenner):

$$\frac{3}{5} = 3:5$$

Multipliziert man nun wieder mit 5, so kommt die ursprüngliche 3 heraus. Das entspricht übrigens der Probe bei der Division, wie man sie in der Grundschule lernt. Also:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = (3:5) \cdot 5 = 3$$

2. Begründung

Man kann einfach **kürzen**:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = 3.$$

Oder ausführlicher: $\frac{3}{5} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{5} = \frac{(3 \cdot 5):5}{5:5} = \frac{3}{1} = 3.$

3. Begründung

Man kann mit gesundem Menschenverstand und Sprachgefühl so überlegen:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{5} \cdot 5 &= 3 \text{ Fünftel mal } 5 \\
 &= (3 \text{ mal } 1 \text{ Fünftel}) \text{ mal } 5 \\
 &= 3 \text{ mal } (1 \text{ Fünftel mal } 5) \\
 &= 3 \text{ mal } 1 \text{ Ganzes} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Nun werden wir die Lösung einer Bruchgleichung an einem Beispiel vorführen.

Beispiel

$$3 - \frac{4x+7}{2x+3} = \frac{5-x}{7-2x}$$

Lösung

Multipliziere beide Seiten der Gleichung mit $2x+3$, um den links stehenden Bruch loszuwerden:

$$\begin{aligned}
 3 - \frac{4x+7}{2x+3} &= \frac{5-x}{7-2x} && | \cdot (2x+3) \\
 3 \cdot (2x+3) - (4x+7) &= \frac{(5-x) \cdot (2x+3)}{7-2x} \\
 6x+9-4x-7 &= \frac{10x+15-2x^2-3x}{7-2x} \\
 2x+2 &= \frac{-2x^2+7x+15}{7-2x}
 \end{aligned}$$

Multipliziere beide Seiten der Gleichung mit $7-2x$, um den verbleibenden Bruch loszuwerden:

$$\begin{aligned}
 2x+2 &= \frac{-2x^2+7x+15}{7-2x} && | \cdot (7-2x) \\
 (2x+2) \cdot (7-2x) &= -2x^2+7x+15 && | \text{ ausmultiplizieren} \\
 14x-4x^2+14-4x &= -2x^2+7x+15 && | \text{ zusammenfassen} \\
 -4x^2+10x+14 &= -2x^2+7x+15 && | +4x^2
 \end{aligned}$$

$$10x + 14 = 2x^2 + 7x + 15 \quad | -10x$$

$$14 = 2x^2 - 3x + 15 \quad | -14$$

$$0 = 2x^2 - 3x + 1 \quad | :2$$

$$0 = x^2 - 1,5x + 0,5$$

Diese quadratische Gleichung in Normalform kann nun mithilfe der p - q -Formel gelöst werden ($p = -1,5$, $q = 0,5$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = -1,5 \text{ und } q = 0,5 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{-1,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1,5}{2}\right)^2 - 0,5} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = 0,75 \pm \sqrt{0,0625} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = 0,75 \pm 0,25 \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = 0,75 + 0,25 = 1$$

$$x_2 = 0,75 - 0,25 = 0,5$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0,5$$

6.2 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte in der Wurzel steht. Man kann sie dadurch lösen, dass man die Wurzeln jeweils auf einer Seite isoliert und dann die beiden Seiten der Gleichung quadriert. Dadurch fällt die betroffene Wurzel weg.

Die Wurzel aus einer gegebenen Zahl ist die (nicht negative) Zahl, die mit sich selbst multipliziert genau die gegebene Zahl ergibt:

$$\sqrt{9} = 3, \text{ denn } 3 \cdot 3 = 9.$$

Wenn man also die Wurzel (als $\sqrt{9}$ oder 3 geschrieben) quadriert, so kommt die Ursprungszahl 9 heraus:

$$(\sqrt{9})^2 = 9.$$

Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist eine delikate Angelegenheit, weil dadurch **Scheinlösungen** erzeugt werden. Betrachten wir die einfache Gleichung

$$x = 1.$$

Sie ist bereits aufgelöst und hat **nur** die Lösung 1. Wir quadrieren nun beide Seiten der Gleichung und erhalten die Gleichung:

$$x^2 = 1.$$

Diese Gleichung hat **zwei** Lösungen 1 und **-1**. Es ist eine Scheinlösung hinzugekommen, nämlich -1. Diese Scheinlösungen müssen durch eine **Probe** herausgesiebt werden.

