Leonhard Euler

Instrucción completa
de
Álgebra

Primera parte

Leonh. Euler

Esta es la primera traducción española de la primera parte del afamado libro de álgebra escrito por Leonhard Euler (1707 – 1783), uno de los matemáticos más prolíferos e impactantes de la historia. Solamente muy pocos matemáticos de tal categoría se tomaron la molestia de escribir un libro de texto elemental, dirigido al público en general. Ya hace dos siglos existen traducciones rusas, francesas e inglesas del texto original alemán. En vista de esa divulgación, para sus contemporáneos Euler era el «maestro de Europa»; de hecho, los planteamientos sencillos y claros en este libro todavía se reflejan en las escuelas europeas y de otras partes del mundo.

Para Euler no es suficiente dar la regla, o la fórmula, y una multitud de ejemplos de aplicación. Él expresa su modo de enseñanza en las siguientes palabras: «Para cualquier humano es mucho más fácil comprender y retener algo en la memoria, si entiende las razones y orígenes con claridad. Así, también podrá usarlo mucho mejor en todos los casos que se den.»

En el lapso de 1765 a 1768, ya estando ciego, Leonhard Euler redactó la *Instrucción completa de Álgebra*, dictándole el texto a su ayudante, que era sastre de oficio. Al concluir el libro, el ayudante había aprendido y entendido el contenido, además podía resolver todos los problemas pertinentes planteados. Eso avala la gran calidad del libro.

Testimonios de matemáticos célebres sobre el autor Euler:

«¡Lean Euler, él es el maestro de todos nosotros!»
Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)

«Ningún otro matemático del pasado o del presente puede ser alabado tanto por su casi increíble rapidez en los trabajos más difíciles, con tantas, inagotables ideas y recursos nuevos. Se dedicó a todas las áreas de la matemática, y en sus manos casi todas tomaron una forma nueva.»
Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

«Es maravilloso que hoy todavía se puede leer cada uno de sus tratados no sólo aprendiendo mucho, sino también con placer.»
Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851)

Leonhard Euler

Instrucción completa de Álgebra

Primera Parte

Instrucción completa de Álgebra

Primera Parte

Leonhard Euler

Traducción de Alexander Roux

ISBN: 9798551842354

Edición e Impresión:
Kindle Direct Publishing
Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,
L-1855 Luxemburg

Edición alemana original:
Leonhard Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra*.
Erster Theil. St. Petersburg, 1770

INFORME PREVIO

Por la presente se le entrega a los amantes de la aritmética avanzada una obra, de la cual una traducción rusa ha salido a la luz hace dos años [*Nota del traductor: es decir, en 1768*].[1)]

La intención del autor de fama mundial era elaborar un libro de texto con el que cualquiera pudiese entender fácilmente el Álgebra y aprenderla a fondo.

La pérdida de la vista hizo surgir esta idea, e impulsado por su mente siempre movida, no falló en realizar su propósito. Para este fin escogió a un joven, al cual trajo de Berlín como criado, y quien sabía hacer cuentas bastante bien, pero no tenía ni la más mínima idea de matemáticas. Era sastre de oficio, y pertenecía, con respecto a las habilidades, a las mentes regulares. A pesar de esto, no sólo entendió muy bien lo que le dictaba su gran maestro, sino que dentro de poco tiempo fue capaz de ejecutar por su propia cuenta los cálculos difíciles con letras, que iban apareciendo. Y podía resolver todas las tareas algebraicas encargadas con gran habilidad.

El aprendiz, quien escribió, entendió y realizó esta obra, solo obtuvo ayuda por parte de su maestro, quien aunque era famoso, estaba privado de la vista. Eso alaba aún más la exposición y el modo de enseñanza de la obra.

Aparte de este gran mérito, los conocedores leerán con placer y admiración sobre todo la teoría de los logaritmos y su relación con las otras operaciones aritméticas, y la resolución de las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas. Los amantes de los problemas DIOFÁNTICOS, sin embargo, podrán disfrutar de la última sección de la segunda parte, en la que estas tareas se presentan en un contexto agradable, y se explican las técnicas necesarias para sus soluciones.

---

1) La primera parte de esta traducción apareció en 1768, la segunda en 1769. Los traductores fueron PETER INOCHODTZOFF e IWAN IUDIN.

La primera parte del original alemán debió completarse en 1767 a más tardar, la segunda en 1768. El hecho de que Euler haya usado los números 1765 y 1766 repetidamente y de manera llamativa como ejemplos (ver, por ejemplo, p. 106 y 197), ciertamente permite concluir que el trabajo ya había comenzado en 1765, es decir, todavía en Berlín. De ahí también había llevado a su ayudante con él, a quien supuestamente había examinado de antemano.

De las numerosas ediciones y traducciones que ha sufrido el Álgebra (las copias de los títulos y las notas bibliográficas e históricas asociadas abarcan 10 páginas impresas en la *Lista de obras de LEONHARD EULER* elaborado por ENESTRÖM), solo hay que destacar la traducción al francés de JOHANN III BERNOULLI, que se publicó en Lyon en 1774 en dos volúmenes. El segundo volumen contiene las famosas *Additions* de LAGRANGE.
Heinrich Weber, 1911

CONTENIDO DE LA OBRA COMPLETA

PRIMERA PARTE

SECCIÓN 1
DE LAS DIFERENTES OPERACIONES ARITMÉTICAS CON MAGNITUDES SIMPLES

SEGUNDA PARTE

SECCIÓN 1
DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS Y SU RESOLUCIÓN

FIN

PRIMERA SECCIÓN DE LA PRIMERA PARTE

DE LAS DIFERENTES OPERACIONES ARITMÉTICAS CON MAGNITUDES SIMPLES

CAPÍTULO 1

DE LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS EN GENERAL

1.

En primer lugar, se le llama magnitud a todo aquello, que es capaz de un aumento o de una disminución, o aquello al que se le puede agregar o quitar algo.

Por lo tanto, una cantidad de dinero es una magnitud, porque se le puede agregar o quitar algo. De la misma manera, también el peso, y otros similares, son magnitudes.

2.

Así que hay muchísimos y casi innumerables diferentes tipos de magnitudes, y así surgen las distintas partes de las matemáticas, cada una de las cuales se dedica a un tipo especifico magnitudes. La matemática no es otra cosa que una ciencia de las magnitudes, que encuentra medios para medir las magnitudes.

3.

Pero una magnitud no se puede determinar o medir de otra manera, más que considerando una magnitud del mismo tipo como conocida, e indicando la relación, que tiene cualquier magnitud del mismo tipo con ella.

Entonces, si tiene que determinar la magnitud de una cantidad de dinero, se toma una cierta moneda de dinero, por ejemplo un florín, un rublo, un tálero o un ducado, se le considera conocido, y se observa cuántas de estas monedas están contenidas en la cantidad de dinero reportada.

Del mismo modo, si se tiene que determinar la magnitud de un peso, se supone conocido cierto peso como por ejemplo una libra, un quintal, o una onza [lot], etc., y se observa cuántas de estas están contenidas en el peso anterior.

Por otro lado, si hay que medir una longitud o distancia, se acostumbra usar cierta longitud conocida, que se llama pie.

4.

Al determinar o medir las magnitudes de todos los tipos, lo esencial es que primero hay que escoger cierta magnitud del mismo tipo (que se llama la medida o la unidad) y por lo tanto solo depende de nuestra arbitrariedad; después hay que determinar en qué relación está la magnitud dada con esta medida, lo cual siempre se indica con números, así que un número no es otra cosa que la relación que tiene un magnitud con otra, que se toma como unidad.

5.

De esto queda claro que todas las magnitudes se pueden expresar por números, y así, al sentar la base de todas las ciencias matemáticas, se tienen que considerar y tratar por completo la enseñanza de los números y todo tipo de cálculos.

Esta parte básica de las matemáticas se llama analítica o álgebra.

6.

En la analítica, por lo tanto, sólo se consideran los números, los cuales representan magnitudes, sin preocuparse por el tipo particular de las magnitudes, como sucede en las otras partes de las matemáticas.

7.

De los números, en particular, trata la arítmetica, pero ella sólo abarca ciertos tipos de cálculos que ocurren a menudo en la vida cotidiana. Por otro lado, la analítica contiene, en modo general, todas las situaciones de números y cálculos que puedan surgir.

CAPÍTULO 2

EXPLICACIÓN DE LOS SIGNOS + MÁS Y – MENOS

8.

Si a un número se le debe agregar o sumar otro número, entonces esto se indica con el signo +, que se le antepone al número, y se pronuncia *más*.

Por lo tanto $5 + 3$ indica que al número 5 hay que sumarle 3, así se sabe que resulta 8. De la misma manera, por ejemplo:

$$12 + 7 \text{ es } 19; \quad 25 + 16 \text{ es } 41 \quad \text{y} \quad 25 + 41 \text{ es } 66, \text{ etc.}$$

9.

Con este signo más +, se acostumbra unir también varios números, por ejemplo:

$7 + 5 + 9$ que indica que al número 7 se le suma 5 y además 9, lo que da 21. Entonces se entiende lo que significa la siguiente expresión:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,$$

es decir la de suma todos estos números, la cual da 51.

10.

Aunque esté claro, nos queda mencionar, que, en modo general, se indican números por letras, como *a*, *b*, *c*, *d*, etc.

Entonces, si se escribe $a + b$, esto significa la suma de los dos números expresados por a y b, ya sean tan grandes o pequeños como quieran. Asimismo, $f + m + b + x$ significa la suma de los números expresados por las letras.

En cualquier caso, solo basta saber, cuales son los números indicados por las letras, para encontrar la suma o el valor de tales expresiones, haciendo cálculos.

11.

Por otro lado, si a un número se le debe quitar o restar otro número, entonces esto se indica con el signo – *menos*, que se le antepone al número que se quita.

Por lo tanto

$$8 - 5$$

significa que del número 8 hay que quitar el número 5, así, como se sabe, quedan 3. De la misma manera,

$12 - 7$ es lo mismo que 5, y $20 - 14$ es lo mismo que 6, etc.

12.

También puede suceder que de un número se tienen que restar varios números al mismo tiempo, por ejemplo:

$$50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9.$$

Lo que hay que entender así: primero se quita 1 de 50, quedan 49. De eso se quitan 3, quedan 46; de eso quitando 5, quedan 41; de eso quitando 7, quedan 34; de eso quitando los últimos 9, quedan 25; lo cual es el valor de la expresión dada. Pero, ya que hay que restar todos los números 1, 3, 5, 7, 9, da lo mismo restar su suma, es decir 25, de una vez de 50, ya que, como antes, quedan 25.

13.

De la misma manera, es fácil determinar también el valor de aquellas expresiones que contengan ambos signos + *más* y – *menos*, como por ejemplo:

$$12 - 3 - 5 + 2 - 1 \text{ es lo mismo que } 5.$$

O simplemente se suman los números que tengan + por delante, es decir 12 + 2 da 14, luego se resta la suma de todos los números que tienen – por delante, los cuales son 3, 5, 1, es decir se resta 9, eso da 5, como se había encontrado anteriormente.

14.

De esto queda claro que aquí no importa el orden de los números puestos, sino que se pueden mover arbitrariamente, siempre y cuando los números conserven su signo antepuesto. Es decir, en vez de la expresión anterior se puede poner

$$12 + 2 - 5 - 3 - 1, \quad \text{o} \quad 2 - 1 - 3 - 5 + 12, \quad \text{o}$$
$$2 + 12 - 3 - 1 - 5.$$

Pero en eso hay que tomar nota, que en la expresión susodicha el número 12 tiene que ser considerado con el signo + antepuesto.

15.

Si ahora se trata el asunto general, usando letras en lugar de los verdaderos números, también se entiende fácilmente el significado de ello, como por ejemplo:

$a - b - c + d - e$ indica que hay que tomar los números expresados por las letras a y d, de estas se restan todas las otras, b, c, e, o sea las que tienen el signo –.

16.

Por lo tanto, aquí lo más importante es el signo que tenga antepuesto un número. Por eso, en el álgebra se acostumbra considerar los números con sus signos antepuestos como una sola magnitud. Y aquellos números que tengan el signo + delante, se llaman *magnitudes* *afirmativas* o *positivas*; pero aquellos que tengan el signo – delante, se llaman *magnitudes negativas*.

17.

Esto puede explicarse muy bien por la forma en que se presentan habitualmente los bienes de una persona; ya que aquello que realmente posee es expresado por números positivos con el signo + *mas*, pero aquello que la persona debe, por números negativos con el signo – *menos*. Entonces, si alguien tiene 100 rublos, pero debe 50 rublos, entonces su fortuna es de

100 – 50, o lo que es lo mismo,
+ 100 – 50, eso es 50.

18.

Ya que los números negativos pueden considerarse deuda, mientras que los números positivos indican las posesiones reales, también se puede decir que los números negativos son menos que nada; por lo tanto, si alguien no tiene nada de fortuna y además debe 50 rublos, entonces tiene 50 rublos menos que nada; si alguien le regala 50 rublos para pagar su deuda, entonces apenas tiene nada, y ahora tiene más que antes.

19.

Así como los números positivos son indudablemente mayores que nada, también los números negativos son menos que nada. Ahora los números positivos surgen, si a 0, o sea nada, se le agrega uno sin cesar, ya que entonces se origina la sucesión de los llamados *números naturales*, es decir:

0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,

y así hasta el infinito.

Si se continúa esta fila hacia atrás, y siempre se le quita uno más, surge la siguiente serie de los números negativos:

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

etcétera, sin fin.

20.

Todos estos números, tanto positivos como negativos, tienen el nombre conocido de los *números enteros*, que son más grandes o más pequeños que nada. Se llaman números enteros para distinguirlos de los números quebrados y de números de otros muchos tipos, que se tratarán después. Ya que por ejemplo 50 es un entero más que 49, entonces se entiende fácilmente, que entre 49 y 50 todavía puede haber un número infinito de números intermedios, que son todos mayores que 49 y, sin embargo, todos son menores que 50. Para este fin basta imaginarse dos líneas, una de 50 pies de largo y la otra de 49 pies de largo, por lo que uno puede entender fácilmente que se puede dibujar un número infinito de otras líneas, todas más largas que 49 y aún más cortas que 50 pies.

21.

El concepto de magnitudes negativas tiene que ser considerado con muchísimo cuidado, ya que es de la mayor importancia en todo el álgebra. Será suficiente notar de antemano que expresiones como por ejemplo:

$$+1-1, \quad +2-2, \quad +3-3, \quad +4-4, \ \text{etc.},$$

todos son tanto como 0, o sea nada. Además, notamos que por ejemplo $+2-5$ es tanto como -3, porque cuando uno tiene 2 rublos, y debe 5 rublos, entonces no solo no tiene nada, sino que todavía tiene 3 rublos de deuda; del mismo modo,

$$7-12 \ \text{es tanto como} \ -5,$$
$$25-40 \ \text{es tanto como} \ -15.$$

22.

Esto también se observa, si de modo general se usan letras en vez de números; entonces $+a-a$ siempre es igual a 0, o sea nada. Después, si se quiere saber lo que significa, por ejemplo, $+a-b$, entonces hay que considerar dos casos.

El primero es cuando a es mayor que b. Ahí se resta b de a, y el resto, tomado como positivo, es el valor que estamos buscando.

El segundo es cuando a es menor que b. Ahí se resta a de b, y el resto, tomado como negativo, o sea anteponiendo el signo menos $-$, indica el valor buscado.

CAPÍTULO 3

DE LA MULTIPLICACIÓN CON MAGNITUDES SIMPLES

23.

Si se suman dos o más números idénticos, la suma se puede expresar de una manera más corta, así:

$a+a$	es tanto como	$2\cdot a$,	y
$a+a+a$	" " "	$3\cdot a$,	además
$a+a+a+a$	" "	$4\cdot a$,	etcétera.

De ahí surge el concepto de multiplicación, es decir,

$2\cdot a$ es tanto como 2 veces a, y
$3\cdot a$ es tanto como 3 veces a, además
$4\cdot a$ es tanto como 4 veces a, etc.

24.

Entonces, si un número expresado por una letra se multiplica por cualquier número, el número simplemente se escribe antes de las letras; por lo tanto

a multiplicada por 20 da $20a$, y
b multiplicada por 30 da $30b$, etc.

De tal forma, una c, tomada una vez, o sea $1c$, es tanto como c.

25.

Además, los productos de ese tipo se pueden multiplicar fácilmente por otros números, por ejemplo

2 veces $3a$ da $6a$
3 veces $4b$ da $12b$
5 veces $7x$ da $35x$,

y estos productos pueden multiplicarse por más números como se desee.

26.

Si el número que se multiplicará también está representado por una letra, la misma se coloca inmediatamente antes de la otra letra. Entonces, si b se multiplica por a, el producto es ab, y pq es el producto que surge cuando el número q se multiplica por p. Si se quiere multiplicar pq por a, resulta apq.

27.

Cabe señalar que aquí el orden de las letras colocadas una tras otra no es relevante, ya que ab es tanto como ba; es decir, multiplicar b y a da lo mismo que multiplicar a por b. Para entender esto, basta tomar números conocidos en lugar de a y b, como 3 y 4, resulta automáticamente que 3 veces 4 es tanto como 4 veces 3.

28.

Si en lugar de las letras que se escriben directamente una al lado de la otra, se deben poner números concretos, es fácil ver que no se puede escribir inmediatamente uno después del otro. Porque si uno quisiera escribir 3 veces 4 en la forma 34, eso no significaría doce sino treinta y cuatro. Por eso, si se quiere indicar una multiplicación con simples números, se acostumbra poner un punto entre ellos: $3 \cdot 4$ significa 3 por 4, es decir 12, asimismo $1 \cdot 2$ es tanto como 2 y $1 \cdot 2 \cdot 3$ da 6; además $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 56$ es 1344 y $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ es 3628800, etc.

29.

De esto se deduce ahora lo que significa una expresión como $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot abcd$; pues, 5 se multiplica primero por 7, el producto además por 8, este producto posteriormente por a, y este por b, luego por c, y finalmente se multiplica por d; hay que observar que en lugar de $5 \cdot 7 \cdot 8$, se puede escribir su valor, o sea 280; porque multiplicando 5 por 7 resulta 35, y 8 por 35 es 280.

30.

Además, debe tenerse en cuenta que aquellas expresiones que surgen de la multiplicación de varios números se llaman *productos*. En cambio, los números o letras, que están solos, usualmente se denominan *factores*.

31.

Hasta ahora solo hemos considerado números positivos, y no hay ninguna duda de que los productos resultantes deberían ser positivos: pues, $+a$ multiplicado por $+b$ indiscutiblemente da $+ab$. Pero lo que sale, si $+a$ se multiplica por $-b$, o $-a$ se multiplica por $-b$, requiere una explicación especial.

32.

En primer lugar, queremos multiplicar: $-a$ por 3, o sea por $+3$; ya que $-a$ puede considerarse como una deuda, es evidente que cuando esta deuda se toma 3 veces, también debe ser 3 veces mayor, por lo que el producto buscado será

$-3a$. Del mismo modo, cuando $-a$ se multiplique por b, es decir $+$b, saldrá $-ba$, o que es lo mismo $-ab$. De esto concluimos que cuando una cantidad positiva se multiplica por una cantidad negativa, el producto se vuelve negativo; de ahí se saca la regla: + por + da +, o sea *más*. Por otro lado, + por –, y – multiplicado por + dan –, o sea *menos*.

33.

Ahora queda por determinar el caso en que – se multiplica por –, o sea $-a$ por $-b$. Primero está claro que, en vista de las letras, el producto tiene que ser *ab*; pero todavía es incierto, si hay que poner el signo + o –, pero es seguro que debe ser uno u otro. Pero ahora, digo, no puede ser el signo –. Porque multiplicando $-a$ por $+b$ resulta $-ab$, y por lo tanto, multiplicando $-a$ por $-b$ no puede dar lo mismo que $-a$ por $+b$, sino tiene que resultar lo opuesto, es decir $+ab$. De ahí sale la regla: multiplicando – por – da +, al igual que + por +.

34.

Estas reglas suelen ser resumidas y expresadas brevemente con estas palabras: multiplicando dos signos iguales da +, dos signos diferentes dan –. Si, por ejemplo, los números

$$+a, -b, -c, +d$$

se multiplican, entonces primero $+a$ multiplicado por $-b$ da $-ab$, esto por $-c$, da $+abc$, y finalmente esto por $+d$, da $+abcd$.

35.

Ya que ahora el asunto de los signos no tiene dificultad, queda por mostrar cómo se deben multiplicar dos números, que son en sí mismos productos. Si el número *ab* se multiplica por el número *cd*, entonces el producto es *abcd*, y por lo tanto surge si primero se multiplica *ab* por *c*, y lo que se encuentra por multiplicación, además se multiplica por *d*. O si, por ejemplo, se tiene que multiplicar el número 36 por 12: porque 12 es 3 por 4, solo es necesario multiplicar 36 por 3 y multiplicar lo encontrado, es decir 108, por 4. Entonces se obtiene:

432, que es tanto como 12 veces 36.

36.

Ahora, si se desea multiplicar $5ab$ por $3cd$, también se podría poner $3cd\ 5ab$: pero dado que aquí el orden de los números multiplicados no es relevante, se acostumbra poner primero los números simples, y se escribe $5 \cdot 3\, abcd$ para el producto, o sea $15abcd$, porque 5 por 3 es tanto como 15.

Del mismo modo, si se tiene que multiplicar $12pqr$ por $7xy$, entonces uno obtiene $12 \cdot 7\, pqrxy$, u $84pqrxy$.

CAPÍTULO 4

DE LA NATURALEZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS RESPECTO A SUS FACTORES

37.

Hemos notado que un producto está compuesto de dos o más números multiplicados. Estos números se llaman *factores* del producto.

Entonces, los factores del producto *abcd* son los números *a*, *b*, *c*, *d*.

38.

Si ahora se consideran todos los números enteros, con el enfoque a que puedan resultar de la multiplicación de dos o más números, pronto se descubrirá que algunos no pueden surgir de la multiplicación y, por lo tanto, no tienen factores, pero otros salen de dos y más números multiplicados, teniendo en consecuencia dos o más factores; asi:

4 es tanto como $2 \cdot 2$, además 6 es tanto como $2 \cdot 3$, y

8 es tanto como $2 \cdot 2 \cdot 2$, además 27 es tanto como $3 \cdot 3 \cdot 3$, y

10 es tanto como $2 \cdot 5$, etc.

39.

Por otro lado, los números

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., no pueden ser representados con factores en aquella forma, siempre y cuando no se acuda al apoyo del 1, y, por ejemplo, se represente 2 por $1 \cdot 2$. Pero, ya que el número no cambia multiplicado por l, el l no se considera entre los factores.

Ahora, todos aquellos números, que no pueden representarse por factores, como:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., se denominan números *simples* o números *primos*. En cambio, los números restantes, los que pueden representarse por factores, como:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, etc., se denominan números *compuestos*.

40.

Los números simples o primos merecen una consideración especial porque no pueden surgir de la multiplicación de dos o más números. En particular, es extraño que si se escriben en orden, como:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc., dentro de ello no se percibe ningún orden determinado, sino que los números avanzan brincando a veces más, y a veces menos.

Y hasta ahora no se ha podido encontrar ninguna ley, según la cual ellos prosiguen.

41

Todos los números compuestos, que pueden representarse por factores, surgen de los números primos anteriores, tal que todos los factores son números primos. Porque si cualquier factor no fuera un número primo, sino que estuviera compuesto, uno podría representarlo nuevamente por dos o más factores, que serían números primos. Entonces, si el número 30 se representa por $5 \cdot 6$, 6 no es un número primo, sino $2 \cdot 3$, y 30 puede representarse por $5 \cdot 2 \cdot 3$, o por $2 \cdot 3 \cdot 5$, donde todos los factores son primos.

42.

Si ahora se considera el modo en que se pueden representar todos los números compuestos por medio de números primos, se encuentra una gran diferencia, en que algunos tienen solo dos factores, otros tres o más. Entonces, como ya hemos visto, obtenemos

4	es	tanto	como	$2 \cdot 2$	6	es	tanto	como	$2 \cdot 3$
8	"	"	"	$2 \cdot 2 \cdot 2$	9	"	"	"	$3 \cdot 3$
10	"	"	"	$2 \cdot 5$	12	"	"	"	$2 \cdot 3 \cdot 2$
14	"	"	"	$2 \cdot 7$	15	"	"	"	$3 \cdot 5$
16	"	"	"	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$			etc.		

43.

De esto se puede entender cómo encontrar los factores simples de cualquier número.

Por ejemplo, dado el número 360, entonces primero se tendría $2 \cdot 180$ para él.

Pero ahora

180	es tanto como	$2 \cdot 90$	y
90	es tanto como	$2 \cdot 45$	y
45	es tanto como	$3 \cdot 15$	y finalmente
15	es tanto como	$3 \cdot 5$	

En consecuencia, el número 360 está representado por los siguientes factores simples:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5,$$

todos los números multiplicados, dan el número 360.

44.

De esto, pues, vemos que los números primos no se pueden dividir entre otros números, y que el modo más conveniente de encontrar los factores simples de los números compuestos es, buscando todos los números primos entre los cuales se puedan dividir los números. Pero aquí se usa la división, de la cual se explicarán las reglas en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5

DE LA DIVISIÓN CON MAGNITUDES SIMPLES

45.

Si un número se debe partir en 2, 3 o más partes iguales, esto se hace por división, que enseña determinar el valor de una de estas partes. Entonces, si se tiene que partir el número 12 en 3 partes iguales, se encuentra por división que dicha parte es 4.

En eso se usan ciertos nombres. El número que se debe partir se llama *dividendo* o *número a dividir*; el número de las partes se llama *divisor*. En cambio, el valor de una de las partes, que se encuentra por la división, usualmente se denomina *quotus* o *cociente*: por lo tanto, siguiendo el ejemplo dado es

12 el dividendo, o el número a dividir,
3 el divisor, y
4 el quotus, o cociente.

46.

Entonces, si se divide un número entre 2 o se corta en 2 partes iguales, una de estas partes, o sea el cociente, tiene que ser tomado dos veces, para dar justamente el número dado. Igualmente, si un número se divide entre 3, el cociente tomado 3 veces debe dar el mismo número; es más, siempre tiene que salir el dividendo si se multiplica el cociente por el divisor.

47.

Por eso, la división también se describe en la forma siguiente: por cociente se busca un número, que multiplicado por el divisor, da como resultado precisamente el número a dividir. Si por ejemplo se tiene que dividir 35 entre 5, entonces se busca un número que multiplicado por 5 de 35. Este número es 7 porque 5 por 7 es 35. Se acostumbra hacer uso de la siguiente manera de hablar: 5 en 35 lo tenemos 7 veces, porque 5 por 7 es 35.

48.