Wir fassen zusammen:

Lösungsstrategie für Wurzelgleichungen

1. Wurzeln jeweils **isolieren** und dann beide Seiten der Gleichung **quadrieren**.
2. **Probe** zur Erkennung der **Scheinlösungen** durchführen.

Beispiel

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

Lösung

Wir isolieren zunächst die links stehende Wurzel und quadrieren, um diese Wurzel zu entfernen.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} &= 3 & | -\sqrt{x-1} \\ \sqrt{3x-2} &= 3 - \sqrt{x-1} & | \text{quadrieren} \\ 3x-2 &= (3 - \sqrt{x-1})^2\end{aligned}$$

Wir benutzen nun die zweite binomische Formel und isolieren die Wurzel (die Vorzahl der Wurzel stört nicht):

$$\begin{aligned}3x-2 &= (3 - \sqrt{x-1})^2 \\ 3x-2 &= 9 - 6\sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2 \\ 3x-2 &= 9 - 6\sqrt{x-1} + x-1 \\ 3x-2 &= -6\sqrt{x-1} + x+8 & | -x \\ 2x-2 &= -6\sqrt{x-1} + 8 & | -8 \\ 2x-10 &= -6\sqrt{x-1} & | :2 \text{ (nur zur Vereinfachung)} \\ x-5 &= -3\sqrt{x-1}\end{aligned}$$

Jetzt kann wieder quadriert werden, um die verbliebene Wurzel loszuwerden. Wir verfahren wie oben:

$$\begin{aligned}x-5 &= -3\sqrt{x-1} & | \text{quadrieren} \\ (x-5)^2 &= 9(\sqrt{x-1})^2 & | \text{2. binomische Formel} \\ x^2-10x+25 &= 9(x-1) \\ x^2-10x+25 &= 9x-9 & | -9x \\ x^2-19x+25 &= -9 & | +9\end{aligned}$$

$$x^2 - 19x + 34 = 0$$

Diese quadratische Gleichung können wir nun direkt mithilfe der p - q -Formel lösen ($p = -19$, $q = 34$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = -19 \text{ und } q = 34 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{-19}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-19}{2}\right)^2 - 34} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = 9,5 \pm \sqrt{56,25} \quad | \text{Wurzel berechnen}$$

$$x_{1/2} = 9,5 \pm 7,5 \quad | \text{Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = 9,5 + 7,5 = 17$$

$$x_2 = 9,5 - 7,5 = 2$$

Da wir die Gleichung im Verlaufe der Umformungen **quadratiert** haben, können **Scheinlösungen** entstanden sein. Wir erhalten also lediglich die Lösungskandidaten, nämlich:

$$x_1 = 17$$

$$x_2 = 2$$

Wir sortieren eventuelle Scheinlösungen durch eine Probe aus:

Probe

Zu $x_1 = 17$

Wir setzen $x_1 = 17$ in die ursprüngliche Wurzelgleichung ein und berechnen die linke Seite (auf der rechten steht bereits 3):

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} &= 3 & | x_1 = 17 \text{ einsetzen} \\ \sqrt{3 \cdot 17 - 2} + \sqrt{17 - 1} &= 3 \\ \sqrt{49} + \sqrt{16} &= 3 \end{aligned}$$

$$7 + 4 = 3$$

$$11 = 3$$

Die Probe geht also nicht auf, $x_1 = 17$ ist **keine** Lösung der Wurzelgleichung.