Así, uno se puede imaginar que el dividendo es un producto, del cual uno de los factores es igual al divisor, y que el otro factor indica el cociente. Entonces, si debo dividir 63 entre 7, estoy buscando un producto, del cual un factor es 7 y el otro tiene que ser de tal naturaleza que si se multiplica por este 7, saldrá exactamente 63. Tal es ahora $7 \cdot 9$, y por lo tanto 9 es el cociente, que surge cuando se divide 63 entre 7.

49.

Por eso, si de manera general, se divide el número ab entre a, el cociente es obviamente b, porque a multiplicado por b da el dividendo ab. De ahí está claro que si uno debe dividir ab entre b, el cociente será a. Entonces, generalmente, en todos los ejemplos de división, si se divide el dividendo entre el cociente, debe salir el divisor:

como 24 dividido entre 4 da 6, así tambien viceversa 24 dividido entre 6 da 4.

50.

Como ahora todo depende del hecho de que el dividendo se represente por dos factores, uno de los cuales es igual al divisor mientras el otro muestra el cociente, el siguiente ejemplo se entenderá fácilmente. Primero, el dividendo abc dividido entre a da bc, porque a multiplicado por bc resulta abc; igualmente si abc se divide entre b, sale ac; y abc dividido entre ac da b. Además, $12mn$ dividido entre $3m$ da $4n$, porque $3m$ multiplicado por $4n$, da $12mn$; pero si este número $12mn$ se dividiera entre 12, entonces saldría mn.

51.

Como cada número a puede ser expresado por la, o una a, es evidente que si uno debe dividir a, o sea la, entre l, entonces saldrá el mismo número a como el cociente. Por otro lado, si el mismo número a, o sea la, se divide entre a, el cociente será l.

52.

Pero no siempre sucede que el dividendo pueda considerarse como un producto de dos factores, del cual uno de los factores es igual al divisor, y en tales casos la división no puede lograrse de esta manera. Porque si yo por ejemplo debería dividir 24 entre 7, el número 7 no es ningún factor de 24, porque $7 \cdot 3$ es solo 21, y por lo tanto muy poco, mientras que $7 \cdot 4$ ya es 28, y por lo tanto es demasiado: pero se puede ver de esto que el cociente debe ser mayor que 3 y a la vez menor que 4. Por eso, para determinar el número exactamente, tenemos que aceptar la ayuda de un otro tipo de números, llamados *fracciones* o *quebrados*, que se tratarán en uno de los siguientes capítulos.

53.

Antes de haber visto las fracciones, uno se conforma con aceptar el número entero que se acerca más al cociente, pero determinando el resto que queda; entonces se dice 7 en 24, cabe 3 veces, pero el resto que sobra es 3, porque 3 veces 7 solamente da 21, y por lo tanto, es demasiado pequeño por 3. De la misma manera hay que ver los siguientes ejemplos:

6	34	5	porque el divisor es	6,
	30		el dividendo es	34,
	4		el cociente es	5,
			el resto es	4,
9	41	4	y aquí el divisor es	9,
	36		el dividendo es	41,
	5		el cociente es	4,
			el resto es	5.

En tales ejemplos donde hay un resto, debe tenerse en cuenta la siguiente regla.

54.

En primer lugar, si se multiplica el divisor por el cociente y al producto se le agrega el resto, entonces debe salir el dividendo; y de esta manera se acostumbra probar la división, para ver si los cálculos han sido correctos o no.

Así, en el primero de los dos últimos ejemplos, se multiplica $6 \cdot 5$, se obtiene 30, más el resto 4, sale justamente el dividendo 34.

También en el último ejemplo, si se multiplica el divisor 9 por el cociente 4 y al producto 36 se le suma el resto 5, se obtiene el dividendo 41.

55.

Al fin y al cabo, en vista de los signos *más* + y *menos* – también es necesario mencionar aquí que si $+ab$ se divide entre $+a$, el cociente será $+b$, lo cual es claro en sí mismo.

Si en cambio se divide $+ab$ entre $-a$, el cociente será $-b$ porque $-a$ multiplicado por $-b$ da $+ab$.

Además, si el dividendo es $-ab$, y se divide entre el divisor $+a$, el cociente será $-b$ porque $+a$ multiplicado por $-b$ da $-ab$, y este es el dividendo.

Finalmente, si el dividendo $-ab$ se divide entre el divisor $-a$, el cociente será $+b$, porque $-a$ multiplicado por $+b$ es $-ab$.

56.

Por lo tanto, en la división los signos + y – obedecen las mismas reglas que notamos anteriormente en la multiplicación, es decir:

+ entre + da +; + entre – da –; – entre + da –; – entre – da +;

o más breve, signos iguales dan *más*, signos desiguales dan *menos*.

57.

Por lo tanto, si se debe dividir $18pq$ entre $-3p$, el cociente será $-6q$;

además: $-30xy$ dividido entre $+6y$ da $-5x$

además: $-54abc$ dividido entre $-9b$ da $+6ac$, porque $-9b$ multiplicado por $+6ac$ da $-6\cdot 9abc$, o $-54abc$; con esto será suficiente para la división con magnitudes simples. Por eso queremos proceder a la explicación de las fracciones, después de haber expuesto algo de la naturaleza de los números con respecto a sus divisores.

CAPÍTULO 6

DE LAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS RESPECTO A SUS DIVISORES

58.

Como hemos visto que algunos números pueden dividirse entre ciertos divisores, pero otros no, para el conocimiento de los números es necesario, tomar nota de esta diferencia; hay que distinguir claramente entre los números que se pueden dividir entre algún divisor, y aquellos que no se puedan dividir entre ese divisor; en el último caso hay que tomar nota del resto que queda en la división. Con este fin vamos a considerar los divisores

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

etcétera.

59.

Primero vemos el divisor 2; los números que se pueden dividir entre él son los siguientes:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \text{etc.},$$

que siempre van aumentado por 2. Todos estos números se llaman *números pares*.

En cambio, los otros números

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \text{etc.},$$

que no pueden dividirse entre 2 sin que quede l en el resto, se denominan *números impares* y, siempre son uno mayor o menor que los números pares. Los números pares ahora se pueden plasmar en la expresión general $2a$, porque si a toma el valor de todos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., uno por uno, surgen todos los números pares. Por otro lado, todos los números impares están contenidos en la expresión $2a + 1$, porque $2a + 1$ es 1 más grande que el número par $2a$.

60.

En segundo lugar, sea el divisor 3; todos los números que se pueden dividir entre 3 son los siguientes:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, etc.,

los cuales pueden ser representado por la expresión $3a$. Porque $3a$, dividido entre 3, da a de cociente, sin resto; los números restantes, sin embargo, si son divididos entre 3, dejan 1 o 2 como resto, y por lo tanto son de dos tipos. Los que dejan 1 son los siguientes:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, etc.,

y están contenidos en la expresión $3a + 1$. El otro tipo que deja 2 son los siguientes:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, etc.,

los cuales están contenidos en la expresión $3a + 2$. Es decir, que todos los números están contenidos en la expresión $3a$, o en $3a + 1$, o en $3a + 2$.

61.

Además, si el divisor es 4, todos los números que se pueden dividir entre él son los siguientes:

4, 8, 12, 16, 20, 24, etc.,

los cuales siempre aumentan por 4 y están contenidos en la expresión $4a$. Sin embargo, los números restantes, que no se pueden dividir entre 4, o dejan l como resto y son 1 más grandes que aquellos, es decir:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, etc.,

los cuales están contenidos en la expresión $4a + 1$. O dejan como resto 2, es decir:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, etc.,

y están contenidos en la expresión $4a + 2$.

O finalmente queda 3 de resto, tales números son los siguientes:

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \text{etc.},$$

y están incluidos en la expresión $4a+3$, por lo que todos los números están contenidos en una de estas cuatro expresiones:

$$4a,\ \ 4a+1,\ \ 4a+2,\ \ 4a+3.$$

62.

Con el divisor 5 es lo mismo, ya que todos los números que se pueden dividir entre él están contenidos en la expresión $5a$; pero aquellos que no pueden dividirse entre 5 son:

$$5a+1,\ \ 5a+2,\ \ 5a+3,\ \ \text{o}\ \ 5a+4,$$

y así se puede continuar con todos los divisores mayores.

63.

Aquí conviene resumir lo que se había expuesto anteriormente sobre la descomposición de números en factores primos; cualquier número que tenga como factor

$$2,\ \ \text{o}\ \ 3,\ \ \text{o}\ \ 4,\ \ \text{o}\ \ 5,\ \ \text{o}\ \ 7,$$

u otro número, también puede dividirse entre ese factor. Por ejemplo, ya que

$$60\ \ \text{es tanto como:}\ \ 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5,$$

está claro que 60 se puede dividir entre 2, entre 3 y también entre 5.

64.

Ahora, en general, la expresión $abcd$ no solo se puede dividir entre a y b y c y d, sino también entre los siguientes divisores

$$ab,\ \ ac,\ \ ad,\ \ bc,\ \ bd,\ \ cd,\ \ \text{además también entre}$$

abc, *abd*, *acd*, *bcd* y finalmente también entre *abcd*, o sea entre sí.

Entonces, de la misma forma, 60, que es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, aparte de los números primos, también se puede dividir entre los números compuestos por dos números primos, es decir, 4, 6, 10, 15, además entre los que consisten de tres, o sea 12, 20, 30, y finalmente también entre 60, o sea entre sí.

65.

Entonces, si se ha representado cualquier número por sus factores primos, es muy fácil encontrar todos esos números, entre el cual es posible dividirlo. Porque primero solo hay que tomar los factores primos uno por uno, luego multiplicar respectivamente dos, tres, cuatro, y así sucesivamente, hasta llegar al mismo número dado.

66.

Sobre todo, debe notarse aquí que cada número puede dividirse entre l, así que cada número puede dividirse entre sí mismo; es decir, cada número tiene al menos dos divisores, es decir, l, y él mismo; los números que, aparte de estos dos divisores, no tienen otros, son precisamente aquellos qué anteriormente se habían llamado números *simples* o *primos*.

Por otro lado, todos los números compuestos tienen otros divisores además de 1 y ellos mismos, como se puede ver en la siguiente tabla, donde debajo de cada número se han puesto todos sus divisores.

Tabla

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 6 12	1 13	1 2 7 14	1 3 5 15	1 2 4 8 16	1 17	1 2 3 6 9 18	1 19	1 2 4 5 10 20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Finalmente, debe notarse que 0 puede verse como un número que puede dividirse entre todos los números posibles; porque si se debe dividir 0 entre cualquier número como a, el cociente siempre es 0, porque 0 veces a, o sea $0a$, es 0: porque debe tenerse en cuenta que cualquier número multiplicado por 0 no producirá nada.

CAPÍTULO 7

DE LAS FRACCIONES EN GENERAL

68.

Si un número como 7 no se puede dividir entre otro como 3, entonces esto solo se puede entender de tal manera que el cociente no se puede expresar como un número entero, pero de ninguna manera que sea imposible hacerse una idea del cociente.

Solo hay que imaginarse una línea de 7 pies de largo, así nadie va a dudar que sea posible cortar esta línea en 3 partes iguales, obteniendo así una idea del tamaño de tal parte.

69.

Ahora que tenemos un concepto claro del cociente que puede aparecer en tales casos, aunque no es un número entero, nos guían a un tipo especial de números, que se denominan *quebrados*, o *números quebrados*, o *fracciones*, o *números fraccionarios*.

Entonces, en el ejemplo anterior, donde 7 debe dividirse entre 3, tenemos un concepto claro del cociente que surge de él, y se acostumbra indicarlo de la forma $\frac{7}{3}$; donde el número 7 de arriba es el dividendo y el número 3 de abajo es el divisor.

70.

Entonces, si de manera general el número a se divide entre el número b, el cociente se indica con $\frac{a}{b}$, esta forma de escribir se llama *fracción*; por lo tanto, no hay mejor manera de entender tal fracción $\frac{a}{b}$ que decir que muestra el cociente que surge si el número superior se divide entre el número inferior. Además debe tenerse en cuenta que para todas esas fracciones, se acostumbra llamar *denominador* al número inferior, y *numerador* al número superior.

71.

En la fracción $\frac{7}{3}$, dada anteriormente, que se lee con las palabras *siete tercios*, 7 es el numerador y 3 el denominador. De la misma manera las siguientes fracciones se llaman

$\frac{2}{3}$ dos tercios	$\frac{3}{4}$ tres cuartos
$\frac{3}{8}$ tres octavos	$\frac{12}{100}$ doce centésimos

Por otro lado, la fracción $\frac{1}{2}$ se llama un *medio*, en vez de un “dosavo”, etc.; porque $\frac{1}{2}$ es en realidad el cociente que sale cuando se corta l en dos partes iguales, y cada una de esas mitades se llama un medio.

72.

Para conocer bien la naturaleza de las fracciones, consideramos primero el caso donde el número superior es igual al inferior, o sea, el numerador es igual al denominador, como $\frac{a}{a}$. Ya que con eso se indica el cociente que resulta si se divide *a* entre *a*, está claro que ese cociente justamente es 1. En consecuencia, la fracción $\frac{a}{a}$ es tanto como l, o un entero, por eso todas las siguientes fracciones,

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \text{etc.},$$

son iguales, y cada una de ellas es tanto como uno o un entero.

73.

Como cada fracción cuyo numerador es igual al denominador, tiene el valor de uno, todas las fracciones cuyo numerador es menor que su denominador, son menores que uno. Porque si debo dividir un número más pequeño entre uno más grande, sale menos que 1; si por ejemplo se corta un línea de 2 pies en 3 partes iguales, una parte será indudablemente menor que un pie, por lo tanto, obviamente, $\frac{2}{3}$ es menor que l, y esto es precisamente porque el numerador 2 es menor que el denominador 3.

74.

Por otro lado, si el numerador es mayor que el denominador, el valor de la fracción es mayor que uno. Así,

$\frac{3}{2}$ es más que l porque $\frac{3}{2}$ es tanto como $\frac{2}{2}$ más $\frac{1}{2}$. Pero ahora $\frac{2}{2}$ es tanto como l, en consecuencia, $\frac{3}{2}$ es tanto como $1\frac{1}{2}$, es decir, un entero y un medio. Igualmente,

$$\frac{4}{3} \text{ es tanto como } 1\frac{1}{3}, \text{ además } \frac{5}{3} \text{ es tanto como } 1\frac{2}{3}, \text{ y}$$

$$\frac{7}{3} \text{ es tanto como } 2\frac{1}{3}.$$

Y en general, en estos casos, solo se tiene que dividir el número superior entre el inferior y agregar una fracción al cociente, cuyo numerador es el resto, pero el denominador es el divisor. Así, para la fracción $\frac{43}{12}$ se divide 43 entre 12 y se obtiene el cociente 3 y el resto 7. Entonces $\frac{43}{12}$ es tanto como $3\frac{7}{12}$.

75.

De esto se puede ver cómo las fracciones cuyos numeradores son mayores que su denominador se pueden descomponer en dos partes, la primera de ellas es un número entero y la otra es una fracción, cuyo numerador es menor que su denominador. Por esta razón, tales fracciones, donde el numerador es mayor que el denominador, se denominan *fracciones impropias*, porque comprenden uno o más enteros en sí mismas. Por otro lado, las *fracciones propias* son aquellas cuyos numeradores son más pequeños que el denominador y cuyo valor es, por lo tanto, menor que uno, o menor que un entero.

76.

Se acostumbra imaginarse la naturaleza de las fracciones también de otra manera, la cual aclara el asunto bastante: si por ejemplo se considera la fracción $\frac{3}{4}$, está claro que ella es 3 veces mayor que $\frac{1}{4}$. Pero ahora el significado de la fracción $\frac{1}{4}$ consiste en ser el valor de una de las partes que surgen si se descompone 1 en 4 partes iguales. Por lo tanto, si se toman esas tres partes juntas, se obtiene el valor de la fracción $\frac{3}{4}$.

Del mismo modo, se puede considerar cualquier otra fracción, como $\frac{7}{12}$: si se corta l en 12 partes iguales, 7 de estas partes conforman el valor de la fracción presentada.

77.

De esta idea también surgieron los nombres de *numerador* y *denominador* mencionados anteriormente. Ya que en la fracción anterior $\frac{7}{12}$, el número inferior 12 indica que l debe dividirse en 12 partes iguales y, por lo tanto, denomina estas partes, el mismo merecidamente también se llama *denominador*.

Sin embargo, dado que el número superior, es decir, el 7, indica que 7 de esas partes deben tomarse juntas para obtener el valor de la fracción y, por lo tanto, las numera, por así decirlo, el número superior se llama *numerador*.

78.

Ahora consideramos las fracciones con numerador 1, que son básicas para las otras, ya que uno entiende fácilmente lo que son $\frac{3}{4}$, si uno sabe lo que es $\frac{1}{4}$; entonces, tales fracciones son las siguientes:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{13},\ \text{etc.}$$

Aquí hay que darse cuenta que estas fracciones son cada vez más pequeñas; porque, mientras en más partes se corta un entero, más pequeñas se vuelven las partes, así $\frac{1}{100}$ es más pequeño que $\frac{1}{10}$; y $\frac{1}{1000}$ es más pequeño que $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ es menor que $\frac{1}{1000}$; y $\frac{1}{100000}$ es menor que $\frac{1}{10000}$.

79.

De esto se puede ver que cuanto más se aumenta el denominador en tales fracciones, más pequeño debe ser el valor de la fracción. Esto plantea la pregunta que si no se puede tomar el denominador tan grande que la fracción desaparezca por completo y se convierte en nada. Pero esto se niega con razón, pues en cuantas partes iguales se parta un entero, por ejemplo la longitud de un pie, las partes siempre mantendrán cierta magnitud, y, por lo tanto, no se reducen a nada.

80.

Es cierto que si se parte la longitud de un pie en más de 1000 partes iguales, las partes casi se escapan de la vista. Sin embargo, tan pronto como se miran a través de un buen microscopio, parecen tan grandes que se pueden dividir fácilmente de nuevo, en 100 y aún más partecitas.

Aquí, sin embargo, no se trata de lo que podemos hacer, o de lo que realmente se puede alcanzar, y de lo que todavía sea visible, sino de lo que es posible en principio. Y ahí, de hecho, es seguro que por más grande que uno quisiera que fuera el denominador, la fracción no desaparecería por completo, o se convertiría en nada, o sea en 0.

81.

Ya que por mucho que se aumente el denominador, nunca se llega completamente a nada, sino que estas fracciones aún conservan cierto tamaño, y ya que la serie de fracciones establecida anteriormente puede continuar sin fin, se acostumbra decir que el denominador debería ser infinitamente grande, para que la fracción finalmente se convierta en 0, o sea nada. La palabra *infinito* quiere decir aquí que uno nunca llega a un fin con las fracciones dadas.

82.

Para representar este concepto, que, de hecho, está bien fundamentado, se usa el signo ∞, que indica un número infinitamente grande: y así se puede decir que la fracción $\frac{1}{\infty}$ verdaderamente es nada, precisamente porque tal fracción nunca podrá llegar a ser nada mientras el denominador no haya aumentado infinitamente.

83.

Este concepto del infinito debe considerarse con más cuidado, porque se ha derivado de los primeros fundamentos de nuestro conocimiento y será de la mayor importancia en lo siguiente. Ya aquí se pueden sacar bellas conclusiones, que merecen nuestra atención, porque la fracción $\frac{1}{\infty}$ indica el cociente que sale si se divide el dividendo l entre el divisor ∞. Ahora ya sabemos que si se divide el dividendo l entre el cociente, que es $\frac{1}{\infty}$, o sea 0 como vimos, entonces sale el divisor ∞; por lo tanto, obtenemos un nuevo concepto del infinito: el mismo sale si se divide 1 entre 0; por lo tanto, se puede decir con razón que l dividido entre 0 da un número infinitamente grande, o sea ∞.

84

Aquí es necesario eliminar un error bastante común, en el que muchos afirman que algo infinitamente grande no se puede aumentar más. Pero esto no puede perdurar con las razones correctas anteriores.

Porque como $\frac{1}{0}$ indica un número infinitamente grande, y $\frac{2}{0}$ es indudablemente el doble de grande; por lo tanto, está claro que incluso un número infinitamente grande podría llegar a ser 2 veces mayor.

CAPÍTULO 8

DE LAS PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

85.

Como vimos anteriormente, que cada una de estas fracciones,

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \text{etcétera},$$

da un entero y, en consecuencia, todas son iguales; de la misma manera las siguientes fracciones

$$\frac{2}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{6}{3},\ \frac{8}{4},\ \frac{10}{5},\ \frac{12}{6},\ \text{etc.},$$

son iguales, porque cada una de ellas da dos enteros, ya que el numerador de cada una dividido entre su denominador da 2. Asimismo, todas las fracciones

$$\frac{3}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{9}{3},\ \frac{12}{4},\ \frac{15}{5},\ \frac{18}{6},\ \text{etc.},$$

son iguales, porque el valor de cada una es 3.

86.

De la misma forma, el valor de cualquier fracción se puede representar de infinitas maneras. Porque si se multiplica tanto el numerador como el denominador de una fracción por el mismo número, que puede tomarse arbitrariamente, la fracción siempre conserva el mismo valor. Así, todas estas fracciones

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{14},\ \frac{8}{16},\ \frac{9}{18},\ \frac{10}{20},\ \text{etc.},$$

son iguales, y cada una es tanto como $\frac{1}{2}$. Del mismo modo, todos estas fracciones

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{9},\ \frac{4}{12},\ \frac{5}{15},\ \frac{6}{18},\ \frac{7}{21},\ \frac{8}{24},\ \frac{9}{27},\ \frac{10}{30},\ \text{etc.},$$

son iguales, y cada una es tanto como $\frac{1}{3}$. Además, también estas

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{6},\ \frac{6}{9},\ \frac{8}{12},\ \frac{10}{15},\ \frac{12}{18},\ \frac{14}{21},\ \frac{16}{24},\ \text{etc.},$$

son iguales; es por eso que, de manera general, la fracción $\frac{a}{b}$ y se puede representar de las siguientes maneras

$$\frac{a}{b},\ \frac{2a}{2b},\ \frac{3a}{3b},\ \frac{4a}{4b},\ \frac{5a}{5b},\ \frac{6a}{6b},\ \text{etc.},$$

cada uno de las cuales es tan grande como la primera, $\frac{a}{b}$.

87.

Para demostrar esto, solamente representamos el valor de la fracción $\frac{a}{b}$ con una letra especial, como c, de tal manera que c sea el cociente si se divide a entre b. Pero ahora se había demostrado que si uno multiplica el cociente c por el divisor b, debe salir el dividendo.

Como c multiplicada por b da a, entonces c multiplicada por $2b$ dará $2a$, y c multiplicada por $3b$ dará $3a$; y así, en general, c multiplicada por mb tiene que dar ma.

Si esto se vuelve a convertir en un ejemplo de división, y se divide el producto ma entre el factor mb, entonces el cociente tiene que ser igual al otro factor c: pero ahora ma dividido entre mb da la fracción $\frac{ma}{mb}$, cuyo valor es por lo tanto c. Pero dado que c es igual al valor de la fracción $\frac{a}{b}$, es evidente que la fracción $\frac{ma}{mb}$ es igual a la fracción $\frac{a}{b}$, uno puede poner cualquier número en lugar de m.

88.

Ahora, dado que cada fracción puede representarse en un número infinito de formas, cada una de las cuales contiene el mismo valor, es indiscutible que la más fácil de entender es la que consiste de los números más pequeños; así, en lugar de $\frac{2}{3}$ se podría plantear arbitrariamente cada una de las siguientes fracciones: $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, etc.; pero nadie dudará que la forma $\frac{2}{3}$ es la más fácil de entender de todas. Aquí aparece la pregunta de cómo transformar una fracción, que no esté expresada por los números más pequeños, como por ejemplo $\frac{8}{12}$, en su forma más pequeña, es decir, en $\frac{2}{3}$.

89.

Esta pregunta será fácil de responder si se toma en cuenta que cada fracción mantiene su valor, si tanto su numerador como su denominador se multiplican por el mismo número. Eso implica que si se divide el numerador y el denominador de una fracción entre el mismo número, la fracción siempre se queda con el mismo valor. Esto se puede ver aún más fácil en la forma general, $\frac{na}{nb}$. Porque si se divide tanto el numerador na como el denominador nb entre el número n, se obtendrá la fracción $\frac{a}{b}$, que es la misma, como se ha demostrado arriba.

90.

Para convertir una fracción dada en su forma más pequeña, se tienen que encontrar tales números, entre los que, tanto el numerador como el denominador, puedan dividirse. Un tal número ahora se le llama *común divisor*, y mientras se pueda encontrar un común divisor entre el numerador y el denominador, la fracción se puede reducir a una forma más pequeña; pero si no existe ningún común divisor, excepto 1, la fracción ya está convertida en su forma más pequeña.

91.

Para explicar esto, vamos a considerar la fracción $\frac{48}{120}$. Aquí se puede ver de inmediato que el numerador y el denominador se pueden dividir entre 2, de ahí sale la fracción $\frac{24}{60}$. Estos dos ahora se pueden dividir nuevamente entre 2, y la división da la fracción $\frac{12}{30}$, donde 2 otra vez es común divisor y resultan $\frac{6}{15}$. Pero aquí está claro que el numerador y el denominador se pueden dividir entre 3, de donde sale la fracción $\frac{2}{5}$, que es igual a la dada, y está en la forma más pequeña porque los números 2 y 5 no tienen un común divisor que no sea 1, pero por lo cual los números no se hacen más pequeños.

92.

Esta propiedad de las fracciones, que si se multiplican o dividen, tanto el numerador como el denominador por el mismo número, el valor de la fracción no cambia, es de suma importancia y generalmente en ella se basa toda la teoría de las fracciones. Por ejemplo, no se pueden sumar o restar dos fracciones adecuadamente, antes de convertirlas en otras formas, cuyos denominadores sean iguales. De eso trataremos en el siguiente capítulo.

93.

Aquí solo queremos señalar, además, que todos los números enteros también se pueden presentar en forma de fracción. Así, por ejemplo, 6 es tanto como $\frac{6}{1}$, porque 6 dividido entre l también da 6. Y de ahí además surgen las siguientes formas:

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{etc.},$$

las cuales tienen el mismo valor, 6.

CAPÍTULO 9

DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE LAS FRACCIONES

94.

Si las fracciones tienen el mismo denominador, no tiene dificultad sumarlos o restarlos, ya que $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ es tanto como $\frac{5}{7}$, y $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ es tanto como $\frac{2}{7}$. En este caso se efectúa la adición o sustracción solamente en los numeradores, y se escribe el común denominador debajo. Así,

$$\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100} \text{ es tanto como } \frac{9}{100};$$

$$\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50} \text{ es tanto como } \frac{36}{50}, \text{ o sea } \frac{18}{25};$$

$$\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20} \text{ es tanto como } \frac{16}{20}, \text{ o sea } \frac{4}{5};$$

asimismo también $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ da $\frac{3}{3}$, o sea l, que es un entero, y $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ da $\frac{0}{4}$, es decir nada, o sea 0.

95.

Pero si las fracciones no tienen el mismo denominador, siempre es posible transformarlas en otras del mismo valor, cuyos denominadores sean iguales. Entonces, si estas fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ están dadas, y se tienen que sumar, se debe considerar que $\frac{1}{2}$ es tanto como $\frac{3}{6}$, y $\frac{1}{3}$ es tanto como $\frac{2}{6}$; por lo tanto, en lugar de las fracciones anteriores tenemos $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, lo cual da $\frac{5}{6}$. Además $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ es como el anterior, pero con el signo *menos*, o sea $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$, lo cual da $\frac{1}{6}$. Además sean dadas las fracciones $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$. Ya que $\frac{3}{4}$ es tanto como $\frac{6}{8}$, ponemos en su lugar $\frac{6}{8}$, y $\frac{6}{8}+\frac{5}{8}$ da $\frac{11}{8}$, o sea $1\frac{3}{8}$. Si se pregunta cuánto dan $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ juntos, entonces se escribirá en su lugar $\frac{4}{12}$ más $\frac{3}{12}$, así resulta $\frac{7}{12}$.

96.

Si hay más de dos fracciones como: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, que deben transformarse para tener el mismo denominador, todo depende de encontrar un número que pueda dividirse entre todos estos denominadores. Ahora, uno de tales es 60, el que la hace de común denominador. Entonces, $\frac{1}{2}$ se reemplaza por $\frac{30}{60}$, $\frac{2}{3}$ se reemplaza por $\frac{40}{60}$, $\frac{3}{4}$ se reemplaza por $\frac{45}{60}$, $\frac{4}{5}$ se reemplaza por $\frac{48}{60}$, $\frac{5}{6}$ se reemplaza por $\frac{50}{60}$. Si ahora se deben sumar estas fracciones $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, entonces la suma de los numeradores da $\frac{213}{60}$, o sea 3 enteros y $\frac{33}{60}$, o sea $3\frac{11}{20}$.

97.

Ahora todo depende de convertir dos fracciones con denominadores distintos, en otros cuyos denominadores sean iguales. Para hacer esto de manera general, las fracciones dadas sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Ahora se multiplica la primera fracción arriba y abajo por d, se obtiene $\frac{ad}{bd}$, que es una fracción tan grande como $\frac{a}{b}$. La otra fracción se multiplica de la misma manera arriba y abajo por b, se obtiene en su lugar $\frac{bc}{bd}$, y así ahora los denominadores son iguales. La suma de ellas es $\frac{ad+bc}{bd}$, y su diferencia $\frac{ad-bc}{bd}$. Por lo tanto, si se dan las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{9}$, entonces en su lugar se obtienen $\frac{45}{72}$ y $\frac{56}{72}$, cuya suma es $\frac{101}{72}$, en cambio su diferencia es $\frac{11}{72}$.

98.

Aquí frecuentemente surge la pregunta, ¿cuál de las dos fracciones dadas es más grande o más pequeña que la otra? Por ejemplo, ¿cuál de estas dos fracciones, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$, es la más grande? Para este fin, basta convertir las dos fracciones para que tengan el mismo denominador, y se obtienen $\frac{14}{21}$ para la primera, y $\frac{15}{21}$ para la segunda, de donde es evidente que $\frac{5}{7}$ es mayor que $\frac{2}{3}$, con diferencia de $\frac{1}{21}$. Además, dadas las dos fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{8}$, se obtienen, en su lugar, las fracciones $\frac{24}{40}$ y $\frac{25}{40}$, de lo cual es evidente que $\frac{5}{8}$ es más que $\frac{3}{5}$, pero con diferencia de solo $\frac{1}{40}$.

99.

Si se debe restar una fracción de un número entero, como $\frac{2}{3}$ de 1, entonces se puede escribir $\frac{3}{3}$ en vez de 1, por lo que inmediatamente se ve que queda $\frac{1}{3}$. De la misma manera, restando $\frac{5}{12}$ de 1, quedan $\frac{7}{12}$. Pero si se debe restar

$\frac{3}{4}$ de 2, basta con escribir 1 más $\frac{4}{4}$ en lugar de 2, ya que entonces queda 1 más $\frac{1}{4}$. Por cierto, es sabido que si se tiene que sumar una fracción a un número entero, simplemente se escribe después del mismo; así $\frac{2}{3}$ sumado a 6, da $6\frac{2}{3}$.

100.

A veces también sucede que 2 o más fracciones sumadas forman más de un entero, lo que entonces se debe tomar en cuenta: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, o sea $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$, que da $\frac{17}{12}$, lo cual es tanto como $1\frac{5}{12}$. De la misma manera, si se deben sumar varios números enteros y fracciones, primero se suman las fracciones y si su suma contiene 1 o más enteros, estos después se le suman a los números enteros. Por ejemplo, si hay que sumar $3\frac{1}{2}$ y $2\frac{2}{3}$, entonces $\frac{3}{6}$ más $\frac{4}{6}$ obviamente da $\frac{7}{6}$, o sea $1\frac{1}{6}$, lo que junto con los enteros da 6 y $\frac{1}{6}$.

CAPÍTULO 10

DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

101.

Si una fracción se debe multiplicar por un número entero, solo se multiplica el numerador y se deja el denominador sin cambios; entonces

2 veces $\frac{1}{2}$ da $\frac{2}{2}$, o sea un entero;

2 veces $\frac{1}{3}$ da $\frac{2}{3}$; además, 3 veces $\frac{1}{6}$ da $\frac{3}{6}$, o sea $\frac{1}{2}$

4 veces $\frac{5}{12}$ da $\frac{20}{12}$, o sea 1 más $\frac{8}{12}$, o sea $1\frac{2}{3}$.

De esto se concluye la regla de que una fracción se multiplica por un número entero, multiplicando el numerador por él; o dividiendo el denominador entre el número entero, esto último, si es viable, abrevia el cálculo. Por ejemplo, se debe multiplicar $\frac{8}{9}$ por 3, entonces, si se multiplica el numerador por el número entero resulta $\frac{24}{9}$, que es tanto como $\frac{8}{3}$; pero si dejo el numerador sin cambios y divido el denominador 9 entre 3, también obtengo $\frac{8}{3}$; esto es 2 más $\frac{2}{3}$. Asimismo, $\frac{13}{24}$ multiplicado por 6 da $\frac{13}{4}$, o $3\frac{1}{4}$.

102.

En general, pues, si se debe multiplicar una fracción $\frac{a}{b}$ por c, se obtiene $\frac{ac}{b}$. Cabe señalar que si el número entero es justamente igual al denominador, entonces el producto es el numerador, es decir:

$\frac{1}{2}$ tomado dos veces da 1;
$\frac{2}{3}$ multiplicado por 3 da 2;
$\frac{3}{4}$ multiplicado por 4 da 3;

y, en general, si la fracción $\frac{a}{b}$ se multiplica por el número b, el producto es a, cuya razón ya se ha mostrado arriba; dado que $\frac{a}{b}$ expresa el cociente al dividir el dividendo a entre el divisor b, y al mismo tiempo se ha demostrado que el cociente multiplicado por el divisor tiene que dar el dividendo, está claro que $\frac{a}{b}$ multiplicado por b tiene que dar el número a.

103.

Ahora que hemos mostrado cómo multiplicar una fracción por un entero; también tenemos que ver cómo dividir una fracción entre un número entero, antes de poder enseñar a multiplicar una fracción por una fracción. Pero está claro que si divido la fracción $\frac{2}{3}$ entre 2, saldrá $\frac{1}{3}$, como en el caso en que $\frac{6}{7}$ deben dividirse entre 3, saldrá $\frac{2}{7}$. De ahí es evidente que solo se tiene que dividir el numerador entre el número entero, ya que el denominador permanece sin cambios. Entonces:

$\frac{12}{25}$ dividido entre 2 da $\frac{6}{25}$, y

$\frac{12}{25}$ dividido entre 3 da $\frac{4}{25}$, y

$\frac{12}{25}$ dividido entre 4 da $\frac{3}{25}$, etcétera.

104.

El asunto, pues, no alberga dificultades, siempre y cuando el numerador se pueda dividir entre el número dado; pero si este no es el caso, se debe tener en cuenta que la fracción se puede cambiar a un número infinito de otras formas, entre las cuales seguramente se tienen que encontrar tales, cuyo numerador pueda dividirse entre el número dado. Por ejemplo, si debe dividirse $\frac{3}{4}$ entre 2, entonces, si convertimos esta fracción en $\frac{6}{8}$, dividido entre 2 da $\frac{3}{8}$.

De manera general, si la fracción $\frac{a}{b}$ se tiene que dividir entre c, uno la transforma en $\frac{ac}{bc}$, cuyo numerador ac dividido entre c da a, entonces el cociente que estamos buscando es $\frac{a}{bc}$.

105.

De ello vemos que si una fracción, como $\frac{a}{b}$, se divide entre un número entero c, uno solo tiene que multiplicar el denominador b por este número entero y dejar el numerador sin cambios. Por ejemplo, $\frac{5}{8}$ dividido entre 3 da $\frac{5}{24}$, y $\frac{9}{16}$ dividido entre 5 da $\frac{9}{80}$. Pero si el numerador mismo se puede dividir entre un número entero, el cálculo se vuelve más fácil. Así $\frac{9}{16}$ dividido entre 3 da $\frac{3}{16}$. Pero de aquella manera da $\frac{9}{48}$. Sin embargo, esta fracción es tanto como aquella, $\frac{3}{16}$. Porque 3 por 3 es 9, y 3 por 16 es 48.

106.

Ahora podemos demostrar cómo tiene que multiplicarse una fracción $\frac{a}{b}$ por otra fracción $\frac{c}{d}$. Solo hay que tener en cuenta que $\frac{c}{d}$ es tanto como c dividido entre d; y, por lo tanto, solo es necesario multiplicar primero la fracción $\frac{a}{b}$ por c, resultando $\frac{ac}{b}$, luego dividir entre d, que da $\frac{ac}{bd}$. De ello surge la regla de que para multiplicar dos fracciones, solo se necesita primero multiplicar los numeradores y luego multiplicar los denominadores. Así:

$\frac{1}{2}$ multiplicado por $\frac{2}{3}$ da $\frac{2}{6}$, o sea $\frac{1}{3}$; además
$\frac{2}{3}$ multiplicado por $\frac{4}{5}$ da $\frac{8}{15}$; y
$\frac{3}{4}$ multiplicado por $\frac{5}{12}$ da $\frac{15}{48}$, o sea $\frac{5}{16}$, etc.

107.

Ahora queda por demostrar cómo se debe dividir una fracción entre otra fracción; en primer lugar, se tiene que tomar en cuenta que, si las fracciones tienen el mismo denominador, la división solo se realiza en los numeradores: porque, por ejemplo, $\frac{3}{12}$ cabe en $\frac{9}{12}$ tantas veces como 3 en 9, es decir, 3 veces. Por eso, si se debe dividir $\frac{8}{12}$ entre $\frac{9}{12}$, solo es necesario dividir 8 entre 9, que da $\frac{8}{9}$. Además, $\frac{6}{20}$ cabe 3 veces en $\frac{18}{20}$, $\frac{7}{100}$ cabe 7 veces en $\frac{49}{100}$; $\frac{6}{25}$ entre $\frac{7}{25}$ da $\frac{6}{7}$; del mismo modo, $\frac{3}{7}$ entre $\frac{4}{7}$ son $\frac{3}{4}$.

108.

Pero si las fracciones no tienen el mismo denominador, entonces uno sabe cómo transformarlas para que tengan el mismo denominador. Por ejemplo, uno debe dividir la fracción $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, entonces se transforman las fracciones para que tengan denominadores iguales, así que hay que dividir la fracción $\frac{ad}{bd}$ entre $\frac{bc}{bd}$, que es lo mismo que dividir el primer numerador, es decir *ad*, entre el segundo, o sea *bc*. En consecuencia, el cociente buscado es $\frac{ad}{bc}$.

De ello surge la siguiente regla: hay que multiplicar el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, luego, el primer producto es el numerador del cociente, y el segundo producto su denominador.

109.

Entonces, si se tiene que dividir $\frac{5}{8}$ entre $\frac{2}{3}$, la regla nos da el cociente $\frac{15}{16}$. Si, además, hay que dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{1}{2}$, se obtiene $\frac{6}{4}$, o sea $\frac{3}{2}$, esto es 1 más $\frac{1}{2}$. Además, si se debe dividir la fracción $\frac{25}{48}$ entre $\frac{5}{6}$, resulta $\frac{150}{240}$, o sea $\frac{5}{8}$.

110.

Se acostumbra plantear esta regla de la división de manera más cómoda en la forma que sigue. Se le da vuelta a la fracción entre la cual hay que dividir, escribiendo su denominador arriba, y su numerador abajo. Luego se multiplica la fracción que se tiene que dividir, por la fracción invertida, así se obtiene el cociente buscado. Así, $\frac{3}{4}$ dividido entre $\frac{1}{2}$, es igual a $\frac{3}{4}$ multiplicado por $\frac{2}{1}$, de ahí sale $\frac{6}{4}$, o sea $1\frac{1}{2}$. También, $\frac{5}{8}$ dividido entre $\frac{2}{3}$, es igual a $\frac{5}{8}$ multiplicado por $\frac{3}{2}$, de ahí sale $\frac{15}{16}$. Además, $\frac{25}{48}$ dividido entre $\frac{5}{6}$, es igual a $\frac{25}{48}$ multiplicado por $\frac{6}{5}$, eso es $\frac{150}{240}$ o sea $\frac{5}{8}$.

Así se ve, en general, que dividir entre la fracción $\frac{1}{2}$ es lo mismo que multiplicar por $\frac{2}{1}$, o sea por 2; y dividir entre $\frac{1}{3}$ es lo mismo que multiplicar por $\frac{3}{1}$, o sea por 3.

111.

Por eso, si hay que dividir el número 100 entre $\frac{1}{2}$, resulta 200; y 1000 dividido entre $\frac{1}{3}$ da 3000. Si, además, hay que dividir 1 entre $\frac{1}{1000}$, sale 1000; y 1 dividido entre $\frac{1}{100\,000}$ es 100 000; de ahí se entiende, que una división entre 0 tiene que dar infinitamente mucho; porque al dividir 1 entre la fracción pequeña $\frac{1}{1000\,000\,000}$, sale el número grande 1 000 000 000.

112.

Si una fracción se divide entre sí misma, se sobreentiende que el cociente será l, porque cada número dividido entre sí mismo da 1: esto también lo muestra nuestra regla: si, por ejemplo, hay que dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{3}{4}$, entonces se multiplica $\frac{3}{4}$ por $\frac{4}{3}$, de ahí sale $\frac{12}{12}$, eso es 1. Y si se tiene que dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{a}{b}$, entonces se multiplica $\frac{a}{b}$ por $\frac{b}{a}$, resulta $\frac{ab}{ab}$, que es 1.

113.

Todavía nos queda explicar una forma de hablar, que se usa a menudo. Por ejemplo, se pregunta, ¿qué es la mitad de $\frac{3}{4}$? Eso quiere decir, que hay que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$. De la misma manera, si se pregunta cuánto son $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{8}$, entonces hay que multiplicar $\frac{5}{8}$ por $\frac{2}{3}$, ahí sale $\frac{10}{24}$. Y $\frac{3}{4}$ de $\frac{9}{16}$ es lo mismo que $\frac{9}{16}$ por $\frac{3}{4}$, y da $\frac{27}{64}$. Esto hay que tenerlo bien presente, ya que esta manera de hablar es tan frecuente.

114.

Finalmente, respecto a los signos + y –, hay que notar precisamente aquello que se había dicho arriba con los números enteros. Por lo tanto: $+\frac{1}{2}$ multiplicado por $-\frac{1}{3}$ da $-\frac{1}{6}$; y $-\frac{2}{3}$ por $-\frac{4}{5}$ da $+\frac{8}{15}$. Además, $-\frac{5}{8}$ dividido entre $+\frac{2}{3}$ da $-\frac{15}{16}$; y $-\frac{3}{4}$ dividido entre $-\frac{3}{4}$ da $+\frac{12}{12}$, o sea +1.

CAPÍTULO 11

DE LOS NÚMEROS CUADRADOS

115.

Si un número se multiplica por sí mismo, el producto se llama *cuadrado*, y el número del cual surge, se llama *raíz cuadrada*.

Por ejemplo, si 12 se multiplica por 12, el producto 144 es un número cuadrado, cuya raíz es el número 12.

La razón de esta denominación se ha tomado de la geometría, donde se encuentra el área de un cuadrado multiplicando su lado por sí mismo.

116.

Por lo tanto, todos los números cuadrados se encuentran por multiplicación, es decir, se multiplica la raíz por sí mismo.

Entonces, porque 1 multiplicado por 1 da 1, 1 es el cuadrado de 1.

Además, 4 es el cuadrado del número 2; y 2 es la raíz cuadrada de 4.

Igualmente 9 es el cuadrado de 3, y 3 es la raíz cuadrada de 9. Ahora consideramos los cuadrados de los números naturales y ponemos la siguiente tabla, en la que se presentan los números o raíces en el primer renglón, y los cuadrados en el segundo renglón.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

En estos números cuadrados ordenados, notamos de inmediato una bonita propiedad, que consiste en que si se resta cada uno del siguiente, las diferencias evolucionan de la siguiente manera:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.,

es decir, siempre aumentan en dos, y representan todos los números impares en forma ordenada.

118.

Los cuadrados de las fracciones se encuentran de la misma manera, es decir, multiplicando una fracción por sí misma. Entonces, el cuadrado de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$,

de $\frac{1}{3}$ el cuadrado es $\frac{1}{9}$, de $\frac{2}{3}$ el cuadrado es $\frac{4}{9}$,

de $\frac{1}{4}$ el cuadrado es $\frac{1}{16}$, de $\frac{3}{4}$ el cuadrado es $\frac{9}{16}$, etc.

Para eso solo hay que dividir el cuadrado del numerador entre el cuadrado del denominador para obtener el cuadrado de la fracción. Así, $\frac{25}{64}$ es el cuadrado de $\frac{5}{8}$, y al revés, $\frac{5}{8}$ es la raíz de $\frac{25}{64}$.

119.

Si se desea encontrar el cuadrado de un número mixto, que consiste de un número entero y una fracción, basta con convertirlo en una sola fracción, y tomar su cuadrado. Entonces, para encontrar el cuadrado de $2\frac{1}{2}$, primero $2\frac{1}{2}$ es tanto como $\frac{5}{2}$, y consecuentemente el cuadrado es $\frac{25}{4}$ que es $6\frac{1}{4}$. Entonces $6\frac{1}{4}$ es el cuadrado de $2\frac{1}{2}$. De la misma manera, para encontrar el cuadrado de $3\frac{1}{4}$, hay que notar que $3\frac{1}{4}$ es tanto como $\frac{13}{4}$, cuyo cuadrado es $\frac{169}{16}$, que es 10 más $\frac{9}{16}$. Queremos considerar, por ejemplo, los cuadrados de 3 a 4 que aumentan en un cuarto:

Números	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Cuadrados	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

De lo cual se puede deducir fácilmente que si la raíz contiene una fracción, su cuadrado también siempre contiene una fracción. Entonces, si la raíz es $1\frac{5}{12}$, su cuadrado resulta $\frac{289}{144}$, que es $2\frac{1}{144}$, por lo tanto, solo un poco más grande que 2.

120.

De manera general, si la raíz es a, el cuadrado es aa: además, de la raíz $2a$ el cuadrado es $4aa$. De esto, se puede ver que si la raíz se toma dos veces, el cuadrado se volverá 4 veces más grande. Además, de la raíz $3a$ el cuadrado es $9aa$, y de la raíz $4a$ el cuadrado es $16aa$, etc. Pero si la raíz es ab, su cuadrado es $aabb$, y si abc es la raíz, su cuadrado es $aabbcc$.

121.

Por lo tanto, si la raíz consta de dos o más factores, se tienen que multiplicar sus cuadrados; y al revés, si el cuadrado consiste de dos o más factores, cada uno de los cuales es un cuadrado, entonces basta multiplicar las raíces. Por ejemplo, ya que 2304 es lo mismo que $4\cdot16\cdot36$, entonces su raíz cuadrada es $2\cdot4\cdot6$, o sea 48, y de hecho 48 es la raíz cuadrada de 2304 porque $48\cdot48$ es tanto como 2304.

122.

Ahora consideramos también los signos *más* y *menos*, y como están relacionados con los cuadrados. Está claro de inmediato que si la raíz tiene el signo +, o sea es un número positivo, como lo hemos considerado hasta ahora, su cuadrado también debe ser un número positivo porque +

multiplicado por + da +. Entonces el cuadrado de $+a$ será $+aa$. Pero si la raíz es un número negativo como $-a$, entonces su cuadrado será $+aa$, como si la raíz fuera $+a$; por lo tanto, $+aa$ es el cuadrado de $+a$, así como de $-a$; y por lo tanto se pueden indicar dos raíces cuadradas de cada cuadrado, una positiva y otra negativa. Entonces, la raíz cuadrada de 25 es $+5$ y también -5, porque $+5$ multiplicado por $+5$, y también -5 multiplicado por -5 dan $+25$.

CAPÍTULO 12

DE LAS RAÍCES CUADRADAS Y LOS NÚMEROS IRRACIONALES RESULTANTES

123.

Por lo anterior está claro que la raíz cuadrada de un número dado no es más que un número cuyo cuadrado es igual al número dado. Entonces la raíz cuadrada de 4 es 2, de 9 es 3, de 16 es 4, etc. En esto hay que tomar nota que a estas raíces se les puede poner tanto el signo más como el signo menos. Entonces, del número 25, la raíz cuadrada es tanto $+5$ como -5, porque -5 multiplicado por -5 da $+25$, igual que $+5$ multiplicado por $+5$.

124.

Por lo tanto, si el número dado es un cuadrado que se encuentra entre los números cuadrados que uno tenga en la memoria, es fácil encontrar la raíz cuadrada: p. ej., si el número dado fuera 196, uno sabe que la raíz cuadrada es 14. Con las fracciones tampoco es más difícil, y de lo anterior está claro que la raíz cuadrada de la fracción $\frac{25}{49}$ es $\frac{5}{7}$, porque uno solo tiene que sacar la raíz cuadrada del numerador y del denominador. Si el número dado es un número mixto como $12\frac{1}{4}$, entonces hay que convertirlo en una fracción, o sea en $\frac{49}{4}$, cuya raíz cuadrada obviamente es $\frac{7}{2}$, o sea $3\frac{1}{2}$, y esto, por lo tanto, es la raíz cuadrada de $12\frac{1}{4}$.

125.

Pero si el número dado no es un cuadrado, como por ejemplo 12, entonces tampoco es posible encontrar la raíz cuadrada del mismo, es decir, encontrar o presentar un número que, multiplicado por sí mismo, dé justamente 12. Pero sí sabemos, que la raíz cuadrada de 12 es mayor que 3, porque $3 \cdot 3$ solo da 9, pero menor que 4, porque $4 \cdot 4$ ya da 16. Incluso, sabemos que debe ser más pequeño que $3\frac{1}{2}$, porque el cuadrado de $3\frac{1}{2}$ es más de 12, ya que $3\frac{1}{2}$ son $\frac{7}{2}$ y su cuadrado es $\frac{49}{4}$ o $12\frac{1}{4}$. Hasta podemos determinar esta raíz con más precisión tomando $3\frac{7}{15}$, porque el cuadrado de $3\frac{7}{15}$, o sea $\frac{52}{15}$, es $\frac{2704}{225}$. Por lo tanto, $3\frac{7}{15}$ es un poco demasiado grande, porque $\frac{2704}{225}$ es $\frac{4}{225}$ más que 12.

126.

Debido a que $3\frac{1}{2}$ y también $3\frac{7}{15}$ son un poco más grandes que la raíz cuadrada de 12, uno podría pensar que si a 3 se agrega, en lugar de $\frac{7}{15}$, una fracción ligeramente más pequeña, el cuadrado podría convertirse exactamente en 12.

Entonces tomemos $3\frac{3}{7}$, porque $\frac{3}{7}$ es un poco más pequeño que $\frac{7}{15}$. Ahora $3\frac{3}{7}$ es tanto como $\frac{24}{7}$, cuyo cuadrado $\frac{576}{49}$, y por lo tanto es más pequeño que 12. Porque 12 es $\frac{588}{49}$, entonces $\frac{576}{49}$ todavía tiene $\frac{12}{49}$ de menos. De esto vemos que $3\frac{3}{7}$ es demasiado pequeño, pero $3\frac{7}{15}$ es demasiado grande. Por lo tanto, se podría suponer $3\frac{5}{11}$, porque $\frac{5}{11}$ es mayor que $\frac{3}{7}$ y aún menor que $\frac{7}{15}$. Dado que $3\frac{5}{11}$, convertido en una fracción, es $\frac{38}{11}$, su cuadrado es $\frac{1444}{121}$. Pero 12, convertido en una fracción con ese denominador, es $\frac{1452}{121}$, de donde es evidente que $3\frac{5}{11}$ todavía es demasiado pequeño, faltando solamente $\frac{8}{121}$. Si uno quisiera plantear que la raíz sería $3\frac{6}{13}$, ya que $\frac{6}{13}$ es un poco más grande que $\frac{5}{11}$, su cuadrado sería $\frac{2025}{169}$; pero 12, convertido en una fracción con ese denominador, es $\frac{2028}{169}$. Por lo tanto $3\frac{6}{13}$ todavía es demasiado pequeño, pero solo por $\frac{3}{169}$, mientras que $3\frac{7}{15}$ es demasiado grande.

127.

Sin embargo, es fácil entender que cualquiera que sea la fracción que queramos agregar a 3, el cuadrado siempre debe contener una fracción y, por lo tanto, nunca puede ser exactamente 12. Así, a pesar de que sabemos que la raíz cuadrada de 12 es mayor que $3\frac{6}{13}$, pero menor que $3\frac{7}{15}$, debemos confesar que no es posible encontrar una fracción entre estas dos fracciones, que sumada a 3, exprese exactamente la raíz cuadrada de 12. A la vez, no se puede decir que en principio la raíz cuadrada de 12 sea indefinida, porque lo expuesto solo implica que ella no se puede expresar por medio de fracciones, independientemente de que necesariamente tenga cierta magnitud.

128.

Esto nos lleva a un nuevo tipo de números, que de ninguna manera pueden expresarse como fracciones y que, sin embargo, tienen una cierta magnitud, como vimos en la raíz cuadrada del número 12. Los números de este nuevo tipo se llaman *números irracionales*, y surgen siempre cuando uno tiene que buscar la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado. Entonces, como 2 no es un cuadrado, la raíz cuadrada de 2, o el número que multiplicado por sí mismo da exactamente 2, también es un número irracional. A veces, estos números también se llaman *números sordos*.

129.

Independientemente del hecho de que tales números irracionales no pueden ser representados por ninguna fracción, sí tenemos un concepto claro de su magnitud. Porque, por ejemplo, la raíz cuadrada de 12 todavía puede parecer tan oculta, pero sabemos que es un número que multiplicado por sí mismo da 12. Y esta propiedad es suficiente para darnos un concepto claro de este número, especialmente porque podemos acercarnos cada vez más a su valor.