Zu $x_2 = 2$

Wir setzen $x_2 = 2$ in die ursprüngliche Wurzelgleichung ein und berechnen die linke Seite (auf der rechten steht bereits 3):

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3 \quad | x_2 = 2 \text{ einsetzen}$$

$$\sqrt{3 \cdot 2 - 2} + \sqrt{2 - 1} = 3$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3 = 3$$

Die Probe geht auf, $x_2 = 2$ ist eine Lösung.

Also:

Die Wurzelgleichung hat nur eine Lösung: $x = 2$.

Aufgaben

1. Löse die folgenden Bruchgleichungen:

a) $\frac{15}{2x+7} = 2-x$

b) $\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x+5} = 1$

c) $\frac{8}{x+7} + \frac{2}{x+1} = 1$

d) $1 + \frac{2}{1-x} = \frac{8}{x+5}$

e) $\frac{5-x}{x-1} = \frac{x-11}{x+5}$

f) $\frac{3-x}{x+1} = 1 - \frac{16}{x+7}$

2. Löse die folgenden Wurzelgleichungen:

a) $x + 2 - 3 \cdot \sqrt{x} = 0$

b) $4 \cdot \sqrt{x} - x = 3$

c) $5 \cdot \sqrt{x} - x = 6$

d) $\sqrt{x} + 1 - 2x = 0$

e) $3 \cdot \sqrt{x} + 2 - 2x = 0$

f) $x + 3 \cdot \sqrt{x} = 4$

g) $\sqrt{x+5} - \sqrt{3x-8} = 1$

h) $\sqrt{9+4x} + 2 \cdot \sqrt{x} = 9$

i) $\sqrt{16x-7} = 9 - 4 \cdot \sqrt{x-1}$

7. Wurzelberechnung

Beim Lösen von quadratischen Gleichungen mit allen hier betrachteten Verfahren muss man am Ende stets eine Wurzel ziehen. Die Berechnung von Wurzeln (genauer: Quadratwurzeln) ist also ein wesentlicher Bestandteil der Lösung quadratischer Gleichungen.

Das von Christoff Rudolff (ca. 1499 - 1543) eingeführte Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ist – wie bereits erwähnt – der stilisierte Anfangsbuchstabe *r* von *radix*, des lateinischen Ausdruckes für *Wurzel*. Die Entwicklung kann man sich etwa wie folgt vorstellen:

$$\text{Wurzel aus } 20 \rightarrow r20 \rightarrow \sqrt{20} \rightarrow \sqrt{20}.$$

7.1 Erläuterungen zum Heronverfahren

Wir betrachten ein nach dem Griechen Heron (ca. 10 – 70, Alexandria) benanntes Verfahren, das jedoch im Wesentlichen schon den Altbabyloniern um 1800 v. Chr. bekannt war.

Die heutigen Taschenrechner berechnen damit die Wurzeln. Das Verfahren von Heron geht von einem (grobe) Näherungswert (*Startwert*) aus. Der Wert wird dann verbessert. Diese Verbesserungsprozedur wird so lange wiederholt, bis man die gewünschte Genauigkeit (z. B. 8 richtige Stellen nach dem Komma) erreicht hat.

Die Einzelheiten werden nun am Beispiel der Wurzel aus 20 erläutert.

Wir suchen eine Zahl, die mit sich selber multipliziert, 20 ergibt:

$$? \cdot ? = 20$$

Eine glatte (ganze) Zahl kommt leider nicht in Frage, denn $4 \cdot 4 = 16$ ist zu klein und $5 \cdot 5 = 25$ zu groß. Die gesuchte Wurzel muss zwischen 4 und 5 liegen.

Geht man den pragmatischen Kompromiss ein, zunächst auf die Gleichheit der Faktoren zu verzichten, ist es leicht, 20 als Produkt zu bekommen:

$$4 \cdot 5 = 20$$

Wenn man keine so schöne Zerlegung findet, kann man immer auf die Zerlegung mit der Eins als einem der Faktoren zurückgreifen:

$$1 \cdot 20 = 20$$

Bei einer solchen *Zerlegung* ist der eine Faktor zu klein und der andere zu groß, um bei der Multiplikation mit sich selber 20 zu ergeben. Die Wahrheit liegt dazwischen. Der am einfachsten zu berechnende Zwischenwert ist der *Mittelwert*, er liegt genau in der Mitte und berechnet sich als die Summe der beiden Zahlen, dividiert durch zwei. Genauso findet man übrigens auch die Endnote aus zwei Teilnoten.