130.

Como ahora tenemos una idea suficiente de tales números irracionales, usamos un signo especifico para indicar la raíz cuadrada de dichos números que no son cuadrados. Este símbolo ahora tiene la forma: $\sqrt{\ }$, y se pronuncia con las palabras *raíz cuadrada*. Entonces $\sqrt{12}$ indica el número que, cuando se multiplica por sí mismo, da 12, o la raíz cuadrada de 12. Del mismo modo, $\sqrt{2}$ significa la raíz cuadrada de 2; $\sqrt{3}$ la raíz cuadrada de 3; además $\sqrt{\frac{2}{3}}$ la raíz cuadrada de $\frac{2}{3}$, y en general $\sqrt{a}$, indica la raíz cuadrada del número *a*. Siempre cuando uno tiene que indicar la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado, se usa el signo $\sqrt{\ }$ que está escrito delante del número. [*Nota del traductor: la última frase se refiere al signo* √ *usado en la edición de 1770.*]

131.

El concepto de estos números irracionales planteados anteriormente nos da de inmediato la manera de hacer los cálculos comunes con ellos. Debido a que la raíz cuadrada de 2 multiplicada por sí misma debe dar 2, sabemos que si $\sqrt{2}$ se multiplica por $\sqrt{2}$, resultará necesariamente 2; también $\sqrt{3}$ multiplicada por $\sqrt{3}$ da 3; y $\sqrt{5}$ por $\sqrt{5}$ da 5; igualmente $\sqrt{\frac{2}{3}}$ por $\sqrt{\frac{2}{3}}$ da $\frac{2}{3}$; y en general $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{a}$ da *a*.

132.

Pero si se tiene que multiplicar $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$, el producto es $\sqrt{ab}$, porque hemos demostrado anteriormente que si un cuadrado tiene factores, la raíz del mismo también resulta de las raíces de los factores. Por eso se encuentra la raíz cuadrada del producto *ab*, que es $\sqrt{ab}$, si se multiplica la raíz cuadrada de *a*, que es $\sqrt{a}$, por la raíz cuadrada de *b*, que es $\sqrt{b}$. De ahí está claro de inmediato que si *b* fuera igual a *a*, entonces $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{b}$ daría $\sqrt{aa}$. Pero ahora $\sqrt{aa}$ es obviamente *a* porque *aa* es el cuadrado de *a*.

133.

Igualmente, si se tiene que dividir $\sqrt{a}$ entre $\sqrt{b}$, entonces se obtiene $\sqrt{\frac{a}{b}}$, donde puede suceder que el cociente pierda la irracionalidad. Como cuando se tiene que dividir $\sqrt{18}$ entre $\sqrt{8}$, se obtiene $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Pero $\frac{18}{8}$ es igual a $\frac{9}{4}$, y la raíz cuadrada de $\frac{9}{4}$ es $\frac{3}{2}$.

134.

Si el número que se encuentra en el signo de raíz $\sqrt{}$ es un cuadrado, entonces la raíz se puede expresar en la forma habitual. Así, $\sqrt{4}$ es igual a 2; $\sqrt{9}$ es 3; $\sqrt{36}$ es 6; $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ es $\sqrt{\frac{49}{4}}$, o sea $\frac{7}{2}$, o sea $3\frac{1}{2}$. En estos casos, la irracionalidad solo es aparente y desaparece por sí sola.

135.

También es fácil multiplicar tales números irracionales por números comunes. Así, 2 veces $\sqrt{5}$ es tanto como $2\sqrt{5}$; y $\sqrt{2}$ multiplicada por 3 da $3\sqrt{2}$; pero, ya que 3 es tanto como $\sqrt{9}$, multiplicando $\sqrt{9}$ por $\sqrt{2}$ da la forma $\sqrt{18}$. De modo que $\sqrt{18}$ es tanto como $3\sqrt{2}$. Del mismo modo, $2\sqrt{a}$ es tanto como $\sqrt{4a}$, y $3\sqrt{a}$ es tanto como $\sqrt{9a}$. Y de manera general, $b\sqrt{a}$ es tanto como la raíz cuadrada de *bba* o $\sqrt{abb}$; de donde se puede ver que si el número en el signo de raíz contiene un cuadrado, la raíz del mismo se puede colocar delante del signo; como $b\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt{bba}$. Después de esto, las siguientes reducciones estarán claras:

$\sqrt{8}$,	o	$\sqrt{2\cdot 4}$	es tanto como	$2\sqrt{2}$,
$\sqrt{12}$,	"	$\sqrt{3\cdot 4}$	" " "	$2\sqrt{3}$,
$\sqrt{18}$,	"	$\sqrt{2\cdot 9}$	" " "	$3\sqrt{2}$,
$\sqrt{24}$,	"	$\sqrt{6\cdot 4}$	" " "	$2\sqrt{6}$,

$\sqrt{32}$, " $\sqrt{2 \cdot 16}$ " " " $4\sqrt{2}$,
$\sqrt{75}$, " $\sqrt{3 \cdot 25}$ " " " $5\sqrt{3}$, etcétera.

136.

Con respecto a la división tenemos: $\sqrt{a}$ dividida entre $\sqrt{b}$ da $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, es eso $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

De esta misma manera, $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ es tanto como $\sqrt{\frac{8}{2}}$, o sea $\sqrt{4}$, o sea 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ es $\sqrt{\frac{18}{2}}$, o sea $\sqrt{9}$, o sea 3.

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ es $\sqrt{\frac{12}{3}}$, o sea $\sqrt{4}$, o sea 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ es $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, o sea $\sqrt{\frac{4}{2}}$, o sea $\sqrt{2}$.

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ es $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, o sea $\sqrt{\frac{9}{3}}$, o sea $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ es $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, o sea $\sqrt{\frac{144}{6}}$, o $\sqrt{24}$, o $\sqrt{6 \cdot 4}$, eso es $2\sqrt{6}$

137.

No hay nada particularmente notable sobre la suma y la resta porque los números solo se conectan con *más* y *menos*. Como: $\sqrt{2}$ sumada a $\sqrt{3}$, da $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; y $\sqrt{3}$ restada de $\sqrt{5}$ da $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

138.

Finalmente, debe notarse que, a diferencia de estos llamados números irracionales, los números comunes suelen llamarse fracciones o *números racionales*.

Entonces, cuando se habla de números racionales, siempre se refiere solamente a números enteros o fracciones.

CAPÍTULO 13

DE LOS NÚMERO IMPOSIBLES O IMAGINARIOS RESULTANTES DE ESTA MISMA FUENTE

139.

Ya hemos visto arriba que los cuadrados de los números tanto positivos como negativos siempre son positivos, o salen con el signo más; porque multiplicando tanto $-a$ por $-a$ da $+aa$, como cuando se multiplica $+a$ por $+a$. Y por eso, en el capítulo anterior suponíamos que fuesen positivos todos los números de los cuales deberían sacarse las raíces cuadradas.

140.

Por lo tanto, si se tiene que sacar la raíz cuadrada de un número negativo, entonces uno realmente se encuentra en un gran apuro, porque no se puede dar un número cuyo cuadrado sea un número negativo. Por ejemplo, si se pide la raíz de -4, uno quiere tener un número que multiplicado por sí mismo dé -4. Ese número buscado por lo tanto ni es $+2$ ni -2, ya que tanto $+2$ como -2, multiplicados por sí mismos, dan $+4$, y no -4.

141.

De esto se puede ver que la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser un número positivo ni negativo, porque los cuadrados de todos los números negativos también se vuelven positivos, o sea obtienen el signo +; en consecuencia, la raíz requerida debe ser de un tipo muy especial de números, ya que no se pueden incluir ni a los números positivos ni a los negativos.

142.

Como ya se señaló anteriormente, los números positivos son todos mayores que nada, o sea 0; los números negativos, por otro lado, son todos más pequeños que nada, o sea 0; por lo tanto, todo lo que sea mayor que nada, se expresa por medio de números positivos; pero todo lo que sea más pequeño que nada, se expresa con números negativos: así vemos que las raíces cuadradas de los números negativos no son más grandes que nada, ni más pequeños que nada. Pero tampoco son nada, porque 0 multiplicado por 0 da 0 y, por lo tanto, no da un número negativo.

143.

Ya que todos los números que son posibles de imaginar, o son mayores o menores que 0, o el mismo 0; entonces está claro que las raíces cuadradas de números negativos no se pueden considerar parte de los números posibles: en consecuencia, tenemos que decir que son números imposibles. Y este hecho nos lleva al concepto de tales números, que por su naturaleza son imposibles, y comúnmente se llaman *números imaginarios*, o *números imaginados*, porque solo tienen lugar en la imaginación.

144.

Por lo tanto, todas estas expresiones $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc., representan números imposibles o imaginarios, porque indican raíces cuadradas de números negativos.

Así, de ellos se dice con mucha razón que no son ni más grandes ni más pequeños que nada; y ni siquiera nada, lo que es el motivo por el cual deben considerarse imposibles.

145.

Sin embargo, se presentan en nuestras mentes y tienen lugar en nuestra imaginación; por eso se llaman números solamente imaginados. Aunque estos números, como por ejemplo $\sqrt{-4}$, sean completamente imposibles por su naturaleza, sí tenemos un concepto suficiente, sabiendo que con ello se indica un número que multiplicado por sí mismo da -4; y este concepto es suficiente para tratar estos números adecuadamente en los cálculos.

146.

Ahora, lo que primero sabemos de tales números imposibles, como por ejemplo $\sqrt{-3}$, consiste en que su cuadrado, o el producto que resulta si se multiplica $\sqrt{-3}$ por $\sqrt{-3}$, da -3. También, $\sqrt{-1}$ multiplicada por $\sqrt{-1}$ es -1. Y, en general, si se multiplica $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-a}$, o toma el cuadrado de $\sqrt{-a}$, resulta $-a$.

147.

Como $-a$ es tanto como $+a$ multiplicado por -1, y la raíz cuadrada de un producto se encuentra multiplicando la raíz cuadrada de los factores, la raíz del producto a por -1, o sea $\sqrt{-a}$, es tanto como $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{-1}$. Pero ahora $\sqrt{a}$ es un número posible, y en consecuencia, lo imposible que aparezca siempre se puede reducir a $\sqrt{-1}$. Por esta razón, $\sqrt{-4}$ es tanto como $\sqrt{4}$ multiplicada por $\sqrt{-1}$; $\sqrt{4}$ es 2, por lo que $\sqrt{-4}$ es tanto como $2\sqrt{-1}$, y $\sqrt{-9}$ tanto como $\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$, eso es $3\sqrt{-1}$, y $\sqrt{-16}$ es tanto como $4\sqrt{-1}$.

148.

Ya que $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{b}$ da $\sqrt{ab}$, entonces $\sqrt{-2}$ multiplicada por $\sqrt{-3}$ da $\sqrt{6}$. Además, $\sqrt{-1}$ multiplicada por $\sqrt{-4}$ dará $\sqrt{4}$, eso es 2. De esto se puede ver, que dos números imposibles multiplicados dan un número posible o verdadero.

Pero si se multiplica $\sqrt{-3}$ por $\sqrt{+5}$, entonces se obtiene $\sqrt{-15}$. O sea, un número posible multiplicado por un número imposible, siempre da algo imposible.

149.

Con la división el asunto es el mismo. Ya que $\sqrt{a}$ dividida entre $\sqrt{b}$ da $\sqrt{\frac{a}{b}}$, entonces, $\sqrt{-4}$ dividida entre $\sqrt{-1}$ da $\sqrt{+4}$, y $\sqrt{+3}$ dividida entre $\sqrt{-3}$ da $\sqrt{-1}$. Además, 1 dividido entre $\sqrt{-1}$, da $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$, que es $\sqrt{-1}$; porque l es tanto como $\sqrt{+1}$.

150.

Ya que siempre se aplica la nota de arriba, que la raíz cuadrada de cualquier número siempre tiene un doble valor, es decir, puede ser tomada tanto negativa como positiva, como por ejemplo $\sqrt{4}$ que puede ser tanto $+2$ como -2, y, en general, para la raíz cuadrada de a se puede escribir tanto $+\sqrt{a}$ como $-\sqrt{a}$, entonces esto también es válido para los números imposibles; y la raíz cuadrada de $-a$ es tanto $+\sqrt{-a}$ como $-\sqrt{-a}$. Aquí hay que distinguir bien los signos + y – puestos delante del signo $\sqrt{\ }$, de aquellos que están dentro del signo $\sqrt{\ }$.

151.

Finalmente, aún queda despejar una duda, que consiste en que, tales números, siendo imposibles, tampoco parecen tener ningún beneficio, y se podría considerar esta teoría como un capricho raro. Pero, de hecho, esta teoría es de la mayor importancia, ya que a menudo surgen preguntas de las que no se puede saber de inmediato si son posibles o no. Si la resolución de estas conduce a tales números imposibles, es una señal segura de que la pregunta misma es imposible. Para ilustrar esto con un ejemplo, consideremos esta pregunta: uno debe cortar el número 12 en dos partes, cuyo producto es 40. Si se resuelve esta pregunta según las reglas [*tomo 2*], se encuentra para las dos partes $6+\sqrt{-4}$ y $6-\sqrt{-4}$, que por lo tanto son imposibles, y de esto se ve que la pregunta no puede ser resuelta. Pero si se quisiera cortar el número 12 en dos partes, tal que su producto fuera 35, entonces es obvio que estas partes serían 7 y 5

CAPÍTULO 14

DE LOS NÚMEROS CÚBICOS

152.

Si un número se multiplica tres veces por sí mismo, o si su cuadrado se multiplica nuevamente por el mismo número, el producto se llama *cubo* o *número cúbico*. Entonces, del número a el cubo es aaa, que surge si el número a se multiplica por sí mismo, es decir por a, y el cuadrado aa se multiplica nuevamente por el número a.

Entonces los cubos de los números naturales son los siguientes:

Números	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubos	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

153.

Si de estos números cúbicos consideramos las diferencias, como se hizo con los números cuadrados, restando cada uno del que sigue, obtenemos la siguiente serie de números, en la que todavía no notamos ninguna regla:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

pero si de estos números tomamos otra vez las diferencias, obtenemos la siguiente serie de números que obviamente siempre aumentan en 6; es decir:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

De esta forma también es fácil de encontrar los cubos de fracciones: así, el cubo de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{8}$, el de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{27}$, el de $\frac{2}{3}$ es $\frac{8}{27}$. Pues basta tomar los cubos del denominador y numerador por separado. Así, el cubo de la fracción $\frac{3}{4}$ será $\frac{27}{64}$.

155.

Si se tiene que encontrar el cubo de un número mixto, entonces este primero tiene que ser convertido en una fracción, ya que así el cálculo se efectúa fácilmente. Entonces va a ser fácil encontrar el cubo del número $1\frac{1}{2}$: ya que $1\frac{1}{2}$, convertido en una fracción, es $\frac{3}{2}$, y el cubo de $\frac{3}{2}$ será $\frac{27}{8}$, eso es 3 más $\frac{3}{8}$. De la misma manera, el cubo de $1\frac{1}{4}$, o sea $\frac{5}{4}$, es $\frac{125}{64}$, esto es 1 más $\frac{61}{64}$. Además, el cubo del número $3\frac{1}{4}$, o sea $\frac{13}{4}$, es $\frac{2197}{64}$, lo cual da $34\frac{21}{64}$.

156.

Ya que el cubo de un número *a* es *aaa*, entonces el cubo del número *ab* será *aaabbb*, de lo que se puede ver que si el número tiene dos o más factores, el cubo se encontrará multiplicando los cubos de todos los factores. Por lo tanto, por ejemplo, como 12 es tanto como $3 \cdot 4$, se multiplica el cubo de 3, que es 27, por el cubo de 4, que es 64, se obtiene 1728, y este es el cubo de 12. De ahí además esta claro, que el cubo de 2*a* es 8*aaa*, y por eso es 8 veces mas grande que el cubo de *a*; de la misma manera, el cubo de 3*a* es 27*aaa*, y por eso es 27 veces mas grande que el cubo de *a*.

157.

Si ahora consideramos también los signos + y –, está claro por sí mismo que de un número positivo $+a$ el cubo es $+aaa$ y, en consecuencia, también debe ser positivo. Pero si se tiene que tomar el cubo de un número negativo, como $-a$, primero tomese el cuadrado, que es $+aa$, y ese debe multiplicarse nuevamente por $-a$, así el cubo buscado será $-aaa$, en consecuencia también será negativo. Por lo tanto, el asunto con los cubos es muy distinto al de los cuadrados, que siempre resultan positivos. Entonces, el cubo de -1 es -1, el cubo de -2 es -8, el de -3 es -27, etcétera.

CAPÍTULO 15

DE LAS RAÍCES CÚBICAS Y LOS NÚMEROS IRRACIONALES RESULTANTES

158.

Ya que se ha expuesto cómo se debe encontrar el cubo de un número dado, también, al revés, dado un número, se puede encontrar aquel número, que, multiplicado por sí mismo tres veces, dé el número dado: y en vista de eso, se llama *raíz cúbica*. Entonces, la raíz cúbica de un número dado es un número cuyo cubo es igual al número dado.

159.

Si el número dado es realmente un número cúbico, como los que vimos en el capítulo anterior, es fácil encontrar la raíz cúbica. Entonces de l, la raíz cúbica es 1; de 8 es 2; de 27 es 3; de 64 es 4, etcétera.

Del mismo modo, de -27, la raíz cúbica es -3; de -125 es -5. También si el número es fraccionario, de $\frac{8}{27}$ la raíz cúbica es $\frac{2}{3}$, y de $\frac{64}{343}$ es $\frac{4}{7}$. Además, si es un número mixto como $2\frac{10}{27}$, que escrito en una fracción da $\frac{64}{27}$, entonces su raíz cúbica da $\frac{4}{3}$, eso es $1\frac{1}{3}$.

160.

Pero si el número dado no es un cubo realmente, entonces la raíz cúbica del mismo no puede expresarse ni con números enteros ni con números fraccionarios; entonces, dado que 43 no es un número cúbico, es imposible indicar un número, dentro de los números enteros o fraccionarios, cuyo cubo sea exactamente 43. Pero a estas alturas, ya sabemos que la raíz cúbica es mayor que 3 porque el cubo solo es 27, y aún más pequeño que 4 porque el cubo ya da 64. Por lo tanto, sabemos que la raíz cúbica requerida debe estar entre los números 3 y 4.

161.

Si uno quisiera agregar una fracción a 3, porque la raíz cúbica de 43 es mayor que 3, uno podría acercarse a la verdad, pero dado que su cubo siempre contendría una fracción, nunca podría ser exactamente 43. Por ejemplo, si se supone que la raíz cúbica buscada sería $3\frac{1}{2}$, o sea $\frac{7}{2}$, por lo que su cubo sería $\frac{343}{8}$, o sea $42\frac{7}{8}$, en consecuencia, solo $\frac{1}{8}$ más pequeño que 43.

162.

De esto queda claro que la raíz cúbica de 43 no puede expresarse de ninguna manera por números enteros y fracciones; pero dado que tenemos un concepto claro del tamaño del mismo, se usa el signo $\sqrt[3]{}$, colocado delante del número dado, y se lee *raíz cúbica*, para distinguirla de la raíz cuadrada. Por lo tanto, $\sqrt[3]{43}$ indica la raíz cúbica de 43, es decir, un número tal, que multiplicado tres veces por sí mismo da 43.

163.

De esto queda claro que tales expresiones de ninguna manera son racionales, sino que representan un tipo especial de cantidades irracionales. Tampoco tienen nada en común con las raíces cuadradas, y no es posible expresar una raíz cúbica por medio de una raíz cuadrada como $\sqrt{12}$, porque, ya que el cuadrado de $\sqrt{12}$ es 12, su cubo es $12\sqrt{12}$, y así sigue siendo irracional, por lo tanto no puede ser 43.

164.

Pero si el número dado es un cubo realmente, estas expresiones se vuelven racionales, por lo que $\sqrt[3]{1}$ es tanto como 1, $\sqrt[3]{8}$ es tanto como 2, y $\sqrt[3]{27}$ es tanto como 3, y en general $\sqrt[3]{aaa}$ es tanto como a.

165.

Si se multiplica una raíz cúbica como $\sqrt[3]{a}$ por otra, como $\sqrt[3]{b}$, entonces el producto es $\sqrt[3]{ab}$, porque sabemos que la raíz cúbica de un producto *ab* se puede encontrar multiplicando las raíces cúbicas de los factores. Y del mismo modo, si debe dividirse $\sqrt[3]{a}$ entre $\sqrt[3]{b}$, entonces el cociente es $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Por eso se entiende que $2\sqrt[3]{a}$ es tanto como $\sqrt[3]{8a}$, porque 2 es tanto como $\sqrt[3]{8}$. Del mismo modo, $3\sqrt[3]{a}$ es tanto como $\sqrt[3]{27a}$, y $b\sqrt[3]{a}$ tanto como $\sqrt[3]{abbb}$. Por eso también al revés, si el número en el signo de raíz tiene un factor que es un cubo, entonces la raíz cúbica del mismo se puede colocar delante del signo. Entonces $\sqrt[3]{64a}$ es tanto como $4\sqrt[3]{a}$, y $\sqrt[3]{125a}$ es tanto como $5\sqrt[3]{a}$. Esto implica que $\sqrt[3]{16}$ es tanto como $2\sqrt[3]{2}$ porque 16 es igual a $8 \cdot 2$.

167.

Si el número dado es negativo, la raíz cúbica no tiene tanta dificultad como las raíces cuadradas de arriba; como los cubos de números negativos también se vuelven negativos, las raíces cúbicas de los números negativos también son negativas. Entonces $\sqrt[3]{-8}$ es tanto como -2, y $\sqrt[3]{-27}$ es -3. Además, $\sqrt[3]{-12}$ es tanto como $-\sqrt[3]{12}$ y $\sqrt[3]{-a}$ es tanto como $-\sqrt[3]{a}$. De ahí se ve que el signo (–) que esté dentro del signo de raíz cúbica, también se puede escribir delante del mismo. Por lo que aquí no nos llevan a ningún número imposible o imaginario, como es el caso de las raíces cuadradas de los números negativos.

CAPÍTULO 16

DE LAS POTENCIAS O POTESTADES EN GENERAL

168.

Si un número se multiplica por sí mismo varias veces, el producto se llama *potencia*, o *potestad*, o a veces también *dignidad*. En alemán, este nombre podría ser expresado por la palabra *poder*. Dado que ahora surge un cuadrado cuando un número se multiplica dos veces por sí mismo y un cubo cuando el número se multiplica tres veces por sí mismo, tanto los cuadrados como los cubos están incluidos bajo el nombre de las potencias o potestades.

169.

Estas potencias se distinguen por la cantidad de veces que un número se ha multiplicado por sí mismo. Entonces, si un número se multiplica dos veces por sí mismo, el producto se llama su segunda potencia, que es lo mismo que el cuadrado; si un número se multiplica tres veces por sí mismo, el producto se llama su tercera potencia, que tiene el mismo significado que el cubo; además, si un número se multiplica cuatro veces por sí mismo, el producto se llama su cuarta potencia, que comúnmente [*en alemán;* n*ota del traductor*] se conoce por el nombre de *bicuadrado*. De ahí también se entiende lo que significa la quinta, sexta, séptima potencia de un número; las potencias mayores, por cierto, no tienen nombres especiales.

170.

Para explicar esto mejor, notamos, en primer lugar, que del número 1 todas las potencias siempre permanecen 1; porque tantas veces que se multiplique 1 por sí mismo, el producto siempre permanece 1. Por lo tanto, apuntamos las potencias del número 2 y las potencias del número 3, en forma ordenada. Estas proceden como sigue:

potencias	del número 2	del número 3
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII	262144	387420489

Pero, en particular, las potencias del número 10 merecen ser memorizadas, y son

$$\overset{\mathrm{I}}{10},\quad \overset{\mathrm{II}}{100},\quad \overset{\mathrm{III}}{1000},\quad \overset{\mathrm{IV}}{10000},\quad \overset{\mathrm{V}}{100000},\quad \overset{\mathrm{VI}}{1000000},$$

porque toda nuestra aritmética se basa en ellas. Por cierto, debe tenerse en cuenta que los números pequeños colocados arriba indican el tipo de cada potencia.

171.

Si queremos ver el asunto de manera general, las potencias del número *a* se comportarían de la siguiente manera.

$$\overset{\mathrm{I}}{a},\quad \overset{\mathrm{II}}{aa},\quad \overset{\mathrm{III}}{aaa},\quad \overset{\mathrm{IV}}{aaaa},\quad \overset{\mathrm{V}}{aaaaa},\quad \overset{\mathrm{VI}}{aaaaaa},\quad etc.$$

Sin embargo, esta forma de escribir es incómoda al escribir potencias muy elevadas, porque hay que apuntar la letra muchas veces, y sería mucho más difícil para el lector contar el número de estas letras para saber de cuál potencia se trata. Entonces, por ejemplo, difícilmente se podría escribir la centésima potencia de esta manera, y sería aún menos reconocible.

172.

Para remediar este inconveniente, se ha introducido una forma mucho más cómoda de expresar tales potencias, la cual merece ser explicada con mucho cuidado, debido a sus maravillosos beneficios. Por ejemplo, si se quiere escribir la centésima potencia de un número, se pone el número 100 arriba y a la derecha del número. Entonces, a^{100}, que se pronuncia "*a* elevada a 100", expresa la centésima potencia de *a*. El número escrito arriba, en nuestro caso 100, se llama *exponente*. Estos nombres tienen que aprenderse bien.

173.

De esta manera, a^2, o sea *a* elevada a 2, indica la segunda potencia de *a*, y a veces se escribe en su lugar *aa*; porque ambos modos son igual de fáciles de escribir y entender. Por otro lado, en lugar del cubo o la tercera potencia *aaa*, se escribe a^3 de acuerdo con este nuevo modo, porque esto ahorra más espacio. De la misma manera, a^4 expresa la cuarta potencia, a^5 la quinta, y a^6 la sexta potencia de *a*.

174.

De esta manera, todas las potencias del número *a* se presentan de la siguiente forma:

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ a^{10},\ a^{11},\ a^{12},\ \text{etc.}$$

de lo cual se puede ver que, según este modo, el primer término *a* se puede acoplar muy bien escribiéndolo como a^1, para que el orden salte más a la vista. Por lo tanto, a^1 no es otra cosa que *a* porque la unidad indica que la letra *a* solo debe escribirse una vez. Semejante serie de potencias también se llama progresión geométrica, porque cada término siempre es las mismas veces más grande que el anterior.

175.