Betrachten wir die Zerlegung

$$4 \cdot 5 = 20,$$

so sind die Faktoren 4 und 5, und ihr Mittelwert ist:

$$\frac{4+5}{2} = 4,5.$$

Den Wert 4,5 nehmen wir nun als *neuen* ersten *Faktor*. Der zweite Faktor kann nicht frei gewählt werden, sondern muss so berechnet werden, dass das Produkt 20 ergibt:

$$4,5 \cdot ? = 20.$$

Der gesuchte zweite Faktor muss daher der Quotient von 20 und 4,5 sein:

$$4,5 \cdot \frac{20}{4,5} = 20.$$

Setzt man den Quotienten (auf 5 Nachkommastellen gerundet) ein, so kommen wir zu folgender Zerlegung:

$$4,5 \cdot 4,44444 \approx 20.$$

Beide Faktoren liegen nun viel näher beieinander als bei der ursprünglichen Zerlegung. Setzt man das Verfahren fort, so gelangt man zu Faktoren, die sich beliebig nahe kommen.

7.2 Praktische Durchführung des Heronverfahrens

Wir führen das erläuterte Verfahren nun in kurzer schematischer Form durch, um $\sqrt{20}$ bis auf 5 Nachkommastellen zu berechnen.

1. Schritt

Zerlegung: $4 \cdot 5 = 20$ (auch möglich: $1 \cdot 20 = 20$)

Mittelwert: $\frac{4+5}{2} = 4,5$

2. Schritt

Zerlegung: $4,5 \cdot ? = 20$

$$4,5 \cdot \frac{20}{4,5} = 20$$

$$4,5 \cdot 4,44444 \approx 20$$

Mittelwert: $\frac{4,5 + 4,44444}{2} = 4,47222$

3. Schritt

Zerlegung: $4,47222 \cdot ? = 20$

$$4,47222 \cdot \frac{20}{4,47222} = 20$$

$$4,47222 \cdot 4,47205 \approx 20$$

Mittelwert: $\frac{4,47222 + 4,47205}{2} \approx 4,47214$

4. Schritt

Zerlegung: $4,47214 \cdot ? = 20$

$$4,47214 \cdot \frac{20}{4,47214} = 20$$

$$4,47214 \cdot 4,47213 \approx 20$$

Mittelwert: $\frac{4,47214 + 4,47213}{2} \approx 4,47214$

Der letzte Schritt hat keine weitere Verbesserung gebracht. Auch weitere Schritte würden wieder die Zahl 4,47214 liefern. Wir können also abbrechen und das Ergebnis festhalten:

$$\sqrt{20} \approx 4,47214$$

Anmerkungen

1. Das Heron-Verfahren ist *quadratisch konvergent*. Das bedeutet praktisch, grob gesagt, folgendes: Bei jedem Verbesserungsschritt verdoppelt sich die Anzahl zutreffender Nachkommastellen.

2. Das Heron-Verfahren ist ein *iteratives* Verfahren, der gleiche Rechengang wird immer wiederholt. Auch komplizierte Gleichungen können durch iterative Verfahren gelöst werden. In der Tat ist das Heron-Verfahren ein Spezialfall des Newton-Verfahrens.

3. Bei der Wurzelberechnung kann man sich auf Zahlen zwischen 1 und 100 beschränken. Beispiele:

a) Große Zahl:

$$\begin{aligned}\sqrt{200.000} &= \sqrt{20 \cdot 10.000} \\ &= \sqrt{20} \cdot \sqrt{10.000} \\ &= \sqrt{20} \cdot 100\end{aligned}$$

b) Kleine Zahl:

$$\begin{aligned}\sqrt{0,02} &= \sqrt{\frac{2}{100}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

Der Kunstgriff besteht darin, dass die Wurzel aus den glatten Zahlen 100, 10.000, 1.000.000, usw. leicht anzugeben ist, wenn die Anzahl der Nullen jeweils gerade ist: Die Wurzel ist eine 1 mit halb so vielen Nullen. Also beispielsweise:

$$\begin{aligned}\sqrt{100} &= 10, \\ \sqrt{10.000} &= 100, \\ \sqrt{1.000.000} &= 1000 \text{ usw.}\end{aligned}$$

Schreibt man die Zahlen als Potenzen von 10, so steht im Exponenten die Anzahl der Nullen:

$$\begin{aligned}100 &= 10^2, \\ 10.000 &= 10^4, \\ 1.000.000 &= 10^6 \text{ usw.}\end{aligned}$$

Die Wurzel aus derartigen Potenzen ist dann die Potenz mit halbem Exponenten (Anzahl der Nullen halbieren):

$$\begin{aligned}\sqrt{10^2} &= 10^1 = 10, \\ \sqrt{10^4} &= 10^2 = 100, \\ \sqrt{10^6} &= 10^3 = 1000, \\ \sqrt{10^8} &= 10^4 = 10.000, \\ \sqrt{10^{50}} &= 10^{25} \text{ usw.}\end{aligned}$$

4. Das Heron-Verfahren kann sinngemäß auf die Berechnung der Kubikwurzel und weiterer höherer Wurzeln übertragen werden.

Aufgaben

1. Berechne die Quadratwurzeln aus den Zahlen 2, 3, 5, 10 und 65 mit einer Genauigkeit von sechs Nachkommastellen.

2. Berechne die Quadratwurzel aus 80 mit einer Genauigkeit von sechs Nachkommastellen mit den zwei verschiedenen Startwerten 1 und 10 (d.h. mit der Anfangszerlegungen $1 \cdot 80 = 80$ bzw. $10 \cdot 8 = 80$).

3. Finde die Quadratwurzeln aus folgenden Zahlen:

a) 9, 900, 90.000, 9.000.000, 0,09, 0,0009, 0,000.009.

b) 90, 9000, 0,9, 0,009.

4. Berechne die Quadratwurzeln aus

$$4,51 \cdot 10^{30} \quad \text{und} \quad 4,51 \cdot 10^{31}$$

mit einer Genauigkeit von jeweils sechs Dezimalstellen.

Lösungen

Lösungen zu Kapitel 2: Anschaulicher Lösungsweg

1. a) 1, b) 2, c) 1, d) 1, e) 5, f) 3, g) 2, h) 3, i) 6, j) 4
2. a) 2, b) 3
3. 2 cm

Lösungen zu Kapitel 3: Algebraischer Lösungsweg

1. a) 2, -2 b) 7, -7 c) 0 d) 7,071, -7,071 e) 1,414, -1,414
f) keine Lösung g) 1,7321, -1,7321 h) 3,162, -3,162
i) 100, -100
2. a) 1, -3 b) 2, -6 c) 1, -7 d) 1, -9 e) 2, -5 f) 3, -4
g) 6, -11
3. a) 4, 2 b) 3, 1 c) 2, 1 d) 1, -2 e) 4, 3 f) 5, 2
g) 1, -3 h) 6, -2
4. 2, -1
5. 1, -2
6. 5 cm

Lösungen zu Kapitel 4: Die p - q -Formel

1. a) 4, 2 b) 3, 1 c) 2, 1 d) 1, -2 e) 4, 3 f) 5, 2
g) 1, -3 h) 6, -2
2. a) -3 b) 3, -2 c) keine Lösung d) $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{3}$, -1 f) -0,38, -2,62
3. 2, -1
4. 1, -2
5. 8 cm