Como en esta serie de potencias, cada término se encuentra multiplicando el anterior por *a*, lo que aumenta el exponente por uno; así también cualquier término se convierte en el anterior, si se divide entre *a*, por lo cual el exponente se disminuye por uno. De esto vemos que el término anterior de a^1 debe ser $\frac{a}{a}$ que es 1; pero considerando los exponentes, eso mismo será a^0; eso implica la propiedad extraña, de que a^0 siempre tiene que ser 1, sea el número *a* tan grande o pequeño como quiera, incluso si es nada, por lo tanto, es cierto que 0^0 da 1. [*Nota del traductor*: Hoy se considera 0^0 indefinido.]

176.

Podemos continuar esta serie de potencias hacia atrás, y de dos maneras. Primero, dividiendo siempre el término entre *a*; pero después también reduciendo el exponente en uno, o restando uno de él. Y estamos seguros de que los términos determinados de ambas maneras son completamente iguales. Por lo tanto, queremos presentar la serie anterior al revés, y de esta manera doble, que también debe leerse al revés de derecha a izquierda:

1.°	$\frac{1}{aaaaaa}$ $\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{aaaaa}$ $\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{aaaa}$ $\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{aaa}$ $\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{aa}$ $\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a^1}$	1	a
2.°	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

De esta manera llegamos al entendimiento de aquellas potencias cuyos exponentes son números negativos; y podemos dar con precisión el valor de ellas. Por lo tanto, queremos poner a la vista lo que encontramos, en la siguiente forma:

Primero a^0 es lo mismo que 1.
a^{-1} " " " " $\frac{1}{a}$
a^{-2} " " " " $\frac{1}{aa}$ o sea $\frac{1}{a^2}$
a^{-3} " " " " $\frac{1}{a^3}$
a^{-4} " " " " $\frac{1}{a^4}$, etcétera.

178.

De esto también está claro, cómo se deben encontrar las potencias de un producto como ab. Ellas son

$$ab \text{ o } a^1b^1,\ a^2b^2,\ a^3b^3,\ a^4b^4,\ a^5b^5,\ a^6b^6,\ \text{etc.}$$

De la misma manera también se encuentran las potencias de fracciones, como las de $\frac{a}{b}$, que son las siguientes:

$$\frac{a^1}{b^1},\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{a^3}{b^3},\ \frac{a^4}{b^4},\ \frac{a^5}{b^5},\ \frac{a^6}{b^6},\ \frac{a^7}{b^7},\ \text{etc.}$$

179.

Finalmente, también consideramos las potencias de números negativos. Entonces, dado el número negativo $-a$, sus potencias surgirán en forma ordenada, una detrás de otra:

$$-a,\ +aa,\ -a^3,\ +a^4,\ -a^5,\ +a^6,\ -a^7,\ \text{etc.}$$

De esto se aclara que solo las potencias cuyos exponentes son números impares, se vuelven negativas; en cambio, aquellas potencias cuyos exponentes son pares, son todas positivas. Entonces, la tercera, quinta, séptima, novena potencia de los números negativos tienen el signo $-$.

La segunda, cuarta, sexta, octava potencia, por otro lado, todas tienen el signo $+$.

CAPÍTULO 17

DE LAS OPERACIONES CON LAS POTENCIAS

180.

Con respecto a la suma y la resta, no hay nada que notar aquí, ya que potencias distintas solo se unen con los signos $+$ y $-$.

Entonces $a^3 + a^2$ es la suma de la tercera y segunda potencia de *a*; y $a^5 - a^4$ es el resto que queda si se quita la cuarta potencia de la quinta potencia; y ambas no pueden expresarse en forma más breve. Pero si se dan potencias iguales, está claro que $a^3 + a^3$ se puede escribir como $2a^3$, etc.

181.

Al multiplicar tales potencias, sin embargo, aparecen varias cosas que hay que notar. En primer lugar, si cada potencia de *a* debe multiplicarse por el mismo número *a*, sale la siguiente potencia, cuyo exponente es mayor por l. Entonces a^2 multiplicada por *a* da a^3, y a^3 multiplicada por *a* da a^4, etc. Igualmente con aquellas cuyos exponentes son negativos, si se multiplican por a, uno solo tiene que sumar 1 al exponente: entonces, a^{-1} multiplicada por a da a^0 que es 1, lo cual está claro porque a^{-1} es lo mismo que $\frac{1}{a}$, que multiplicada por a da $\frac{a}{a}$, esto es 1. Del mismo modo con a^{-2}, si se multiplica por a da a^{-1}, que es $\frac{1}{a}$. Y a^{-10} multiplicada por a da a^{-9}, etcétera.

182.

Pero si se tiene que multiplicar una potencia por aa, o sea la segunda potencia de a, el exponente aumenta en 2; así a^2 multiplicada por a^2 da a^4, y a^3 multiplicada por a^2 da a^5, además, a^4 multiplicada por a^2 da a^6, y en general a^n multiplicada por a^2 da a^{n+2}. Del mismo modo con los exponentes negativos, así a^{-1} multiplicada por a^2, da a^1 que es a, lo cual está claro, porque a^{-1} es lo mismo que $\frac{1}{a}$, que multiplicado por aa da $\frac{aa}{a}$, esto es a. De la misma manera, a^{-2} multiplicada por a^2 da a^0, esto es 1; además a^{-3} multiplicada por a^2, da a^{-1}.

183.

También está claro que si cualquier potencia se multiplica por la tercera potencia de a, o sea por a^3, el exponente de la misma debe aumentarse en 3; o a^n multiplicado por a^3 da a^{n+3}. Y, en general, si se tienen que multiplicar dos potencias de a, su producto también es una potencia de a, su exponente es la suma de aquellos exponentes. Por ejemplo, a^4 multiplicada por a^5 da a^9, y a^{12} multiplicada por a^7 da a^{19}, etc.

184.

Por esta razón, las potencias mayores de ciertos números son bastante fáciles de encontrar; como por ejemplo, si uno quisiera tener la XXIV potencia de 2, la encontraría multiplicando la XII potencia por la XII potencia, porque 2^{24} es tanto como 2^{12} multiplicado por 2^{12}. Pero ahora, como vimos arriba, 2^{12} es 4096: por eso se multiplica 4096 por 4096, entonces el producto 16777216 será la potencia requerida, es decir, 2^{24}.

185.

En la división debe notarse lo siguiente. En primer lugar, si una potencia de *a* se debe dividir entre *a*, su exponente se reduce en l, es decir, hay que restar l de ella. Por ejemplo, a^5 dividida entre *a* da a^4, y a^0, que es l, dividida entre *a* da a^{-1} o $\frac{1}{a}$. Además, a^{-3} dividido entre *a* da a^{-4}.

186.

Si ahora se debe dividir una potencia de *a* entre a^2, se tiene que restar 2 de su exponente; y si uno quisiera dividirla entre a^3, se tendría que restar 3 de su exponente. Y así, en general, si se debe dividir cualquier potencia de *a* entre otra, entonces del exponente de la potencia primero mencionada, hay que restar el exponente de la otra potencia. Por ejemplo, a^{15} dividida entre a^7 da a^8, y a^6 dividida entre a^7 da a^{-1}. Además, a^{-3} dividida entre a^4 da a^{-7}.

187.

Es fácil entender cómo se deben encontrar las potencias de las potencias, porque esto se efectúa por medio de la multiplicación. Entonces, si se pide la segunda potencia, o el cuadrado de a^3, entonces ese es a^6, y la tercera potencia, o el cubo de a^4, será a^{12}; de ahí es evidente que para encontrar el cuadrado de una potencia, su exponente solo tiene que duplicarse. Así, el cuadrado de a^n es a^{2n}, y el cubo, o la tercera potencia de a^n, será a^{3n}. Del mismo modo, se encuentra la séptima potencia de a^n que es a^{7n}, etcétera.

188.

El cuadrado de a^2 es a^4, que es la cuarta potencia de *a*, que es, por lo tanto, el cuadrado del cuadrado. De esto queda claro por qué la cuarta potencia se llama *bicuadrado* o *cuadrado cuadrado*. Además, debido a que el cuadrado de a^3 es a^6, la sexta potencia también se llama *cubo cuadrado*.

Finalmente, debido a que el cubo de a^3 es a^9, que es la novena potencia de *a*, entonces también se le llama *cubo cúbico*. Varios de estos nombres no son comunes hoy en día.

CAPÍTULO 18

DE LAS RAÍCES RESPECTO A TODAS LAS POTENCIAS

189.

Ya que la raíz cuadrada de un número dado es un número cuyo cuadrado es igual al número dado, y la raíz cúbica es uno cuyo cubo es igual al número dado, entonces para cualquier número dado también se pueden considerar tales raíces, cuya cuarta o quinta, o cualquier otra potencia sea igual al número dado. Para distinguir entre estos diferentes tipos de raíces, llamemos a la raíz cuadrada la segunda raíz y a la raíz cúbica la tercera raíz, y entonces la raíz cuya cuarta potencia es igual a un número dado, se llamará su cuarta raíz, y aquella cuya quinta potencia es igual al número dado, se llamará su quinta raíz, etcétera.

190.

Como la segunda raíz cuadrada se indica por el signo $\sqrt{\ }$, y la tercera raíz o raíz cúbica por el signo $\sqrt[3]{\ }$; así, de la misma manera, se acostumbra indicar la cuarta raíz por el signo $\sqrt[4]{\ }$, la quinta raíz por el signo $\sqrt[5]{\ }$, etcétera. Está claro que, usando este modo de escribir, la raíz cuadrada debería expresarse como $\sqrt[2]{\ }$. Pero ya que las raíces cuadradas son las más comunes, el número 2 se omite del signo de raíz por brevedad. Por lo tanto, si no hay dígitos en el signo de raíz, siempre se entenderá como la raíz cuadrada.

191.

Para aclarar esto, planteamos aquí las diferentes raíces del número *a* e indicamos sus significados.

$\sqrt{a}$	es la	II	raíz de	a
$\sqrt[3]{a}$	" "	III	" "	a
$\sqrt[4]{a}$	" "	IV	" "	a
$\sqrt[5]{a}$	" "	V	" "	a
$\sqrt[6]{a}$	" "	VI	" "	a, etc.

Así que, por otro lado,

la	II	potencia de	$\sqrt{a}$	es igual a	a
"	III	" "	$\sqrt[3]{a}$	" " "	a
"	IV	" "	$\sqrt[4]{a}$	" " "	a
"	V	" "	$\sqrt[5]{a}$	" " "	a
"	VI	" "	$\sqrt[6]{a}$	" " "	a, etc.

192.

El número *a* sea grande o pequeño, por lo dicho se puede comprender, cómo deben ser entendidas todas las raíces de estos diferentes grados.

Aqui hay que tomar en cuenta, que si se toma el número l para *a*, todas estas raíces siempre permanecen l, porque todas las potencias de l son siempre l.

Pero si el número *a* es mayor que 1, todas las raíces son mayores que 1.

Si en cambio el número es menor que 1, todas sus raíces también son menores que 1.

193.

Si el número *a* es positivo, entonces, en base a lo expuesto arriba sobre las raíces cuadradas y cúbicas, se puede entender que todas las demás raíces realmente se pueden indicar, y, por lo tanto, son números verdaderos y posibles.

Pero si el número *a* es negativo, entonces su segunda, cuarta, sexta y generalmente todas las raíces pares se convierten en números imposibles, porque todas las potencias pares de números, tanto positivos como negativos, siempre obtienen el signo *más*.

Por otro lado, la tercera, quinta, séptima y todas las raíces impares en general se vuelven negativas, porque las potencias impares de números negativos también son negativas.

194.

Por lo tanto, obtenemos una cantidad infinita de nuevos tipos de números irracionales o sordos, porque siempre y cuando el número *a* no sea una potencia del mismo grado que el de la raíz, entonces no es posible expresar esa raíz por medio de números enteros o fracciones, por lo que pertenece al tipo de los números llamados números irracionales.

CAPÍTULO 19

DE LA EXPRESIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES POR MEDIO DE EXPONENTES QUEBRADOS

195.

Acabamos de mostrar en el último capítulo que el cuadrado de cualquier potencia se puede encontrar duplicando su exponente, y que el cuadrado o la segunda potencia de a^n es a^{2n}. Entonces, al revés, la raíz cuadrada de la potencia a^{2n} es a^n, y en consecuencia se encuentra si su exponente se parte por la mitad, o sea se divide entre 2.

196.

Entonces, la raíz cuadrada de a^2 es a^1, la raíz cuadrada de a^4 es a^2, y la raíz cuadrada de a^6 es a^3, etcétera. Como esta es una verdad general, se ve que la raíz cuadrada de a^3 será $a^{\frac{3}{2}}$. Del mismo modo, la raíz cuadrada de a^5 será $a^{\frac{5}{2}}$. Por lo tanto, la raíz cuadrada del número a, o sea de a^1, será $a^{\frac{1}{2}}$. De lo cual es evidente que $a^{\frac{1}{2}}$ es tanto como $\sqrt{a}$; hay que notar bien esta nueva manera de indicar la raíz cuadrada.

197.

Además hemos demostrado, que para encontrar el cubo de una potencia como a^n, se tiene que multiplicar su exponente por 3, y así el cubo será a^{3n}.

Entonces, al revés, la tercera o raíz cúbica de la potencia a^{3n} será a^n, y uno solo tiene que dividir el exponente de aquella entre 3. Así, la raíz cúbica de a^3 es a^1, o sea a, la de a^6 es a^2, la de a^9 es a^3, etcétera.

198.

Esto también debe ser cierto si el exponente no se puede dividir entre 3, y por eso, la raíz cúbica de a^2 será $a^{\frac{2}{3}}$. Y la de a^4 será $a^{\frac{4}{3}}$, o sea $a^{1\frac{1}{3}}$. Por lo tanto, la tercera raíz o raíz cúbica del número a, o sea de a^1, será $a^{\frac{1}{3}}$. De lo cual es evidente que $a^{\frac{1}{3}}$ es tanto como $\sqrt[3]{a}$.

199.

Es lo mismo con las raíces superiores: y la cuarta raíz de a será $a^{\frac{1}{4}}$, que en consecuencia es tanto como $\sqrt[4]{a}$. Del mismo modo, la quinta raíz de a será $a^{\frac{1}{5}}$, que es tanto como $\sqrt[5]{a}$, y esto también debe entenderse de las raíces superiores.

200.

Por eso ahora podríamos renunciar totalmente a los signos de raíces introducidos hace mucho tiempo, y en su lugar usar los exponentes quebrados explicados aquí; pero ya que uno está acostumbrado a esos signos, y que aparecen en todos los escritos, no es prudente abolirlos por completo. Sin embargo, esta nueva manera, hoy en día, también se usa a menudo, ya que contiene la naturaleza del asunto con claridad. Porque, que $a^{\frac{1}{2}}$ es realmente la raíz cuadrada de a, se puede ver de inmediato tomando simplemente su cuadrado, en efecto, si se multiplica $a^{\frac{1}{2}}$ por $a^{\frac{1}{2}}$, entonces obviamente resulta a^1, que es a.

201.

De esto también se ve cómo deben entenderse todos los demás exponentes quebrados; por ejemplo, si uno tiene $a^{\frac{4}{3}}$, entonces primero hay que tomar la cuarta potencia del número *a*, que es a^4, y luego hay que sacar la raíz cúbica o tercera raíz, así que $a^{\frac{4}{3}}$ es tanto como $\sqrt[3]{a^4}$, escrito de forma común. De la misma manera se encuentra el valor de $a^{\frac{3}{4}}$, si primero se busca el cubo o la tercera potencia de *a*, que es a^3, y luego se saca la cuarta raíz de ella: así que $a^{\frac{3}{4}}$ es tanto como $\sqrt[4]{a^3}$. Del mismo modo, $a^{\frac{4}{5}}$ es tanto como $\sqrt[5]{a^4}$, etcétera.

202.

Si el quebrado que representa el exponente es mayor que 1, también se puede determinar el valor de la siguiente forma. Dado $a^{\frac{5}{2}}$, entonces eso es tanto como $a^{2\frac{1}{2}}$, lo cual resulta si se multiplica a^2 por $a^{\frac{1}{2}}$. Ya que ahora $a^{\frac{1}{2}}$ es tanto como $\sqrt{a}$, entonces $a^{\frac{5}{2}}$ es tanto como $a^2\sqrt{a}$. De la misma manera, $a^{\frac{10}{3}}$ o sea $a^{3\frac{1}{3}}$ es tanto como $a^3\sqrt[3]{a}$; y $a^{\frac{15}{4}}$, o sea $a^{3\frac{3}{4}}$, es tanto como $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Todos esto ejemplos ilustran el uso maravilloso de los exponentes quebrados.

203.

Su uso también en los quebrados es de utilidad. Así, dado $\frac{1}{\sqrt{a}}$, entonces esto es $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Arriba vimos que un quebrado como $\frac{1}{a^n}$ puede expresarse por a^{-n}, en consecuencia, $\frac{1}{\sqrt{a}}$ puede expresarse por $a^{-\frac{1}{2}}$. Del mismo modo, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ puede expresarse por $a^{-\frac{1}{3}}$, y $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ se convierte en $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, que es a^2 multiplicada por $a^{-\frac{3}{4}}$, lo que se convierte en

$a^{\frac{5}{4}}$, eso es $a^{1\frac{1}{4}}$, y luego eso es $a\sqrt[4]{a}$. Tales reducciones se facilitan notablemente con la práctica.

204.

Finalmente, debe tenerse en cuenta que cada raíz puede presentarse de muchas maneras diferentes. Ya que $\sqrt{a}$ es tanto como $a^{\frac{1}{2}}$, y $\frac{1}{2}$ se puede convertir en todos los quebrados: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, etc.; así está claro que $\sqrt{a}$ es tanto como $\sqrt[4]{a^2}$, también igual a $\sqrt[6]{a^3}$, también igual a $\sqrt[8]{a^4}$, etcétera. Del mismo modo, $\sqrt[3]{a}$ es tanto como $a^{\frac{1}{3}}$, pero $a^{\frac{1}{3}}$ es tanto como $\sqrt[6]{a^2}$ o $\sqrt[9]{a^3}$ o $\sqrt[12]{a^4}$. De esto se puede ver fácilmente que el número *a* mismo, o sea a^1, se puede expresar con los siguientes signos de raíz:

$$\sqrt[2]{a^2}, \quad \text{o} \quad \sqrt[3]{a^3}, \quad \text{o} \quad \sqrt[4]{a^4}, \quad \text{o} \quad \sqrt[5]{a^5}, \text{ etc.}$$

205.

Esto es muy útil en la multiplicación y división: como por ejemplo si se tiene que multiplicar $\sqrt[2]{a}$ por $\sqrt[3]{a}$, entonces, en vez de $\sqrt[2]{a}$ se escribe $\sqrt[6]{a^3}$, y en vez de $\sqrt[3]{a}$ se escribe $\sqrt[6]{a^2}$. De esta manera, se tienen signos de raíz iguales, y así el producto da $\sqrt[6]{a^5}$. Lo que también se aclara multiplicando $a^{\frac{1}{2}}$ por $a^{\frac{1}{3}}$ que da $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Pero ahora $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ es tanto como $\frac{5}{6}$ y así el producto es $a^{\frac{5}{6}}$, o sea $\sqrt[6]{a^5}$. Si se debe dividir $\sqrt[2]{a}$, o sea $a^{\frac{1}{2}}$, entre $\sqrt[3]{a}$ o $a^{\frac{1}{3}}$, se obtiene $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, que es $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, por lo tanto $a^{\frac{1}{6}}$, consecuentemente $\sqrt[6]{a}$.

CAPÍTULO 20

DE LAS DIFERENTES OPERACIONES ARITMÉTICAS Y SU RELACIÓN EN GENERAL

206.

Hasta ahora hemos presentado varios tipos de cálculos, como sumar, restar, multiplicar y dividir, elevar a potencias y finalmente sacar las raíces.

Por lo tanto, servirá mucho a la aclaración, si explicamos marcadamente el origen de estos tipos de cálculos y la relación entre ellos, de modo que uno pueda reconocer si otros tipos similares son posibles o no.

Para este fin, utilizamos un nuevo signo, que se puede poner en lugar de la expresión, *es tanto como*, que hasta el momento abundaba mucho. Ahora, este signo es =, y se pronuncia *es igual a*. Entonces, si se escribe $a = b$, el significado es que a es tanto como b, o que a es igual a b; así por ejemplo $3 \cdot 5 = 15$.

207.

El primer tipo de cálculo, que se nos presenta en nuestras mentes, es sin duda la adición, mediante la cual se suman dos números, o se encuentra la suma de estos. Así pues, sean a y b los dos números dados y su suma sea indicada por la letra c, entonces se tiene $a + b = c$. Por lo tanto, si se conocen los dos números a y b, la adición enseña cómo encontrar el número c de ellos.

208.

Mantenemos la igualdad $a + b = c$, pero ahora invertimos la pregunta, y preguntamos cómo encontrar el número b, si conocemos los números a y c.

Es decir, preguntamos cuál número se tiene que agregar al número a para que salga el número c. Sea por ejemplo $a = 3$ y $c = 8$, así que tendría que ser $3 + b = 8$, por lo que está claro que b se encuentra restando 3 de 8. Entonces, en general, para encontrar b, uno tiene que restar a de c, y eso da $b = c - a$. Porque si le sumamos a, se obtiene $c - a + a$, que es c.

Pues en esto está el origen de la resta.

209.

Por lo tanto, la sustracción surge cuando se invierte la pregunta que se plantea en la adición. Y dado que puede suceder que el número que se resta sea mayor que el número del que se debe restar: si por ejemplo se debe restar 9 de 5: entonces obtenemos el concepto de un nuevo tipo de números, que se llaman negativos, porque $5 - 9 = -4$.

210.

Si se deben sumar muchos números que son iguales, su suma se encuentra por la multiplicación, y luego se llama producto. Así ab significa el producto que surge cuando el número a se multiplica por el número b. Si ahora indicamos este producto con la letra c, tenemos $ab = c$, y la multiplicación enseña, cómo se encuentra el número c, si se conocen los números a y b.

211.

Consideremos ahora la siguiente pregunta: si se conocen los números c y a, ¿cómo se puede encontrar el número b de ellos? Sea por ejemplo $a = 3$ y $c = 15$, de modo que $3b = 15$, y se pregunta por cuál número se tiene que multiplicar 3 para obtener 15. Esto ahora se hace mediante la división y, por eso en general, el número b se encuentra si se divide c entre a; de ahí en consecuencia sale la igualdad $b = \frac{c}{a}$.

212.

Debido a que a menudo puede suceder que el número c no se pueda dividir realmente entre el número a, aunque la letra b tiene que tener cierto valor, llegamos a un nuevo tipo de números, que se llaman quebrados. Entonces, si suponemos que $a = 4$ y $c = 3$, así que $4b = 3$, se puede ver bien que b no puede ser un número entero, sino que es un quebrado, es decir $b = \frac{3}{4}$

213.

Así como la multiplicación surgió de la adición, cuando se suman muchos números que son iguales, ahora también queremos suponer en la multiplicación, que debemos multiplicar muchos números iguales, y esto nos lleva a las potencias, que se presentan de una manera general en la forma a^b, que indica que el número a debe multiplicarse por sí mismo tantas veces como lo diga el número b. Como se informó anteriormente, aquí a se llama la *raíz* [o *base*], b el *exponente* y a^b la *potencia*.

214.

Indiquemos ahora esta potencia misma por la letra c, entonces tenemos $a^b = c$, en donde aparecen tres letras a, b, c. Suponiendo esto, la teoría de las potencias muestra cómo se determina la potencia misma, es decir la letra c, si la raíz a y el exponente b se conocen. Sea por ejemplo $a = 5$ y $b = 3$, así que $c = 5^3$: de donde se ve que hay que tomar la tercera potencia de 5, que es 125; así será $c = 125$.

Entonces, aquí se enseña cómo encontrar la potencia c desde la raíz a y el exponente b.

215.

Ahora veamos cómo se puede invertir o cambiar la pregunta, es decir, cómo se puede encontrar el tercer número, si dos de estos tres números *a*, *b*, *c* se conocen. Esto se puede hacer de dos maneras, suponiendo que la *c*, junto con la *a*, o junto con la *b*, sean conocidas. Cabe señalar que en los casos anteriores de la suma y de la multiplicación solo hay un cambio, porque en el primer caso, donde $a+b=c$, es lo mismo si uno supone conocido *c*, junto con *a*, o junto con *b*, ya que es lo mismo si escribo $a+b$ o $b+a$. Esto también se aplica a la ecuación $ab=c$ o $ba=c$, donde las letras *a* y *b* también se pueden intercambiar. Sin embargo, esto no pasa en las potencias, porque de ninguna manera se puede sustituir a^b por b^a, lo que se puede ver fácilmente en un solo ejemplo; si se pone $a=5$ y $b=3$, entonces $a^b=5^3=125$. Por otro lado, es $b^a=3^5=243$, que es muy diferente de 125.

216.

Por eso está claro que aquí se pueden plantear dos preguntas, la primera de las cuales es: si además de la potencia *c* también está dado el exponente *b*, cómo se debe encontrar la raíz *a*. La segunda pregunta, en cambio, es que si se supone conocida la potencia *c* y tambien la raíz *a*, cómo se debe encontrar el exponente *b*.

217.

En lo anterior, solo se ha discutido la primera de estas dos preguntas, y esto se ha hecho en la enseñanza de la extracción de raíces. Si por ejemplo se tiene $b=2$ y $a^2=c$, entonces *a* debe ser un número cuyo cuadrado sea igual a *c*, y así $a=\sqrt[2]{c}$. Del mismo modo, si $b=3$ entonces se tiene $a^3=c$, aquí el cubo de *a* debe ser igual al número dado *c*, ahí se obtiene $a=\sqrt[3]{c}$. De esto se puede entender de manera general, cómo encontrar la letra *a* de las dos letras *c* y *b*. Es decir, $a=\sqrt[b]{c}$.

218.

Siempre que sucede que el número dado c, cuya raíz se busca, no es realmente una potencia, entonces la raíz requerida a no se puede expresar ni en enteros ni en quebrados, como ya se ha señalado anteriormente. Pero como también debe tener su valor definido, hemos llegado a un nuevo tipo de números, que se llaman números *irracionales* o *sordos*; de los cuales hay tantos tipos diferentes como corresponde a la diversidad de las raíces. Esta consideración también nos llevó a un tipo muy especial de números, que son imposibles y se llaman *números imaginarios* o *imaginados*.

219.

Por lo visto, nos queda una pregunta más a considerar: si aparte de la potencia c, también la raíz a se considera conocida, ¿cómo se puede encontrar el exponente? Esta pregunta nos llevará a la importante enseñanza de los logaritmos, cuya utilidad en matemáticas es tan grande que casi no se puede lograr ningún cálculo extenso sin la ayuda de los logaritmos. Pues explicaremos esta teoría en el siguiente capítulo, donde otra vez seremos guiados a tipos de números completamente nuevos, que ni siquiera se pueden contar entre los irracionales anteriores.

CAPÍTULO 21

DE LOS LOGARITMOS EN GENERAL

220.

Entonces consideramos esta ecuación $a^b = c$, y notamos en primer lugar que en la teoría de los logaritmos para la raíz a, cierto número se determina arbitrariamente, es decir, siempre tiene el mismo valor. Ahora, si se supone que el exponente b es tal que la potencia a^b sea igual a un número dado c, el exponente b se llama el *logaritmo* de este número c, y para indicarlo usaré el signo de una $\mathfrak{l}$ alemana [ele] en el futuro, que se le antepone al número c; y así uno escribe $b = \mathfrak{l}c$, lo que indica que b es el logaritmo del número c, o sea, el logaritmo de c es b.

[*Nota del traductor: en está traducción escribiremos* log *en lugar de* $\mathfrak{l}$, *y así,* $b = \log c$ *en vez de* $b = \mathfrak{l}c$.]

221.

Entonces, una vez que se ha fijado la raíz a, el logaritmo de cualquier número c no es nada más que el exponente de aquella potencia de a que es igual al número c. Como $c = a^b$, b es el logaritmo de la potencia a^b. Si ahora ponemos $b = 1$, entonces l es el logaritmo de a^1, es decir, $\log a = 1$; ponemos $b = 2$, entonces 2 es el logaritmo de a^2, es decir $\log a^2 = 2$; Del mismo modo, se tendrá: $\log a^3 = 3$, $\log a^4 = 4$, $\log a^5 = 5$ y así sucesivamente.

222.

Si ponemos $b = 0$, 0 será el logaritmo de a^0: pero ahora $a^0 = 1$, y por lo tanto $\log 1 = 0$, la raíz a puede tener el valor que uno quiera.

Además, si uno pone $b = -1$, entonces -1 se convierte en el logaritmo de a^{-1}. Pero $a^{-1} = \frac{1}{a}$; así se tiene $\log \frac{1}{a} = -1$. Del mismo modo, uno obtiene $\log \frac{1}{a^2} = -2$, $\log \frac{1}{a^3} = -3$, $\log \frac{1}{a^4} = -4$, etc.

223.

Eso aclara cómo se pueden plantear los logaritmos de todas las potencias de la raíz a e incluso de los quebrados cuyo numerador $= 1$, pero el denominador es una potencia de a; en cuyo caso los logaritmos son números enteros. Pero si suponemos quebrados para b, esos se convierten en logaritmos de números irracionales; si por ejemplo $b = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2}$ es el logaritmo de $a^{\frac{1}{2}}$, o sea de $\sqrt{a}$. Por eso se obtiene $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2}$. Del mismo modo, $\log \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ y $\log \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, etcétera.

224.

Pero si se tiene que encontrar el logaritmo de otro número c, entonces se ve fácilmente que este ni puede ser un número entero ni un quebrado. Pero tiene que existir un exponente, es decir b, tal que la potencia a^b sea igual al número dado c, y por eso se tiene $b = \log c$. Entonces se obtiene de manera general $a^{\log c} = c$.

225.

Consideremos ahora otro número d, cuyo logaritmo también se indica por $\log d$, de modo que $a^{\log d} = d$. Si se multiplica esta fórmula por la anterior, es decir, por $a^{\log c} = c$, se obtiene $a^{\log c + \log d} = cd$; pero ahora el exponente siempre es el logaritmo de la potencia; en consecuencia $\log c + \log d = \log cd$. Pero si se divide la primera fórmula entre la última, se obtiene $a^{\log c - \log d} = \frac{c}{d}$. Por lo tanto, $\log c - \log d = \log \frac{c}{d}$.

226.

Esto nos lleva a las dos propiedades principales de los logaritmos, la primera de las cuales consiste en la ecuación $\log c + \log d = \log cd$, y de la cual aprendemos que el logaritmo de un producto como cd se encuentra si se suman los logaritmos de los factores. La segunda propiedad está contenida en la ecuación $\log c - \log d = \log \frac{c}{d}$, y muestra que el logaritmo de un quebrado se encuentra restando el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador.

227.

Y este es precisamente el beneficio maravilloso que los logaritmos tienen en la aritmética. Porque si hay que multiplicar o dividir dos números, solo se tienen que sumar o restar sus logaritmos. Pero es obvio que es mucho más fácil sumar o restar números que multiplicar o dividir, especialmente si los números son muy grandes.

228.

Pero más importante es el beneficio con las potencias y con la extracción de las raíces. Porque, si $d = c$, entonces de la primera propiedad se tiene $\log c + \log c = \log cc$, así $\log cc = 2 \log c$. Asimismo se obtiene $\log c^3 = 3 \log c$ y $\log c^4 = 4 \log c$, y en general $\log c^n = n \log c$.

Si ahora consideramos números quebrados para *n*, entonces se obtiene $\log c^{\frac{1}{2}}$, que es $\log \sqrt{c} = \frac{1}{2} \log c$; también para números negativos: $\log c^{-1}$ es $\log \frac{1}{c} = -\log c$, y $\log c^{-2}$ es $\log \frac{1}{cc} = -2 \log c$, etcétera.

229.

Entonces, si uno tiene las tablas adecuadas, en las que están calculados los logaritmos para todos los números, entonces, con su ayuda, se pueden realizar fácilmente los cálculos más difíciles, que contienen multiplicaciones y divisiones grandes y también potencias y extracciones de raíces. Porque en estas tablas no solo se puede encontrar el logaritmo para cada número, sino también el número para cada logaritmo. Por ejemplo, si uno debe encontrar la raíz cuadrada de un número *c*, entonces primero se busca el logaritmo del número c que es $\log c$, luego se toma la mitad del mismo, que es $\frac{1}{2}\log c$, y este es el logaritmo de la raíz cuadrada que se está buscando: el número que corresponde a este logaritmo, y que puede ser encontrado en la tabla, es la raíz cuadrada misma.

230.

Hemos visto antes que los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., o sea todos los números positivos, son logaritmos de la raíz *a* y sus potencias positivas; o sea de números mayores que uno. [*Nota: Euler supone que a es mayor que 1*.]

En cambio, los números negativos como −1, −2, etc., son logaritmos de los quebrados $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, etc., que son más pequeños que uno, pero aún son más grandes que la nada.

Eso implica que si el logaritmo es positivo, el número siempre es mayor que uno; pero si el logaritmo es negativo, el número siempre es menor que uno, pero mayor que 0. En consecuencia, no se pueden mostrar logaritmos para números negativos, o los logaritmos de números negativos son imposibles y pertenecen al género de los números imaginarios o imaginados.

231.

Para explicar esto mejor, será útil suponer un número determinado para la raíz *a*, es decir aquel, según el cual se calculan las tablas logarítmicas habituales. Ahora, se asume el número 10 para la raíz *a* porque toda la aritmética ya se ha configurado en base a él. Sin embargo, es fácil ver que se puede suponer cualquier otro número que solo sea mayor que uno; porque si uno quisiera poner $a = 1$, entonces todas sus potencias serían $a^b = 1$, y siempre permanecerían uno, y nunca podrían ser iguales a otro número dado como *c*.

CAPÍTULO 22

DE LAS TABLAS LOGARÍTMICAS COMUNES

232.

Como se informó, estas tablas suponen que la raíz es $a = 10$; así, el logaritmo de cualquier número c es el exponente al cual se tiene que elevar el número 10, para que la potencia sea igual al número. O sea, si el logaritmo del número c está indicado por $\log c$, entonces uno siempre tiene $10^{\log c} = c$.

233.

Ya hemos notado que el logaritmo del número 1 siempre es 0, porque $10^0 = 1$, así

$$\log 1 = 0, \quad \log 10 = 1, \quad \log 100 = 2, \quad \log 1000 = 3,$$
$$\log 10000 = 4, \quad \log 100000 = 5, \quad \log 1000000 = 6;$$

además

$$\log\frac{1}{10} = -1, \quad \log\frac{1}{100} = -2, \quad \log\frac{1}{1000} = -3, \quad \log\frac{1}{10000} = -4,$$
$$\log\frac{1}{100000} = -5, \quad \log\frac{1}{1000000} = -6.$$

234.

Mientras los logaritmos de estos números principales salen automáticamente, es mucho más difícil encontrar los logaritmos de todos los demás números, que también deben estar en las tablas. Este todavía no es el lugar para dar instrucciones suficientes de cómo encontrarlos, por lo que solo notamos en general lo que se tiene que tomar en cuenta en eso.

235.

Ahora que $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$, es fácil entender que de todos los números entre 1 y 10, los logaritmos tienen que estar entre 0 y 1, o sea, son mayores que 0 y aún menores que 1.

Consideremos solo el número 2; ahora es seguro que su logaritmo, que indicamos con la letra *x*, así que $\log 2 = x$, es mayor que 0 y aún menor que 1. Pero tiene que ser un número tal, que 10^x sea igual a 2.

También se puede ver fácilmente que *x* debe ser mucho más pequeño que $\frac{1}{2}$, o sea que $10^{\frac{1}{2}}$ es más grande que 2, porque si se toman los cuadrados de ambos, entonces el cuadrado de $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$; pero el cuadrado de 2 es 4, por lo tanto mucho más pequeño. Del mismo modo, $\frac{1}{3}$ también es demasiado grande para *x*, o sea $10^{\frac{1}{3}}$ es mayor que 2. Debido a que el cubo de $10^{\frac{1}{3}} = 10$, pero el cubo de 2 es solo 8. Por otro lado, el valor $\frac{1}{4}$ para *x* es demasiado pequeño: porque $10^{\frac{1}{4}}$ es más pequeño que 2, ya que la cuarta potencia del primer número es 10, pero la del segundo es 16. De esto se puede ver que *x*, o sea el $\log 2$ es menor que $\frac{1}{3}$ y aún mayor que $\frac{1}{4}$; también se puede decidir para cada quebrado entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, si es demasiado grande o demasiado pequeño. Por ejemplo, $\frac{2}{7}$ es menor que $\frac{1}{3}$ y mayor que $\frac{1}{4}$; si se quisiera tomar $\frac{2}{7}$ para *x*, tendría que ser $10^{\frac{2}{7}} = 2$, pero si esto fuera así, las séptimas potencias también deberían ser iguales. Pero la séptima potencia de $10^{\frac{2}{7}} = 10^2 = 100$, que debería ser igual a la séptima potencia de 2; dado que ahora la séptima potencia de 2 es $= 128$ y, por lo tanto, mayor que aquella, entonces $10^{\frac{2}{7}}$ también es menor que 2, y, por lo tanto, $\frac{2}{7}$ menor que $\log 2$: o sea, $\log 2$ es mayor que $\frac{2}{7}$ y sin embargo menor que $\frac{1}{3}$.

Semejante quebrado es $\frac{3}{10}$; si ahora fuese $10^{\frac{3}{10}} = 2$, entonces las décimas potencias deberían ser iguales: pero la décima potencia de $10^{\frac{3}{10}}$ es $= 10^3 = 1000$, y la décima potencia de 2 es $= 1024$; de donde concluimos que $\frac{3}{10}$ todavía es demasiado pequeño, o que $\log 2$ es más grande que $\frac{3}{10}$ y aún más pequeño que $\frac{1}{3}$.

236.

Esta consideración sirve para mostrar que $\log 2$ tiene una magnitud determinada, ya que sabemos que ciertamente es más grande que $\frac{3}{10}$ y aún más pequeño que $\frac{1}{3}$. No podemos ir más lejos aquí, y debido a que todavía no conocemos el valor verdadero, queremos usar la letra x para él, de modo que $\log 2 = x$, y mostraremos cómo se pueden encontrar los logaritmos de muchísimos otros números, una vez que se haya encontrado su valor. Para ese fin sirve la ecuación dada arriba, $\log cd = \log c + \log d$, o sea que el logaritmo de un producto se encuentra si se suman los logaritmos de los factores.

237.

Ahora que $\log 2 = x$, y $\log 10 = 1$, obtenemos $\log 20 = x + 1$, y $\log 200 = x + 2$, además $\log 2000 = x + 3$, asimismo $\log 20000 = x + 4$ y $\log 200000 = x + 5$, etc.

238.

Como además $\log c^2 = 2\log c$ y $\log c^3 = 3\log c$, $\log c^4 = 4\log c$, etc., entonces obtenemos $\log 4 = 2x$, $\log 8 = 3x$, $\log 16 = 4x$, $\log 32 = 5x$, $\log 64 = 6x$, etc. De esto también encontramos

$$\log 40 = 2x+1,\ \log 400 = 2x+2,\ \log 4000 = 2x+3,\ \log 40000 = 2x+4,\ \text{etc.}$$

$$\log 80 = 3x+1,\ \log 800 = 3x+2,\ \log 8000 = 3x+3,\ \log 80000 = 3x+4,\ \text{etc.}$$

$$\log 160 = 4x+1,\ \log 1600 = 4x+2,\ \log 16000 = 4x+3,\ \log 160000 = 4x+4,\ \text{etc.}$$

239.

Como también se ha encontrado $\log \frac{c}{d} = \log c - \log d$, entonces, tomando $c = 10$ y $d = 2$, y porque $\log 10 = 1$ y $\log 2 = x$, conseguimos $\log \frac{10}{2}$, que es $\log 5 = 1 - x$, por lo tanto obtenemos

$$\log 50 = 2 - x,\ \log 500 = 3 - x,\ \log 5000 = 4 - x,\ \text{etc.},$$

además,

$$\log 25 = 2 - 2x,\ \log 125 = 3 - 3x,\ \log 625 = 4 - 4x,\ \text{etc.},$$

Por eso llegamos a lo siguiente:

$$\log 250 = 3 - 2x,\ \log 2500 = 4 - 2x,\ \log 25000 = 5 - 2x,$$

etc., además,

$$\log 1250 = 4 - 3x,\ \log 12500 = 5 - 3x,\ \log 125000 = 6 - 3x,$$

etc., además,

$$\log 6250 = 5 - 4x,\ \log 62500 = 6 - 4x,\ \log 625000 = 7 - 4x,$$

etcétera.

240.

Si también se hubiera encontrado el logaritmo de 3, se podrían determinar los logaritmos de un número infinito más de números. Ponemos la letra y para $\log 3$, por lo que tendremos:

$$\log 30 = y+1, \quad \log 300 = y+2, \quad \log 3000 = y+3, \text{ etc.,}$$
$$\log 9 = 2y, \quad \log 27 = 3y, \quad \log 81 = 4y, \quad \log 243 = 5y, \text{ etc.,}$$

por lo tanto todavía se puede encontrar más:

$$\log 6 = x+y, \quad \log 12 = 2x+y, \quad \log 18 = x+2y,$$

asimismo también

$$\log 15 = \log 3 + \log 5 = y+1-x.$$

241.

Hemos visto arriba que todos los números se pueden generar de los llamados números primos por medio de la multiplicación. Entonces, si se conocieran los logaritmos de los números primos, los logaritmos de todos los demás números se podrían encontrar sumándolos nada más, como por ejemplo del número 210, que consiste en los factores $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, el logaritmo será $=\log 2+\log 3+\log 5+\log 7$; de la misma forma, ya que $360 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$, entonces $\log 360 = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5$, lo que aclara que mediante los logaritmos de los números primos se pueden determinar los logaritmos de todos los otros números. Por lo tanto, al elaborar las tablas logarítmicas, solo tiene que ocuparse de que se encuentren los logaritmos de todos los números primos.

CAPÍTULO 23

DEL MODO DE REPRESENTAR LOS LOGARITMOS

242.

Hemos visto que el logaritmo de 2 es mayor que $\frac{3}{10}$ y menor que $\frac{1}{3}$; o sea que el exponente de 10 debe estar entre estas dos fracciones para que la potencia sea igual a 2. Pero uno puede poner la fracción que uno quiera, la potencia siempre será un número irracional, y será o mayor o menor que 2. Por eso el logaritmo de 2 no puede expresarse por ninguna de esas fracciones. Por lo tanto, uno debe conformarse con determinar su valor mediante aproximaciones de manera tan precisa que el error se vuelva imperceptible. Para esto se usan las llamadas *fracciones decimales*, cuya naturaleza y consistencia merecen una explicación clara.

243.

Se sabe que en la manera habitual de escribir todos los números con diez dígitos

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

solo los dígitos en primer lugar a mano derecha tienen su significado natural, y en segundo lugar su significado se vuelve 10 veces mayor, en tercer lugar 100 veces, en cuarto lugar 1000 veces, y así sucesivamente, en cada una de los siguientes posiciones 10 veces más grande que en la anterior. Así, en el número 1765, en la primera posición a la derecha está el número 5, que realmente significa 5, en la segunda posición está 6, que, sin embargo, no indica 6, sino $10 \cdot 6$ o 60; la cifra 7 en la tercera posición significa $100 \cdot 7$ o 700, y finalmente el 1 en la cuarta posición significa 1000, por lo que este número también se pronuncia diciendo:

mil setecientos sesenta y cinco.

244.

Como el significado de los dígitos siempre es 10 veces mayor de derecha a izquierda y, en consecuencia, siempre es 10 veces menor de izquierda a derecha, entonces, según esta ley, se puede avanzar a mano derecha, porque entonces el significado de los dígitos sigue haciéndose 10 veces más pequeño. Pero aquí hay que notar el lugar donde los dígitos tienen su valor natural, esto se hace con una coma, por lo que se coloca detrás de este lugar. Por lo tanto, si se encuentra este número escrito como 36, 54892, entonces se debe entenderlo de la siguiente manera: primero, el número 6 tiene su significado natural, y el número 3 en la segunda posición a la izquierda 30. Pero después de la coma, el número 5 solo significa $\frac{5}{10}$, el siguiente 4 es $\frac{4}{100}$, la cifra 8 significa $\frac{8}{1000}$, la cifra 9 $\frac{9}{10000}$ y la cifra 2 $\frac{2}{100000}$; de lo cual se puede ver que cuanto más avanzan estos dígitos hacia la derecha, sus significados se vuelven cada vez más pequeños y finalmente tan pequeños que se pueden considerar nulos.

245.

Esta forma de expresar los números ahora se llama *fracción decimal*, y de esta manera los logaritmos también se presentan en las tablas. En ellas, el logaritmo de 2, por ejemplo, se expresa como 0,3010300. Ahí hay que tener en cuenta que debido a que dice 0 antes de la coma, este logaritmo no llega a un entero, y que su valor es

$$\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}.$$

Entonces, se podrían haber omitido los dos últimos ceros, pero ellos sirven para señalar que ninguna de estas partecitas realmente existe. Sin embargo, no se niega que aún puede haber partecitas más pequeñas, pero debido a su tamaño pequeño se consideran nulas.

246.

El logaritmo de 3 se encuentra expresado como 0,4771213; de lo cual se ve que no llega a un entero, sino que consiste de estas fracciones

$$\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}.$$

Pero no hay que creer que este logaritmo esté expresado totalmente exacto. Pero lo que se sabe es que el error es ciertamente menos de $\frac{1}{10000000}$, que es realmente tan pequeño que se puede ignorar en la mayoría de los cálculos.

247.

De esta forma, el logaritmo de l es 0,0000000 porque es realmente 0; de 10, sin embargo, el logaritmo es 1,0000000, de lo que se puede ver que es simplemente l. Sin embargo, el logaritmo de 100 es 2,0000000, o simplemente 2, de los cuales se puede ver que de los números entre 10 y 100, o que están escritos con dos dígitos, los logaritmos se tienen que ubicar entre 1 y 2, y en consecuencia se pueden expresar por 1 y una fracción decimal. Entonces $\log 50 = 1{,}6989700$, que es 1 más $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$. Pero de los números mayores que cien hasta 1000, los logaritmos contienen 2, junto con una fracción decimal; como $\log 800 = 2{,}9030900$. De 1000 a 10000 los logaritmos son mayores que 3. De 10000 a 100000 son mayores que 4 y así sucesivamente.

248.

Pero el logaritmo de los números menores que 10, los cuales se escriben con solo un dígito, aún no es un entero, y por eso llevan un 0 antes de la coma. En cualquier logaritmo se deben tener en cuenta dos partes. La primera está delante de la coma y muestra los enteros si hay alguno; la otra parte muestra las fracciones decimales que aún deben agregarse a los enteros. Por lo tanto, es fácil dar la primera parte o la parte entera del logaritmo de cualquier número, porque es 0 para todos los números que consisten en un solo dígito. Para los números que consisten de 2 dígitos, la misma es 1. Además, la misma es 2 para aquellos que consisten en 3 dígitos, y así sigue, la primera parte siendo siempre uno menos que el número de dígitos. Si se solicita el logaritmo de 1766, ya se sabe que la primera parte o parte entera tiene que ser 3.

249.

Al revés, tan pronto como se mire la primera parte de un logaritmo, se sabrá de cuántas cifras consistirá el número mismo, porque el número de cifras siempre es uno más que la parte entera del logaritmo. Si se hubiera encontrado el logaritmo 6,4771213 de un número desconocido, se sabría de inmediato que el mismo número consta de 7 cifras y así, debe ser mayor que 1000000. Este número es realmente 3000000: porque $\log 3000000 = \log 3 + \log 1000000$. Pero ahora es $\log 3 = 0,4771213$ y $\log 1000000 = 6$, sumados estos dos logaritmos dan 6,4771213.

250.

De cualquier logaritmo, lo principal es la fracción decimal que sigue a la coma, que, una vez conocida, puede servir para muchos números. Para mostrar esto, veamos el logaritmo del número 365, cuya primera parte es indiscutiblemente 2, pero para la otra parte, es decir, la fracción decimal, escribimos la letra *x* por razones de brevedad, así que $\log 365 = 2 + x$; de esto, si seguimos multiplicando por 10, obtenemos:

$$\log 3650 = 3 + x, \quad \log 36500 = 4 + x, \quad \log 365000 = 5 + x.$$

También podemos ir para atrás y dividir entre 10, entonces obtenemos

$$\log 36,5 = 1 + x, \quad \log 3,65 = 0 + x, \quad \log 0,365 = -1 + x,$$
$$\log 0,0365 = -2 + x, \quad \log 0,00365 = -3 + x,$$
etcétera.

251.

De todos estos números, que resultan de los cifras 365, ya tengan 0 detrás o delante, los logaritmos tienen la misma fracción decimal, y la diferencia solo está en el número entero delante de la coma, el cual, como hemos visto, también puede ser negativo; este caso se da si el número es menor que l. Debido a que las personas comunes que hacen cálculos no pueden manejar bien los números negativos, el número entero de los logaritmos se incrementa en 10 en estos casos, y en lugar de 0 antes de la coma, se acostumbra escribir 10, porque luego en vez de –l se obtiene 9; en lugar de –2 se obtiene 8; en lugar de –3 se obtiene 7, y así sucesivamente. En esto, no debe olvidarse que los números enteros antes de la coma exceden el valor verdadero en 10, para que no se concluya que el número consta de 10 o 9 u 8 cifras, sino que el número se tiene que empezar a escribir apenas después de la coma, en la primera posición, si 9 está presente, o en la segunda posición, si 8 está presente, o incluso en la tercera, si 7 está al inicio del logaritmo. De esta manera se presentan los logaritmos del seno en las tablas.

252.

En las tablas comunes, las fracciones decimales para los logaritmos constan de siete cifras, la última de las cuales indica las $\frac{1}{10000000}$ partes, y uno puede estar seguro de que no difieren de la verdad ni por una sola de tales partecitas, un error que generalmente no significa nada. Pero si se quiere calcular con mayor precisión, los logaritmos tendrán que contener más de siete cifras, lo que se da en las tablas grandes de VLACQ, donde los logaritmos están calculados con diez cifras.

253.

Ya que la primera parte de un logaritmo no tiene dificultad, no se establece ni se muestra en las tablas, sino que ahí solo se encuentran las siete cifras de la fracción decimal que conforman la segunda parte. En las tablas inglesas, se encuentran las mismas para todos los números hasta 100000 y si aún aparecen números más grandes, entonces están añadidas tablitas pequeñas donde se puede ver cuánto más se debe agregar a los logaritmos debido a las cifras adicionales que siguen.

254.

Por lo dicho, es fácil de entender cómo se debe sacar de la tabla el número que corresponde a un logaritmo encontrado. Para explicar mejor el asunto, multipliquemos, por ejemplo, los números 343 y 2401. Como se deben sumar sus logaritmos, el cálculo se plantea así:

$$
\begin{array}{rr}
 & \left.\begin{array}{rcr}\log 343 & = & 2{,}5352941\\ \log 2401 & = & 3{,}3803922\end{array}\right\}\ \text{sumado}\\ \cline{2-2}
 & \left.\begin{array}{r}5{,}9156863\\ 6847\end{array}\right\}\ \text{restado}\\ \cline{2-2}
\text{Así da} & 823543 \qquad\qquad\qquad 16\qquad\qquad\quad
\end{array}
$$

Esta suma es ahora el logaritmo del producto que estamos buscando, y de su primera parte, que es 5, podemos ver que el producto consta de 6 cifras, que se encontraron en base a la fracción decimal mediante la tabla: 823543, y este es realmente el producto que estamos buscando.

255.

Dado que los logaritmos ofrecen una ventaja importante particularmente al extraer las raíces, queremos explicar esto también con un ejemplo. Se debe encontrar la raíz cuadrada del número 10. Entonces solo hay que dividir el logaritmo de 10, que es 1,0000000, entre 2, en consecuencia el cociente, o sea 0,5000000, es el logaritmo de la raíz buscada. Por lo tanto, la raíz misma se encuentra en la tabla: 3,16228, de la cual el cuadrado realmente solo es más grande que 10 por $\frac{1}{100000}$ partecita.

FIN DE LA PRIMERA SECCIÓN

SEGUNDA SECCIÓN DE LA PRIMERA PARTE

DE LAS DIFERENTES OPERACIONES ARITMÉTICAS CON MAGNITUDES COMPUESTAS

CAPÍTULO 1

DE LA ADICIÓN CON MAGNITUDES COMPUESTAS

256.

Si se deben sumar dos o más expresiones, que constan de muchos términos, la adición a veces se suele indicar solo mediante ciertos signos, encerrando cada expresión entre paréntesis y conectándolas con el signo +. Entonces, si se deben sumar las expresiones $a+b+c$ y $d+e+f$, la suma se muestra así:

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

257.

En esta forma, la adición solo se insinúa pero no se lleva a cabo. Sin embargo, es fácil de entender que para efectuarla solo se tienen que omitir los paréntesis: dado que el número $d+e+f$ debe agregarse al primero, esto sucede si primero se escribe adicionalmente $+d$, después $+e$, y finalmente $+f$, entonces la suma será:

$$a+b+c+d+e+f.$$

Esto también se observaría si algunos términos tuvieran el signo –, que también se tendrían que agregar con su signo.

258.

Para dejarlo más claro, consideremos un ejemplo con puros números, y a la expresión $12-8$ agregamos $15-6$.

Entonces, primero se agregan 15, se tiene $12-8+15$; pero se agregó demasiado, porque solo se debería agregar $15-6$, y está claro que se agregaron 6 más de la cuenta; entonces, si se quitan estos 6, o sea se escriben con su signo, se tiene la suma verdadera

$$12-8+15-6.$$

De lo cual es evidente que la suma se encuentra escribiendo todos los términos juntos, cada uno con su signo.