Lösungen zu Kapitel 5: Lösung durch Substitution

1. a) 2, -4 b) 2, -6 c) 1, -7 d) 1, -9 e) 2, -5
2. a) 4, 2 b) 3, 1 c) 2, 1 d) 1, -2 e) 4, 3

Lösungen zu Kapitel 6: Bruch- und Wurzelgleichungen

1. a) $-0,5, -1$ b) $1, -3$ c) $5, -3$ d) $7, -1$ e) $7, -1$
f) $5, -3$
2. a) $4, 1$ b) $9, 1$ c) $9, 4$ d) 1 e) 4 f) 1 g) 4
h) 4 i) 2

Lösungen zu Kapitel 7: Wurzelberechnung

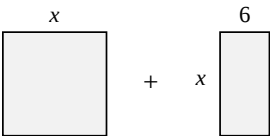
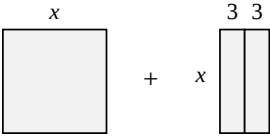
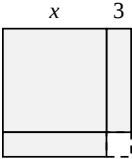
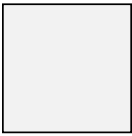
1. $\sqrt{2} \approx 1,414214$, $\sqrt{3} \approx 1,732051$, $\sqrt{5} \approx 2,236068$
 $\sqrt{10} \approx 3,162278$, $\sqrt{65} \approx 8,062258$
2. $\sqrt{80} \approx 8,944272$
3. a)
 $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{900} = 30$, $\sqrt{90.000} = 300$, $\sqrt{9.000.000} = 3000$,
 $\sqrt{0,09} = 0,3$, $\sqrt{0,0009} = 0,03$,
 $\sqrt{0,000.009} = 0,003$
b)
 $\sqrt{90} = 9,48683\dots$, $\sqrt{9000} = 94,8683\dots$, $\sqrt{0,9} = 0,948683\dots$
 $\sqrt{0,009} = 0,0948683\dots$
4. $2,12368 \cdot 10^{15}$, $6,71565 \cdot 10^{15}$

Anhang 1: Zusammenfassung

Dieser Anhang enthält eine Übersicht der wesentlichen Inhalte dieses Buches. Die folgenden Themen sind auf jeweils einer Seite zusammengefasst:

- Anschauliche Lösung einer quadratischen Gleichung
- Lösung durch quadratische Ergänzung
- Die p - q -Formel und der Satz von Vieta
- Lösung durch Substitution

Anschauliche Lösung einer quadratischen Gleichung

$x^2 + 6x = 16$		
x	x	$= 16$
		
x	x	$= 16$
		
x	x	$= 16$
		$= 16$
3	Lücke: $3 \cdot 3 = 9$	
$x+3$		$= 25$
		
$x+3$	$=$	5
		25
$x+3 = 5$		
$x = 2$		

Lösung durch quadratische Ergänzung

Lösen der Gleichung: $x^2 + 6x = 16$

$$x^2 + 6x = 16 \quad | 6 : 2 = 3$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x = 16 \quad | + 3^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 16 + 3^2 \quad | 1. \text{ binomische Formel}$$

$$(x + 3)^2 = 25 \quad | \text{ Wurzelziehen}$$

$$x + 3 = \pm 5 \quad | -3$$

$$x = \pm 5 - 3 \quad | \text{ Fallunterscheidung}$$

$$x_1 = +5 - 3 = 2$$

$$x_2 = -5 - 3 = -8$$

Die Gleichung hat also die beiden Lösungen:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -8$$

Die p - q -Formel

Die p - q -Formel

Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die Lösung(en)

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Der Satz von Vieta

Die zwei Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

haben die Eigenschaft, dass

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

gilt.

Lösung durch Substitution

Lösen der Gleichung: $x^2 + 6x = 16$

Substituiere $x = z + a$:

$$x^2 + 6x = 16$$

$$(z + a)^2 + 6(z + a) = 16$$

$$z^2 + 2az + a^2 + 6z + 6a = 16$$

$$z^2 + (2a + 6)z + a^2 + 6a = 16$$

$$z^2 + (2a + 6)z = 16 - a^2 - 6a$$

Aus $2a + 6 = 0$ folgt $a = -3$. Die Substitution ist $x = z - 3$.