259.

Así pues, si a la expresión $a-b+c$ se le debe sumar $d-e-f$, la suma se expresa de la siguiente forma

$$a-b+c+d-e-f.$$

En esto debe tenerse en cuenta que no importa el orden de los términos, sino que se puede mover arbitrariamente, siempre y cuando cada uno de ellos mantenga su signo antepuesto. Entonces la suma anterior también podría escribirse así:

$$c-e+a-f+d-b.$$

260.

Así, la adición no tiene la más mínima dificultad, sean cuales sean los términos. Por ejemplo, si a la expresión $2a^3+6\sqrt{b}-4\log c$ se debe sumar la expresión $5\sqrt[5]{a}-7c$, la suma será:

$$2a^3+6\sqrt{b}-4\log c+5\sqrt[5]{a}-7c,$$

y en esta suma también está permitido reubicar estos términos arbitrariamente, siempre y cuando cada uno mantenga su signo.

261.

Pero a menudo sucede que la suma encontrada de tal modo, puede ser resumida en forma mucho más corta, ya que a veces dos o más términos se cancelan completamente. Como cuando en la suma aparecen las expresiones $+a-a$, o $3a-4a+a$. Además, a veces, dos o más términos se pueden juntar en uno, como por ejemplo:

$$3a+2a=5a,\quad 7b-3b=+4b,\quad -6c+10c=+4c$$

$$5a-8a=-3a,\quad -7b+b=-6b,\quad -3c-4c=-7c$$

$$2a-5a+a=-2a,\quad -3b-5b+2b=-6b.$$

Estas abreviaciones tienen lugar cada vez que dos o más términos son completamente iguales respecto a las letras. En cambio, $2aa+3a$ no puede ser simplificado, y $2b^3-b^4$ tampoco se puede acortar.

262.

Veamos ahora algunos ejemplos de este tipo. Primero, se deben sumar las dos expresiones $a+b$ y $a-b$, según la regla anterior eso da $a+b+a-b$, pero ahora es $a+a=2a$ y $b-b=0$, por lo tanto la suma es $=2a$; ese ejemplo muestra la siguiente verdad muy útil:

Si a la suma de dos números $(a+b)$ se suma su diferencia $(a-b)$, sale dos veces el número más grande.

Además, consideramos los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{l|r}
3a-2b-c & a^3-2aab+2abb \\
5b-6c+a & -\ aab+2abb-b^3 \\
\hline
4a+3b-7c & a^3-3aab+4abb-b^3.
\end{array}$$

CAPÍTULO 2

DE LA SUSTRACCIÓN CON MAGNITUDES COMPUESTAS

263.

Si solo se quiere indicar la resta, se encierra cada expresión entre paréntesis, y a la que se debe restar se le antepone el signo –, y se añade a la expresión de la cual se restará. Por ejemplo, si de la expresión $a-b+c$ se debe restar $d-e+f$, la diferencia buscada se indica así:

$$(a-b+c)-(d-e+f),$$

donde se puede ver claramente que la última expresión se resta de la primera.

264.

Pero para llevar a cabo realmente la resta, debe tenerse en cuenta primero que si de una magnitud positiva como a se resta otra magnitud positiva $+b$, se obtendrá $a-b$.

Pero si se debe restar un número negativo como $-b$ de a, se obtendrá $a+b$, porque quitar una deuda es tanto como regalar algo.

265.

Ahora digamos que uno debe restar de la expresión $a-c$ el término $b-d$; entonces primero se quita b, se obtiene $a-c-b$; pero hemos quitado demasiado, porque solo deberíamos quitar $b-d$, y hemos quitado d más de la cuenta: tenemos que agregar esta d nuevamente, así obtenemos

$$a-c-b+d;$$

de donde aparentemente sale la regla, que los términos de la expresión que se debe restar, se tienen que escribir con signos opuestos.

266.

Con la ayuda de esta regla, es muy fácil llevar a cabo la sustracción, escribiendo tal cuál la expresión de la que se debe restar, pero agregando la expresión que se restará con signos opuestos. Entonces, en el primer ejemplo, ya que de $a-b+c$ debe restarse la expresión $d-e+f$, se obtiene

$$a-b+c-d+e-f.$$

Para explicar esto con puros números, réstese de $9-3+2$ la expresión $6-2+4$, se obtiene

$$9-3+2-6+2-4=0,$$

lo que inmediatamente salta a la vista, porque

$$9-3+2=8, \quad 6-2+4=8, \quad \text{y} \quad 8-8=0.$$

267.

Dado que la resta en sí no tiene más dificultades, todo lo que queda por decir es que, si hay dos o más términos en el resto que son idénticos respecto a las letras, se pueden abreviar según las mismas reglas que arriba se han dado en la adición.

268.

Ahora vamos a partir de $a+b$, que indica la suma de dos números; restamos su diferencia, es decir, $a-b$. Entonces primero se obtiene $a+b-a+b$; pero ahora $a-a=0$ y $b+b=2b$, en consecuencia el resto buscado es $2b$, que es el número más pequeño b, tomado dos veces.

269.

Para explicarlo más, añadimos algunos ejemplos:

$$\begin{array}{c|c|c} aa+ab+bb & 3a-4b+5c & a^3+3aab+3abb+b^3 \\ bb-ab+aa & 2b+4c-6a & a^3-3aab+3abb-b^3 \\ \hline 2ab & 9a-6b+c & 6aab+2b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a}+2\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-3\sqrt{b} \\ \hline +5\sqrt{b} \end{array}$$

CAPÍTULO 3

DE LA MULTIPLICACIÓN CON MAGNITUDES COMPUESTAS

270.

Si solo se quiere indicar una multiplicación, entonces cada expresión a multiplicar se encierra entre paréntesis y se escriben juntas, ya sea sin signo de operación, o con un punto en medio.

Por ejemplo, si hay que multiplicar las dos expresiones $a-b+c$ y $d-e+f$, entonces se muestro el producto de la siguiente forma:

$$(a-b+c)\cdot(d-e+f) \quad \text{o} \quad (a-b+c)(d-e+f).$$

Este modo se usa muy a menudo, porque en ella se puede ver inmediatamente qué factores conforman semejante producto.

271.

Pero para mostrar cómo se debe llevar a cabo semejante multiplicación, primero hay que decir que, para multiplicar una expresión como $a-b+c$, por ejemplo por 2, cada término, tendrá que multiplicarse separadamente por 2, y así sale

$$2a-2b+2c.$$

Esto también se aplica a todos los demás números. Si se multiplica la misma expresión por *d* se obtiene:

$$ad-bd+cd.$$

272.

Aquí hemos asumido que el número *d* es positivo; sin embargo, si un número negativo como $-e$ se multiplica, entonces se debe observar la regla dada arriba, que dice que dos signos desiguales multiplicados dan –, pero dos iguales dan +. Por lo tanto se obtiene:

$$-ae+be-ce.$$

273.

Ahora, para mostrar cómo se multiplica una expresión *A*, ya sea simple o compuesta, por una expresión compuesta como $d-e$, consideremos primero puros números y supongamos que *A* debe multiplicarse por $7-3$. Aquí está claro que se requieren cuatro veces *A*; si primero se toma siete veces *A*, entonces hay que restar el triple de *A*. Por lo tanto, también en general, si se multiplica por $d-e$, entonces primero se multiplica la expresión *A* por *d* y luego por *e* y se resta el último producto del primero, de manera que sale $dA-eA$. Ahora pongamos $A=a-b$, que debe multiplicarse por $d-e$, obtenemos:

$$\begin{array}{l} dA = ad - bd \\ eA = ae - be \\ \hline \qquad ad - bd - ae + be \end{array}$$

que es el producto solicitado.

274.

Ahora que hemos encontrado el producto $(a-b)\cdot(d-e)$ y estamos convencidos de su veracidad, queremos plantear este ejemplo de multiplicación con más claridad de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} a-b \\ d-e \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

de lo cual vemos que cada término de la expresión de arriba tiene que multiplicarse por cada uno de los de abajo, y con respecto a los signos, la regla dada anteriormente se aplica plenamente, y con esto se confirma de nuevo, por si acaso alguien tuviese alguna duda acerca de ella.

275.

Con esta regla, será fácil calcular el siguiente ejemplo: $a+b$ debe multiplicarse por $a-b$:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ \quad -ab-bb \\ \hline \end{array}$$

el producto será $aa-bb.$

276.

Si para a y b se ponen arbitrariamente números determinados, este ejemplo nos lleva a la siguiente verdad:

si la suma de dos números se multiplica por su diferencia, el producto es la diferencia de sus cuadrados, lo que se puede escribir así:

$$(a+b)(a-b)=aa-bb;$$

en consecuencia, la diferencia entre dos números cuadrados siempre es un producto, o puede dividirse, tanto por la suma como por la diferencia de las raíces, y por lo tanto no es un número primo. [*Nota del traductor: Naturalmente suponiendo que* $a-b$ *no sea* = 1.]

277.

Calculemos además los siguientes ejemplos:

I.)
$$\begin{array}{r}
2a-3\\
a+2\\
\hline
2aa-3a\quad\\
+4a-6\\
\hline
2aa+a-6
\end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{r}
4aa-6a+9\\
2a+3\\
\hline
8a^3-12aa+18a\quad\\
+12aa-18a+27\\
\hline
8a^3+27
\end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{r}
3aa-2ab-bb\\
2a-4b\\
\hline
6a^3-4aab-2abb\quad\\
-12aab+8abb+4b^3\\
\hline
6a^3-16aab+6abb+4b^3
\end{array}$$

$$
\text{IV.)}\quad
\begin{array}{l}
aa + 2ab + 2bb \\
aa - 2ab + 2bb \\
\hline
a^4 + 2a^3b + 2aabb \\
\quad - 2a^3b - 4aabb - 4ab^3 \\
\qquad\qquad + 2aabb + 4ab^3 + 4b^4 \\
\hline
a^4 + 4b^4
\end{array}
$$

$$
\text{V.)}\quad
\begin{array}{l}
2aa - 3ab - 4bb \\
3aa - 2ab + bb \\
\hline
6a^4 - 9a^3b - 12aabb \\
\quad - 4a^3b + 6aabb + 8ab^3 \\
\qquad\qquad + 2aabb - 3ab^3 - 4b^4 \\
\hline
6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4
\end{array}
$$

$$
\text{VI.)}\quad
\begin{array}{l}
aa + bb + cc - ab - ac - bc \\
a + b + c \\
\hline
a^3 + abb + acc - aab - aac - abc \\
\quad - abb \qquad + aab \qquad - abc + b^3 + bcc - bbc \\
\qquad - acc \qquad + aac - abc \qquad - bcc + bbc + c^3 \\
\hline
a^3 - 3abc + b^3 + c^3
\end{array}
$$

278.

Si se van a multiplicar más de dos expresiones, es fácil entender que después de multiplicar dos de ellas, el producto debe multiplicarse sucesivamente por las otras, y que no importa en qué orden se lleven a cabo. Como ejemplo encontraremos el producto de los siguientes cuatro factores:

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ (a+b) & (aa+ab+bb) & (a-b) & (aa-ab+bb) \end{array}$$

Primero se multiplican los factores I. y II.:

$$\begin{array}{rl} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{I.} & a+b \\ \hline & a^3+aab\quad +abb \\ & \qquad +aab\quad +abb\ +b^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3+2aab+2abb+b^3 \end{array}$$

Después se multiplican los factores III. y IV.:

$$\begin{array}{rl} \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3-aab\quad +abb \\ & \qquad -aab\quad +abb\ -b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3-2aab+2abb-b^3 \end{array}$$

Ahora todavía queda multiplicar el producto I. II. por el producto III. IV.

$$\begin{array}{l} \text{I. II.} = a^3+2aab+2abb+b^3 \\ \text{III. IV.} = a^3-2aab+2abb-b^3 \\ \hline a^6+2a^5b\ +2a^4bb+\ a^3b^3 \\ \quad -2a^5b\ -4a^4bb-4a^3b^3-2aab^4 \\ \qquad +2a^4bb+4a^3b^3+4aab^4+2ab^5 \\ \qquad\qquad -\ a^3b^3-2aab^4-2ab^5-b^6 \\ \hline a^6-b^6 \end{array}$$

Este es el producto buscado.

279.

Ahora cambiemos el orden en este mismo ejemplo y, multiplicamos la expresión I. por la III., y después la expresión II. por la IV.:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & a+b \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & aa+ab \\ & \quad -ab-bb \\ \hline \text{I. III.} = & aa-bb \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \hline & a^4+a^3b+aabb \\ & \quad -a^3b-aabb-ab^3 \\ & \qquad +aabb+ab^3+b^4 \\ \hline \text{II. IV.} = & a^4+aabb+b^4 \end{array}$$

Ahora todavía queda multiplicar el producto II. IV. por el producto I. III.:

$$\begin{array}{rl} \text{II. IV.} = & a^4+aabb+b^4 \\ \text{I. III.} = & aa-bb \\ \hline & a^6+a^4bb+\quad aab^4 \\ & \quad -a^4bb-aab^4-b^6 \\ \hline & a^6-b^6 \end{array}$$

que es el producto buscado.

280.

Además, queremos hacer el cálculo en un orden diferente, y multiplicar primero la expresión I. por la IV., y después la II. por la III.:

$$\begin{array}{rl} \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \text{I.} & a+b \\ \hline & a^3-aab+abb \\ & \quad +aab-abb+b^3 \\ \hline \text{I. IV.} = & a^3+b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3+aab+abb \\ & \quad -aab-abb-b^3 \\ \hline \text{II. III.} = & a^3-b^3 \end{array}$$

Ahora todavía falta multiplicar el producto I. IV. por el producto II. III.:

$$\begin{array}{r} \text{I. IV.} = a^3 + b^3 \\ \text{II. III.} = a^3 - b^3 \\ \hline a^6 + a^3b^3 \qquad \\ - a^3b^3 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6 \qquad \end{array}$$

281.

Vale la pena explicar este ejemplo con números. Por lo tanto, sea $a = 3$ y $b = 2$; entonces uno tiene $a + b = 5$ y $a - b = 1$; además $aa = 9$, $ab = 6$, $bb = 4$. Entonces $aa + ab + bb = 19$ y $aa - ab + bb = 7$. Por lo tanto, se pide este producto:

$$5 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 7, \text{ que es } 665.$$

Pero es $a^6 = 729$ y $b^6 = 64$, en consecuencia $a^6 - b^6 = 665$, como ya hemos visto antes.

CAPÍTULO 4

DE LA DIVISIÓN CON MAGNITUDES COMPUESTAS

282.

Si solo se desea indicar la división, se puede usar el signo habitual de una fracción, escribiendo el dividendo sobre la línea y el divisor debajo de la línea; o se encierran ambos entre paréntesis y se escribe el divisor después del dividendo con dos puntos en medio. Si por ejemplo se debe dividir $a + b$ entre $c + d$, entonces el cociente, según el primer modo, se muestra así: $\frac{a+b}{c+d}$.

Pero según el segundo modo así: $(a+b):(c+d)$. Ambos se pronuncian $a+b$ dividido entre $c+d$.

283.

Si una expresión compuesta se debe dividir entre una simple, cada término se divide por separado, por ejemplo:

$$6a-8b+4c \text{ dividido entre } 2 \text{ da } 3a-4b+2c$$

y

$$(aa-2ab):(a)=a-2b.$$

También

$$(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb,$$

además

$$(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc,$$

y

$$(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c \text{, etc.}$$

284.

Si un término del dividendo no se puede dividir, el cociente resultante se indica mediante un quebrado. Por ejemplo, si se debe dividir $a+b$ entre a, se obtiene el cociente $1+\frac{b}{a}$. Además:

$$(aa-ab+bb):(aa)=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}$$

Asimismo, si se debe dividir $(2a+b)$ entre 2, entonces se obtiene $a+\frac{b}{2}$, en lo que se tiene que tener en cuenta que en lugar de $\frac{b}{2}$ también se puede escribir $\frac{1}{2}b$, porque $\frac{1}{2}$ multiplicado por b es tanto como $\frac{b}{2}$. De la misma manera, $\frac{b}{3}$ es tanto como $\frac{1}{3}b$ y $\frac{2b}{3}$ es tanto como $\frac{2}{3}b$, etc.

285.

Pero si el divisor mismo es una magnitud compuesta, entonces la división tiene más dificultades, que a menudo pueden presentarse en las situaciones menos esperadas; si la división no es posible, uno se tiene que conformar con indicar el cociente por medio de un quebrado, según lo dicho anteriormente; por eso vamos a tomar en consideración tales casos en que la división sea realmente factible.

286.

Conforme a lo dicho, vamos a dividir el dividendo $ac-bc$ entre el divisor $a-b$: por lo tanto, el cociente debe ser tal que si el divisor $a-b$ se multiplica por él, salga el dividendo $ac-bc$. Ahora es fácil ver que el cociente tiene que contener c, porque de lo contrario no podría salir ac. Ahora para ver si c es el cociente completo, solo hay que multiplicar el divisor por eso y ver si sale todo el dividendo, o solo una parte de él. En nuestro caso, sin embargo, si $a-b$ se multiplica por c, obtenemos $ac-bc$, que es el dividendo mismo: en consecuencia, c es el cociente completo. También está claro que

$$(aa+ab):(a+b)=a,$$

y
$$(3aa-2ab):(3a-2b)=a,$$

además
$$(6aa-9ab):(2a-3b)=3a.$$

287.

De esta manera, sin duda se encuentra una parte del cociente. Si la misma multiplicada por el divisor todavía no llega al dividendo, entonces también hay que dividir el resto entre el divisor, así de nuevo se obtiene una parte del cociente. Esto se hace hasta que se obtenga el cociente completo.

Por ejemplo, vamos a dividir $aa+3ab+2bb$ entre $a+b$; ahí está claro de inmediato que el cociente debe contener el término a, porque de lo contrario no podría salir aa. Pero si se multiplica el divisor $a+b$ por a, sale $aa+ab$, restando del dividendo queda $2ab+2bb$, que por lo tanto todavía tiene que dividirse entre $a+b$, donde inmediatamente salta a la vista que el cociente tiene que contener $2b$. Ahora, multiplicado $2b$ por $a+b$, da justamente $2ab+2bb$; en consecuencia, el cociente que estamos buscando es $a+2b$, porque multiplicado por el divisor $a+b$ da el dividendo. Toda esta operación se presenta en la siguiente forma:

$$\begin{array}{rll} a+b) & aa+3ab+2bb & (a+2b \\ & aa+ab & \\ \hline & +2ab+2bb & \\ & +2ab+2bb & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

288.

Para facilitar esta operación, uno elige una parte del divisor, como se hizo arriba con la a, que se escribe primero y según esta letra también se escribe el dividendo en tal orden que las potencias superiores de esta misma letra a se ponen primero, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{rll} a-b) & a^3-3aab+3abb-b^3 & (aa-2ab+bb \\ & a^3-aab & \\ \hline & -2aab+3abb & \\ & -2aab+2abb & \\ \hline & +abb-b^3 & \\ & +abb-b^3 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{rl}
a+b) & aa-bb \quad (a-b \\
 & aa+ab \\
\hline
 & \quad -ab-bb \\
 & \quad -ab-bb \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
&
\begin{array}{rl}
3a-2b) & 18aa- \quad 8bb \quad (6a+4b \\
 & 18aa-12ab \\
\hline
 & \qquad +12ab-8bb \\
 & \qquad +12ab-8bb \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
a+b) & a^3+b^3 \quad (aa-ab+bb \\
 & a^3+aab \\
\hline
 & \quad -aab+b^3 \\
 & \quad -aab-abb \\
\hline
 & \qquad\quad +abb+b^3 \\
 & \qquad\quad +abb+b^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
2a-b) & 8a^3-b^3 \quad (4aa+2ab+bb \\
 & 8a^3-4aab \\
\hline
 & \quad +4aab-b^3 \\
 & \quad +4aab-2abb \\
\hline
 & \qquad\quad +2abb-b^3 \\
 & \qquad\quad +2abb-b^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
aa-2ab+bb) & a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4 \quad (aa-2ab+bb \\
 & a^4-2a^3b+aabb \\ \cline{2-2}
 & -2a^3b+5aabb-4ab^3 \\
 & -2a^3b+4aabb-2ab^3 \\ \cline{2-2}
 & +\ aabb-2ab^3+b^4 \\
 & +\ aabb-2ab^3+b^4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
aa-2ab+4bb) & a^4+4aabb+16b^4 \quad (aa+2ab+4bb \\
 & a^4-2a^3b\quad +4aabb \\ \cline{2-2}
 & +2a^3b\quad +16b^4 \\
 & +2a^3b\quad -4aabb+8ab^3 \\ \cline{2-2}
 & \quad +4aabb-8ab^3+16b^4 \\
 & \quad +4aabb-8ab^3+16b^4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
aa-2ab+2bb) & a^4+4b^4 \quad (aa+2ab+2bb \\
 & a^4-2a^3b\quad +2aabb \\ \cline{2-2}
 & +2a^3b\quad -2aabb+4b^4 \\
 & +2a^3b\quad -4aabb+4ab^3 \\ \cline{2-2}
 & \quad +2aabb-4ab^3+4b^4 \\
 & \quad +2aabb-4ab^3+4b^4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
1-2x+xx) & 1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5 \;\; (1-3x+3xx-x^3 \\
 & \underline{1-2x+xx} \\
 & \quad -3x+9xx-10x^3 \\
 & \quad \underline{-3x+6xx-3x^3} \\
 & \qquad +3xx-7x^3+5x^4 \\
 & \qquad \underline{+3xx-6x^3+3x^4} \\
 & \qquad\qquad -x^3+2x^4-x^5 \\
 & \qquad\qquad \underline{-x^3+2x^4-x^5} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

CAPÍTULO 5

DE LA RESOLUCIÓN DE LOS QUEBRADOS EN SERIES INFINITAS

289.

Si el dividendo no se puede dividir entre el divisor, el cociente se expresa mediante un quebrado, como ya se mostró anteriormente.

Por ejemplo, si se debe dividir 1 entre $1-a$, se obtiene el quebrado $\frac{1}{1-a}$. Pero también se puede efectuar la división según las reglas anteriores, y continuar hasta que uno quiera, porque entonces siempre resulta el cociente verdadero, aunque en formas diferentes.

290.

Para mostrar esto, dividamos realmente el dividendo l entre el divisor $1-a$ como sigue:

$$\begin{array}{l} 1-a)\;\;1\;\;(1+\frac{a}{1-a} \\ \quad\;\; +1-a \\ \hline \text{resto} + a \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{l} 1-a)\;\;1\;\;(1+a+\frac{aa}{1-a} \\ \quad\;\; +1-a \\ \hline \qquad +a \\ \qquad +a-aa \\ \hline \text{resto}\;\; +aa \end{array}$$

Para encontrar aún más formas, dividimos aa entre $1-a$ como:

$$\begin{array}{l} 1-a)\;\;aa\;\;(aa+\frac{a^3}{1-a} \\ \quad\;\; +aa-a^3 \\ \hline \qquad\quad +a^3 \end{array} \quad \text{además} \quad \begin{array}{l} 1-a)\;\;a^3\;\;(a^3+\frac{a^4}{1-a} \\ \quad\;\; +a^3-a^4 \\ \hline \qquad\quad +a^4 \end{array}$$

$$\text{además} \quad \begin{array}{l} 1-a)\;\;a^4\;\;(a^4+\frac{a^5}{1-a} \\ \quad\;\; +a^4-a^5 \\ \hline \qquad\quad +a^5, \text{ etc.} \end{array}$$

291.

De esto vemos que podemos expresar el quebrado $\frac{1}{1-a}$ en todas las siguientes formas:

I.) $1+\frac{a}{1-a}$ II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$ III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$

IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$ V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, etc.

Consideremos la primera forma $1+\frac{a}{1-a}$. Ahora 1 es tanto como $\frac{1-a}{1-a}$: entonces $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Para la segunda forma $1+a+\frac{aa}{1-a}$ hay que llevar toda la parte $1+a$ al denominador $1-a$, se obtiene $\frac{1-aa}{1-a}$, sumando $\frac{+aa}{1-a}$ da $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, esto es $\frac{1}{1-a}$. Para la tercera forma

$1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, la parte entera llevada al denominador $1-a$ da $\frac{1-a^3}{1-a}$, sumando el quebrado $\frac{a^3}{1-a}$ da $\frac{1}{1-a}$; lo que aclara que todas las formas, de hecho, son tanto como la fracción dada $\frac{1}{1-a}$.

292.

Por eso se puede continuar de esta manera hasta donde uno quiera, sin ser necesario hacer más cálculos. Entonces será:

$$\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+\frac{a^8}{1-a}.$$

Incluso, también se puede continuar, sin parar jamás, y con eso el quebrado dado $\frac{1}{1-a}$ se resuelve en una serie infinita, que es:

$$1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12}, \text{ etc.},$$

hasta el infinito. Y de esta serie infinita se puede decir con razón que su valor es tanto como la fracción $\frac{1}{1-a}$.

293.

Esto parece muy extraño al principio; sin embargo, será comprensible considerando algunos casos. Sea primero $a=1$, entonces nuestra serie se convierte en $1+1+1+1+1+1+1+1+1$, etc., hasta el infinito, que tiene que ser igual a la fracción $\frac{1}{1-1}$, o sea $\frac{1}{0}$. Pero ya hemos notado anteriormente que $\frac{1}{0}$ es un número infinitamente grande, y esto se confirma aquí nuevamente del modo más hermoso.

Pero si se pone $a=2$, entonces nuestra serie se convierte en

$$=1+2+4+8+16+32+64, \text{ etc.},$$

hasta el infinito, cuyo valor debe ser $\frac{1}{1-2}$, es decir $\frac{1}{-1}=-1$; que a primera vista todavía parece contradictorio.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que si uno desea detenerse en algún lugar de la serie anterior, siempre se tiene que poner un quebrado.
Por ejemplo, si nos detenemos en 64, entonces a

$$1+2+4+8+16+32+64$$

tenemos que agregarle la fracción $\frac{128}{1-2}$, o sea $\frac{128}{-1}=-128$, lo que resulta en $127-128$, que es -1.

Pero si se continúa sin fin, el quebrado de hecho es omitido, pero uno no se para.

294.

Esto se puede observar si para *a* se suponen números mayores que 1. Pero si toman números más pequeños para *a*, todo es más fácil de entender.

Sea p. ej. $a=\frac{1}{2}$, entonces se obtiene $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, que será igual a la siguiente serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}, \text{ etc.},$$

sin fin. Si entonces se toman solo dos términos, se tiene $1+\frac{1}{2}$, y así todavía falta $\frac{1}{2}$. Si se toman tres términos, se tiene $1\frac{3}{4}$, aún falta $\frac{1}{4}$; si se toman cuatro términos, entonces se tiene $1\frac{7}{8}$, todavía falta $\frac{1}{8}$: de eso se ve que cada vez falta menos, por lo tanto, si se continúa infinitamente, no debe faltar absolutamente nada.