Setze $a = -3$ in die quadratische Gleichung ein:

$$z^2 + (2a + 6)z = 16 - a^2 - 6a$$

$$z^2 + 0 = 16 - 9 + 18$$

$$z^2 = 25$$

$$z_{1/2} = \pm 5$$

Setze $z_{1/2} = \pm 5$ ein in $x = z - 3$:

$$x_1 = z_1 - 3 = 5 - 3 = 2$$

$$x_2 = z_2 - 3 = -5 - 3 = -8$$

Die Gleichung hat also die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -8$.

Anhang 2: Komplexe Zahlen

Einige quadratische Gleichungen haben keine Lösung. So kommt für die einfache Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine der üblichen (*reellen*) Zahlen als Lösung in Frage, denn beim Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst erhält man stets eine positive Zahl oder Null.

Wir erweitern unseren Zahlenbereich durch Hinzufügen einer neuartigen Zahl i , die eine Lösung der obigen Gleichung ist:

$$i^2 = -1.$$

Man bezeichnet i als *imaginäre Einheit*. Sie kann als Wurzel aus -1 aufgefasst werden:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Anschaulich betrachtet, gehen wir vom *Zahlenstrahl* zur *Zahlenebene* über. Die imaginäre Einheit entspricht einem Punkt in der Ebene, der außerhalb des Zahlenstrahls liegt.

Wenn man die vier Grundrechenarten mit reellen Zahlen und i durchführt, ergeben sich stets Ausdrücke der Gestalt:

$$a + bi,$$

beispielsweise $2 + 3i$, $-4 + 5i$, $1,5 + 3,8i$, usw.

Diese aus reellen Zahlen und der imaginären Einheit zusammengesetzten Größen nennt man *komplexe Zahlen*.

Im Bereich dieser komplexen Zahlen kann die Wurzel aus negativen Zahlen gezogen werden, zum Beispiel ist:

$$\sqrt{-9} = 3i, \text{ denn } (3i)^2 = 9i^2 = -9$$

Lässt man auch komplexe Zahlen zu, so liefert die p - q -Formel also immer eine Lösung der quadratischen Gleichung. Zum Beispiel hat die in Kapitel 4.2 (Beispiel 6) betrachtete Gleichung

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

nun die Lösungen:

$$x_1 = -2 + i \quad \text{und} \quad x_2 = -2 - i.$$

Denn

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | p = 4 \text{ und } q = 5 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \quad | \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Man rechnet mit komplexen Zahlen genauso wie mit den üblichen reellen Zahlen und Buchstaben. Es ist lediglich zu beachten, dass $i^2 = -1$ ist.

Wir betrachten zur Verdeutlichung Beispiele zu den vier Grundrechenarten:

Addition

$$(2 + 3i) + (5 + 9i) = 7 + 12i$$

Subtraktion

$$(2 + 9i) - (6 + 3i) = -4 + 6i$$

Multiplikation

$$\begin{aligned}
 (2+3i) \cdot (5+4i) &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4i + 3i \cdot 5 + 3i \cdot 4i \\
 &= 10 + 8i + 15i + 12i^2 && | i^2 = -1 \\
 &= 10 + 23i - 12 \\
 &= -2 + 23i
 \end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned}
 \frac{3+7i}{1+2i} &= \frac{(3+7i) \cdot (1-2i)}{(1+2i) \cdot (1-2i)} && | \text{3. binomische Formel} \\
 &= \frac{17+i}{1-4i^2} && | i^2 = -1 \\
 &= \frac{17+i}{1+4} \\
 &= \frac{17+i}{5} \\
 &= \frac{17}{5} + \frac{1}{5}i
 \end{aligned}$$

Hier hat man einen oft nützlichen Kunstgriff benutzt, um das i im Nenner $1+2i$ loszuwerden: Zähler und Nenner werden mit der entsprechenden Differenz $1-2i$ multipliziert. Dann wendet man die 3. binomische Formel an, die besagt, dass das Produkt einer Summe und der entsprechenden Differenz die Differenz der Quadrate ist:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Somit erhält man also den neuen Nenner:

$$\begin{aligned}
 (1+2i)(1-2i) &= 1^2 - (2i)^2 \\
 &= 1 - 4i^2 \\
 &= 1 - 4 \cdot (-1) \\
 &= 1 + 4 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Historisches zu den komplexen Zahlen

Rafael Bombelli (1526 – 1572) hat in seinem Buch *Algebra* als erster die komplexen Zahlen dargelegt und als Lösungen von Gleichungen einbezogen.

Das Wort *imaginär* ist von René Descartes (1596 – 1650) in seiner berühmten *Geometrie* eingeführt worden.

Der Ausdruck *komplexe Zahlen* ist von Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) geprägt worden.

Die Bezeichnung i für die imaginäre Einheit geht auf Leonhard Euler (1708 – 1783) zurück.

Anwendungen der komplexen Zahlen

Bereits am Ende des 19. Jahrhunderts hat der deutsche Elektroingenieur Charles Steinmetz (1865 – 1923) komplexe Widerstände im Wechselstromkreis eingeführt, was zu einer erheblichen Vereinfachung der Berechnungen geführt hat.

Die in den 1920er Jahren entwickelte Quantenmechanik benutzt komplexe Zahlen. Auf einer Inschrift am Grab Erwin Schrödingers (1878 – 1961) steht die berühmte *Schrödingergleichung*:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$$

Sie enthält die imaginäre Einheit i .

Anhang 3: Eulers Variante der p-q-Formel

Bei der p-q-Formel kommen zwei Vorzeichenänderungen vor, sowohl p als auch q erscheinen in der Formel mit geändertem Vorzeichen. Leonhard Euler (1707-1783) benutzt in seiner berühmten „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ eine Variante der p-q-Formel, die keine Vorzeichenänderung erfordert. Dazu löst er die Normalform der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

nach x^2 auf:

$$x^2 = -px - q.$$

Vergleicht man diese aufgelöste Gleichung mit der p-q-Formel, so sieht man, dass nun keine Vorzeichenwechsel mehr nötig sind, $-p$ und $-q$ – werden wörtlich in die Formel übertragen:

$$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}.$$

Mit anderen Bezeichnungen tritt dies noch deutlicher hervor:

Die quadratische Gleichung

$$x^2 = ax + b$$

hat die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

Der Lösungsausdruck beginnt mit der halben Vorzahl von x, dann folgt + oder – die Wurzel aus dem Quadrat der Zahl, die man gerade geschrieben hat, plus die Konstante (die Zahl, die kein x

enthält). *Diesen* beschriebenen *Inhalt* der Lösungsformel muss man sich einprägen, wie Euler hervorhebt.

Wir zeigen nun an zwei Beispielen, wie man mit dieser Methode quadratische Gleichungen löst. Wir beginnen mit dem Beispiel, das Euler selbst gegeben hat.

Beispiel 1 (Euler)

$$x^2 = 6x + 7$$

Lösung

Aus $x^2 = 6x + 7$ hat man sofort $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$; also sind die zwei Werte von x : I.) $x = 7$ und II.) $x = -1$.

Beispiel 2

$$x^2 + 6x = 16$$

Lösung

1. Die quadratische Gleichung wird nach x^2 aufgelöst:

$$x^2 + 6x = 16 \quad | -6x$$

$$x^2 = 16 - 6x$$

$$x^2 = -6x + 16$$

2. Wende den Inhalt der Formel an (Vorzahl von x ist -6 , die Konstante ist 16):

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 16}$$

$$= -3 \pm \sqrt{9 + 16}$$

$$= -3 \pm 5 = \begin{cases} -3 + 5 = 2 \\ -3 - 5 = -8 \end{cases}$$

Die Lösungen sind folglich $x = 2$ und $x = -8$.