295.

Si se pone $a=\frac{1}{3}$, entonces nuestra fracción se convierte en $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, que por lo tanto tiene que ser igual a la siguiente serie: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$, etc., hasta el infinito. Si se toman dos términos, se tiene $1\frac{1}{3}$, aún falta $\frac{1}{6}$. Si se toman tres términos, se tiene $1\frac{4}{9}$, aún falta $\frac{1}{18}$. Si se toman cuatro términos, se tiene $1\frac{13}{27}$, aún falta $\frac{1}{54}$. Ahora que el error siempre se hace tres veces menor, entonces tiene que desaparecer finalmente.

296.

Pongamos $a=\frac{2}{3}$, entonces la fracción se convierte en $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$, pero la serie será:

$$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}, \text{ etc., hasta el infinito.}$$

Si primero se toma $1\frac{2}{3}$, todavía falta $1\frac{1}{3}$, si se toman tres términos $2\frac{1}{9}$, faltan aún $\frac{8}{9}$, si se toman cuatro términos $2\frac{11}{27}$, faltan aún $\frac{16}{27}$.

297.

Sea $a=\frac{1}{4}$, entonces la fracción se convierte en $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=1\frac{1}{3}$, pero la serie será: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$, etc. Si se toman dos términos $1\frac{1}{4}$, todavía falta $\frac{1}{12}$; si se toman tres términos, se tiene $1\frac{5}{16}$, faltan aún $\frac{1}{48}$, etc.

298.

Del mismo modo, el quebrado $\frac{1}{1+a}$ puede resolverse en una serie infinita, si realmente se divide el numerador 1 entre el denominador $1+a$ como sigue:

$$
\begin{array}{lllllll}
1+a) & 1 & (1-a+aa-a^3+a^4 \\
 & \underline{1+a} & & & & & \\
 & \quad -a & & & & & \\
 & \quad \underline{-a-aa} & & & & & \\
 & \qquad\quad +aa & & & & & \\
 & \qquad\quad \underline{+aa+a^3} & & & & & \\
 & \qquad\qquad\quad -a^3 & & & & & \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-a^3-a^4} & & & & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad +a^4 & & & & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^4+a^5} & & & & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^5, \text{ etc.} & & & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto, nuestra fracción $\frac{1}{1+a}$ es igual a esta serie infinita:

$$1-a+aa-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7, \text{ etc.}$$

299.

Si se pone $a=1$, entonces se obtiene esta extraña igualdad:

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1, \text{ etc.},$$

hasta el infinito; esto parece absurdo: porque si uno se para en cualquier lugar donde esté -1, la serie da 0; pero si se termina en cualquier lugar donde esté $+1$, la serie da 1. Sin embargo, de esto se puede entender el asunto, porque si uno continúa sin fin, y no se tiene que terminar ni en -1 ni en $+1$, entonces no puede resultar ni 1 ni 0, sino algo intermedio que es $\frac{1}{2}$.

300.

Además, sea $a=\frac{1}{2}$, entonces nuestra fracción se convierte en $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, que será igual a la serie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$, etc., sin fin. Si se toman dos términos, se tiene $\frac{1}{2}$, que es demasiado pequeño por $\frac{1}{6}$. Si se toman tres términos, se tiene $\frac{3}{4}$, que es demasiado grande por $\frac{1}{12}$; si se toman cuatro términos, se tiene $\frac{5}{8}$, que es demasiado pequeño por $\frac{1}{24}$, etc.

301.

Si se pone $a=\frac{1}{3}$, entonces nuestra fracción se convierte en $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$, que será igual a la serie $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$, etc., sin fin. Si se toman dos términos, se tiene $\frac{2}{3}$, que es demasiado pequeño por $\frac{1}{12}$. Si se toman tres términos, se tiene $\frac{7}{9}$, que es demasiado grande por $\frac{1}{36}$; si se toman cuatro términos, se tiene $\frac{20}{27}$, que es demasiado pequeño por $\frac{1}{108}$, y así sucesivamente.

302.

Uno puede resolver el quebrado $\frac{1}{1+a}$ de otra manera, dividiendo l entre $a+1$, es decir:

$$
\begin{array}{l}
a+1)\quad 1 \quad (\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}, \text{ etc.} \\
\quad 1+\frac{1}{a} \\
\hline
\quad -\frac{1}{a} \\
\quad -\frac{1}{a}-\frac{1}{aa} \\
\hline
\qquad +\frac{1}{aa} \\
\qquad +\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3} \\
\hline
\qquad\quad -\frac{1}{a^3} \\
\qquad\quad -\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4} \\
\hline
\qquad\qquad +\frac{1}{a^4} \\
\qquad\qquad +\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \\
\hline
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^5}, \text{ etc.}
\end{array}
$$

Por lo tanto, nuestra fracción $\frac{1}{a+1}$ es igual a la serie

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}, \text{ etc., sin fin.}$$

Si se pone $a=1$, se obtendrá esta serie:

$$1-1+1-1+1-1+1, \text{ etc. } =\frac{1}{2} \text{ como antes.}$$

Si se pone $a=2$, se obtendrá esta serie:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}, \text{ etc.}$$

303.

Del mismo modo, de forma general, se puede resolver el quebrado $\frac{c}{a+b}$ en una serie:

$$
\begin{array}{lll}
a+b) & c & \left(\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4},\ \text{etc.}\right. \\
 & \underline{c+\frac{bc}{a}} & \\
 & -\frac{bc}{a} & \\
 & \underline{-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa}} & \\
 & \quad +\frac{bbc}{aa} & \\
 & \quad \underline{+\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3}} & \\
 & \qquad -\frac{b^3c}{a^3} &
\end{array}
$$

De donde obtenemos esta igualdad:

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4} \text{ hasta el infinito.}$$

Sea $a=2,\ b=4,$ y $c=3,$ entonces tenemos

$$\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12, \text{ etc.}$$

Sea $a=10,\ b=1,$ y $c=11,$ entonces tenemos

$$\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}, \text{ etc.}$$

Si se toma solo un término, entonces se tiene $\frac{11}{10}$, que es demasiado por $\frac{1}{10}$. Si se toman dos términos, se tiene $\frac{99}{100}$, que es muy poco por $\frac{1}{100}$. Si se toman tres términos, se tiene $\frac{1001}{1000}$, que es demasiado por $\frac{1}{1000}$, etc.

304.

Si el divisor consta de más partes, la división se puede continuar hasta el infinito de la misma manera.

Por ejemplo, dado el quebrado $\frac{1}{1-a+aa}$, entonces así se puede encontrar directamente la serie infinita que lo iguala:

$$
\begin{array}{l}
1-a+aa)\quad 1 \quad (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7, \text{etc.} \\
\qquad\qquad \underline{1-a+aa} \\
\qquad\qquad\quad +a-aa \\
\qquad\qquad\quad \underline{+a-aa+a^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -a^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-a^3+a^4-a^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^4+a^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-a^4+a^5-a^6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^6-a^7+a^8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a^7-a^8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+a^7-a^8+a^9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^9, \text{etc.}
\end{array}
$$

Por eso tenemos esta igualdad:

$$\frac{1}{1-a+aa}=1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}, \text{etc.},$$

sin fin. Si aquí se toma $a=1$, entonces se obtiene esta serie:

$$1=1+1-1-1+1+1-1-1+1+1, \text{etc.}$$

Esta serie contiene doblemente la serie encontrada arriba, $1-1+1-1+1$, etc. Ya que la serie de arriba era igual a $\frac{1}{2}$, no es ningúna sorpresa que esta tenga el valor de $\frac{2}{2}=1$.

Si se toma $a=\frac{1}{2}$, entonces se obtiene la igualdad:

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}, \text{ etc.}$$

Si se pone $a = \frac{1}{3}$, entonces se obtiene la igualdad:

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} \text{ o } \frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}, \text{ etc.}$$

Si aquí se toman cuatro términos, se obtiene $\frac{104}{81}$, que es menor que $\frac{9}{7}$ por $\frac{1}{567}$.

Además, pongamos $a = \frac{2}{3}$, entonces obtenemos la igualdad:

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}, \text{ etc.}$$

Esta serie tiene que ser igual a la anterior; entonces restamos la de arriba de esta, y obtenemos:

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}, \text{ etc.},$$

de la cual cuatro términos dan $-\frac{2}{81}$.

305.

De esta manera, todas las fracciones se pueden resolver en series infinitas, lo que no solo a menudo genera beneficios muy grandes, sino que también es muy extraño en sí mismo que una serie infinita, aunque nunca termine, pueda tener un valor determinado. Los inventos más importantes también se han derivado de esta base, por lo que este tema, de hecho, merece ser considerado con la mayor atención.

CAPÍTULO 6

DE LOS CUADRADOS DE MAGNITUDES COMPUESTAS

306.

Si se tiene que encontrar el cuadrado de una magnitud compuesta, solo hay que multiplicarla por sí misma, y el producto será su cuadrado.

Por lo tanto, el cuadrado de $a+b$ se encuentra de la manera siguiente:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ \quad\;\; +ab+\;\; bb \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

307.

Por lo tanto, si la raíz consta de dos partes que se suman, como $a+b$, su cuadrado consta primero de los cuadrados de cada parte, o sea, aa y bb; y luego también está el doble del producto de las dos partes, es decir, $2ab$, y toda la suma $aa+2ab+bb$ es el cuadrado de $a+b$.

Sea por ejemplo $a=10$ y $b=3$, de modo que se debe encontrar el cuadrado de 13; el cual entonces será $=100+60+9=169$.

308.

Con la ayuda de esta fórmula, ahora es fácil encontrar los cuadrados de números bastante grandes si se parten en dos partes.

Así, para encontrar el cuadrado de 57, se descompone este número en $50+7$; por lo tanto el cuadrado será:

$$2500+700+49=3249.$$

309.

De esto se puede ver que el cuadrado de $a+1$ será $aa+2a+1$. Ya que el cuadrado de a es aa, el cuadrado de $a+1$ se encuentra sumando $2a+1$ al cuadrado de a. En eso hay que tomar en cuenta que $2a+1$ es la suma de las dos raíces a y $a+1$. Entonces, dado que el cuadrado de 10 es 100, así el cuadrado de 11 será $=100+21$, y dado que el cuadrado de 57 es 3249, el cuadrado de 58 será $=3249+115=3364$. Y además el cuadrado de 59 será $=3364+117=3481$. Todavía más, el cuadrado de 60 será $3481+119=3600$, etc.

310.

El cuadrado de una magnitud compuesta como $a+b$ se indica por $(a+b)^2$; por eso tenemos

$$(a+b)^2 = aa+2ab+bb\,,$$

de donde se derivan las siguientes igualdades:

$$(a+1)^2 = aa+2a+1, \quad (a+2)^2 = aa+4a+4,$$
$$(a+3)^2 = aa+6a+9, \quad (a+4)^2 = aa+8a+16,$$

etcétera.

311.

Si la raíz es $a-b$, su cuadrado será $=aa-2ab+bb$, que por lo tanto consta de los cuadrados de ambas partes, pero restando el doble del producto.

Sea p. ej. $a=10$ y $b=1$, entonces el cuadrado de 9 será $=100-20+1=81$.

312.

Ahora que tenemos la igualdad $(a-b)^2 = aa-2ab+bb$, entonces tendremos $(a-1)^2 = aa-2a+1$; el cuadrado de $a-1$ se encuentra, si de aa se resta $2a-1$, que es la suma de las dos raíces a y $a-1$.

Sea p. ej. $a=50$, así que $aa=2500$ y $a-1=49$, por lo tanto

$$49^2 = 2500-99 = 2401.$$

313.

Esto también puede explicarse con fracciones, entonces, si se toma de raíz $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ (que da l), el cuadrado será:

$$\frac{9}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{25}{25} \text{ esto es 1.}$$

Además, el cuadrado de $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (que es $\frac{1}{6}$) será

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}.$$

314.

Si la raíz consta de más términos, el cuadrado se puede determinar de la misma manera: Así, el cuadrado de $a+b+c$ se encuentra de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
a+b+c \\
a+b+c \\
\hline
aa+ab+ac \qquad\quad +bc \\
\quad +ab+ac \quad +bb+bc \ +cc \\
\hline
aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc
\end{array}$$

de donde se puede ver que el cuadrado consiste primero en el cuadrado de cada parte de la raíz, y luego en los dobles productos de dos partes.

315.

Para ilustrar esto con un ejemplo, descomponemos el número 256 en estas tres partes: $200+50+6$; por lo tanto, el cuadrado estará compuesto de las siguientes partes:

40000	256
2500	256
36	1536
20000	1280
2400	512
600	65536

65536 y esto obviamente es igual a $256 \cdot 256$.

316.

Si algunos términos en la raíz son negativos, el cuadrado se encontrará de acuerdo con esta misma regla, siempre y cuando se preste atención al signo de cada uno de los dobles productos. Así, el cuadrado de $a-b-c$ será: $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc.$ Entonces, si el número 256 se representa como $300-40-4$, se obtiene:

Partes positivas	Partes negativas
$+90000$	-24000
1600	2400
320	-26400
16	
$+91936$	
-26400	

65536 cuadrado de 256, como arriba.

CAPÍTULO 7

DE LA EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA DE MAGNITUDES COMPUESTAS

317.

Para dar una regla segura de esto, tenemos que contemplar cuidadosamente el cuadrado de la raíz $a+b$, que es $aa+2ab+bb$, y buscar, al revés, cómo sacar la raíz del cuadrado dado. Al respecto hay que hacer las siguientes consideraciones.

318.

En primer lugar, dado que el cuadrado $aa+2ab+bb$ consta de varios términos, es seguro que la raíz también debe consistir de más de un término; y si el cuadrado está escrito de tal manera que las potencias de una letra, como a, siempre disminuyan, está claro que el primer término será el cuadrado del primer término de la raíz. Como en nuestro caso el primer término del cuadrado es aa, entonces es evidente que el primer término de la raíz debe ser a.

319.

Si ahora se ha encontrado el primer término de la raíz, es decir a, entonces hay que considerar el resto del cuadrado, que es $2ab+bb$, para ver cómo se le puede encontrar la otra parte de la raíz, que es b. Aquí notamos que lo demás, o sea aquel resto $2ab+bb$, puede ser representado por un producto $(2a+b)b$. Ya que este resto ahora tiene dos factores $2a+b$ y b, entonces este último, b, que es la segunda parte de la raíz, se encuentra dividiendo el resto $2ab+bb$ entre $2a+b$.

320.

Entonces, para encontrar la segunda parte de la raíz, hay que dividir el resto entre $2a+b$, porque entonces el cociente será la segunda parte de la raíz. En esta división, sin embargo, debe tenerse en cuenta que $2a$ es el doble de la primera parte de la raíz a, que ya se ha encontrado; pero el otro término b aún se desconoce, y su lugar tiene que quedar vacío todavía; no obstante, se puede hacer la división solo mirando el primer término $2a$. En cuanto se encuentre el cociente, que aquí es b, se tiene que poner en el lugar vacío y completar la división.

321.

Entonces, el cálculo para encontrar la raíz del cuadrado $aa+2ab+bb$, se puede plantear así:

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa+2ab+bb \quad (a+b \\
 & \underline{aa } \\
2a+b & +2ab+bb \\
 & \underline{+2ab+bb} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

322.

De esta manera, se puede encontrar la raíz cuadrada de otras expresiones compuestas, siempre y cuando sean cuadrados, como se ve en los siguientes ejemplos:

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa+6ab+9bb \quad (a+3b \\
 & \underline{aa } \\
2a+3b & +6ab+9bb \\
 & \underline{+6ab+9bb} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4aa-4ab+bb \quad (2a-b \\
 & 4aa \\
\hline
4a-b & -4ab+bb \\
 & \underline{-4ab+bb} \\
 & \quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9pp+24pq+16qq \quad (3p+4q \\
 & 9pp \\
\hline
6p+4q & +24pq+16qq \\
 & \underline{+24pq+16qq} \\
 & \quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25xx-60x+36 \quad (5x-6 \\
 & 25xx \\
\hline
10x-6 & -60x+36 \\
 & \underline{-60x+36} \\
 & \quad 0
\end{array}
$$

323.

Si todavía queda un resto en la división, esto es una señal de que la raíz consta de más de 2 términos. Entonces, los dos términos ya encontrados se consideran juntos como la primera parte, y del resto se encuentra el siguiente término de la raíz de la misma manera que antes, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc & (a+b-c \\
 & aa & \\
\hline
2a+b & +2ab-2ac-2bc+bb+cc & \\
 & +2ab \qquad\qquad\qquad +bb & \\
\hline
2a+2b-c & -2ac-2bc+cc & \\
 & -2ac-2bc+cc & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
 & a^4+2a^3+3aa+2a+1 & (aa+a+1 \\
 & a^4 & \\
\hline
2aa+a & +2a^3+3aa & \\
 & +2a^3+\ \ aa & \\
\hline
2aa+2a+1 & +2aa+2a+1 & \\
 & +2aa+2a+1 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
 & a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4 & (aa-2ab-2bb \\
 & a^4 & \\
\hline
2aa-2ab & -4a^3b+8ab^3 & \\
 & -4a^3b+4aabb & \\
\hline
2aa-4ab-2bb & -4aabb+8ab^3+4b^4 & \\
 & -4aabb+8ab^3+4b^4 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6 \quad (a^3-3aab+3abb-b^3} \\
\multicolumn{2}{l}{a^6} \\
\hline
2a^3-3aab & -6a^5b+15a^4bb \\
 & \underline{-6a^5b+\ 9a^4bb} \\
2a^3-6aab+3abb & +6a^4bb-20a^3b^3+15aab^4 \\
 & \underline{+6a^4bb-18a^3b^3+\ 9aab^4} \\
2a^3-6aab+6abb-b^3 & -2a^3b^3+\ 6aab^4-6ab^5+b^6 \\
 & \underline{-2a^3b^3+\ 6aab^4-6ab^5+b^6} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

324.

De esta regla se deduce fácilmente aquella que se da en los libros de aritmética para la extracción de la raíz cuadrada, como:

5'29 (23
4
43) 129
129
0

17'64 (42
16
82) 164
164
0

23'04 (48
16
88) 704
704
0

40'96 (64
36
124) 496
496
0

96'04 (98
81
188) 1504
1504
0

1'56'25 (125
1
22) 56
44
245) 1225
1225
0

99'80'01 (999
81
189) 1880
1701
1989) 17901
17901
0

325.

Pero si queda algo al final de la operación, es una señal de que el número dado no es un cuadrado y, por lo tanto, no se puede especificar su raíz. En tales casos, se usa el signo de raíz utilizado anteriormente, que se escribe delante de la expresión, la expresión misma se encierra entre paréntesis. Así, la raíz cuadrada de $aa+bb$ se indica de esta manera, $\surd(aa+bb)$; y $\surd(1-xx)$ indica la raíz cuadrada de $1-xx$.

En lugar de este signo raíz, también se puede usar el exponente fraccionario $\frac{1}{2}$. Entonces $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ también indica la raíz cuadrada de $aa+bb$.

[*Nota del traductor: En esta traducción se seguirá usando* $\sqrt{\ }$ *; por ejemplo* $\sqrt{aa+bb}$ *en lugar de* $\surd(aa+bb)$.]

CAPÍTULO 8

DEL CÁLCULO CON NÚMEROS IRRACIONALES

326.

Si se deben sumar dos o más expresiones irracionales, esto se hace como se indicó anteriormente, escribiendo todos los términos juntos con sus signos. Lo único que hay que tener en cuenta que cuando se reduce es que en lugar de $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ se escribe $2\sqrt{a}$, y que $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ se cancelan, es decir, no dan nada. Así, las expresiones $3+\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$ sumadas dan $4+2\sqrt{2}$, o $4+\sqrt{8}$; además, sumando $5+\sqrt{3}$ y $4-\sqrt{3}$ da 9; asimismo, sumando $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ resulta $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Tampoco la resta tiene ninguna dificultad, ya que solo los signos del número inferior, el que se debe restar, se tienen que leer con signos cambiados, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 4-\ \ \sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ \hline 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

Al multiplicar solo se debe tener en cuenta que $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{a}$ da a. En cambio, si hay números desiguales en el signo $\sqrt{\ }$, entonces $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{b}$ da $\sqrt{ab}$, de lo cual se pueden calcular los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4+2\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ \hline 8+4\sqrt{2} \\ \quad -4\sqrt{2}-4 \\ \hline 8-4=4 \end{array}$$

329.

Esto mismo también es válido con las magnitudes imaginarias, solo hay que tomar en cuenta que $\sqrt{-a}$ multiplicada por $\sqrt{-a}$ da $-a$.

Si se buscara el cubo de $-1+\sqrt{-3}$, esto se haría tomando primero el cuadrado y luego multiplicando otra vez por el número $-1+\sqrt{-3}$, de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{l}
-1+\ \ \sqrt{-3} \\
-1+\ \ \sqrt{-3} \\
\hline
+1-\ \ \sqrt{-3} \\
\quad -\ \ \sqrt{-3}-3 \\
\hline
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-1+\ \ \sqrt{-3} \\
\hline
+2+2\sqrt{-3} \\
-2\sqrt{-3}+6 \\
\hline
2+6=8
\end{array}
$$

330.

Respecto a la división, solo se tiene que poner un quebrado, el cual luego se puede convertir en otra forma para que el denominador se vuelva racional. Entonces, si el denominador es $a+\sqrt{b}$ y si se multiplica arriba y abajo por $a-\sqrt{b}$, el nuevo denominador será $aa-b$, por lo tanto, ya no tiene un signo de raíz. Dividamos p. ej. $3+2\sqrt{2}$ entre $1+\sqrt{2}$, así tenemos $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Ahora multiplicamos arriba y abajo por $1-\sqrt{2}$, y obtenemos:

para el numerador

$$
\begin{array}{l}
3+2\sqrt{2} \\
1-\ \ \sqrt{2} \\
\hline
3+2\sqrt{2} \\
\quad -3\sqrt{2}-4 \\
\hline
3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1
\end{array}
$$

para el denominador

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1-\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \underline{\quad -\sqrt{2}-2} \\ 1-2=-1 \end{array}$$

Entonces nuestra nueva fracción es $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Multiplíquese arriba y abajo por -1, entonces se obtiene el numerador $+\sqrt{2}+1$ y el denominador $+1$.

Ahora, $+\sqrt{2}+1$ es tanto como $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; porque $\sqrt{2}+1$ multiplicado por el divisor $1+\sqrt{2}$ da:

$$\begin{array}{l} 1+\ \sqrt{2} \\ \underline{1+\ \sqrt{2}} \\ 1+\ \sqrt{2} \\ \underline{\quad +\ \sqrt{2}+2} \\ 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

Además, $8-5\sqrt{2}$ dividido entre $3-2\sqrt{2}$ es $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Multiplicando arriba y abajo por $3+2\sqrt{2}$, se obtiene:

para el numerador

$$\begin{array}{l} 8-\ \ 5\sqrt{2} \\ \underline{3+\ \ 2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \underline{\qquad +16\sqrt{2}-20} \\ 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

y para el denominador

$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4\cdot 2 \\ \hline 9-8=+1 \end{array}$$

Por lo tanto el cociente es $4+\sqrt{2}$. La prueba es así:

$$\begin{array}{l} 4+\ \ \sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ \hline 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2} \end{array}$$

331.

De esta manera, tales quebrados siempre se pueden convertir en otros donde el denominador es racional. Así, la fracción $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, si se multiplica arriba y abajo por $5-2\sqrt{6}$, se transforma en esta $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Además, el quebrado $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ se convierte en $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$, además $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

Si hay más términos en el denominador, la irracionalidad del denominador se elimina poco a poco, de esta misma manera.

Así, la fracción $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, primero se multiplica arriba y también abajo por $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, entonces se tiene: $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; además se multiplica arriba y abajo por $5+2\sqrt{6}$, así se tiene $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CAPÍTULO 9

DE LOS CUBOS Y DE LA EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA

333.

Para encontrar el cubo de la raíz $a+b$, hay que multiplicar su cuadrado, que es $aa+2ab+bb$, otra vez por $a+b$, así entonces el cubo será

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ \quad a+b \\ \hline a^3+2aab+\ \ abb \\ \qquad +\ \ aab+2abb+b^3 \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Por lo tanto, el mismo consiste en los cubos de ambas partes de la raíz, luego también de $3aab+3abb$, que es tanto como $(3ab)\cdot(a+b)$; y esto es tres veces el producto de las dos partes multiplicado por su suma.

334.

Si la raíz consta de dos partes, el cubo se puede encontrar fácilmente aplicando esta regla: como p. ej. el número $5=3+2$, entonces su cubo es $=27+8+18\cdot 5$, que es 125.

Además, si la raíz es $7+3=10$, entonces el cubo será

$$343+27+63\cdot 10=1000$$

Para encontrar el cubo de 36, ponemos la raíz como $36 = 30 + 6$, y el cubo será:

$$27000 + 216 + 540 \cdot 36 = 46656$$

335.

Si ahora, al revés, está dado el cubo, o sea $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, y se debe encontrar su raíz, entonces hay que tener en cuenta lo siguiente.

En primer lugar, si el cubo está escrito ordenadamente según las potencias de una letra, entonces el primer término a^3 enseña inmediatamente que el primer término de la raíz es *a*, cuyo cubo es igual a ese término; si se quita este cubo queda el resto: $3aab + 3abb + b^3$, del cual hay que encontrar el segundo término de la raíz.

336.

Como ya sabemos que el segundo término es $+b$, aquí solo se trata de saber cómo encontrarlo en base al resto anterior. Ahora, este resto se puede expresar mediante dos factores: $(3aa + 3ab + bb) \cdot (b)$; entonces, si se divide el resto entre $3aa + 3ab + bb$, se obtendrá el segundo término requerido de la raíz, es decir $+b$.

337.

Ahora, ya que todavía no se conoce el segundo término, también el divisor es desconocido aún. No obstante, es suficiente que tengamos la primera parte del divisor, que es 3*aa*, o sea tres veces el cuadrado de la primera parte de la raíz que ya se ha encontrado, y con eso ya se puede encontrar la otra parte *b*, mediante la cual después se tiene que completar el divisor, antes de concluir la división. Por lo tanto, a 3*aa* hay que agregar 3*ab*, esto es tres veces el producto de la primera parte por la otra, y luego *bb*, que es el cuadrado de la otra parte de la raíz.

338.

P. ej., consideramos el cubo:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^3+12aa+48a+64 \quad (a+4 \\
 & a^3 \\
\hline
3aa+12a+16 & +12aa+48a+64 \\
 & \underline{+12aa+48a+64} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

Además, consideramos el cubo:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1 \quad (aa-2a+1 \\
 & a^6 \\
\hline
3a^4-6a^3+4aa & -6a^5+15a^4-20a^3 \\
 & \underline{-6a^5+12a^4-\ \ 8a^3} \\
3a^4-12a^3+12aa+3aa-6a+1 & 3a^4-12a^3+15a^2-6a+1 \\
 & \underline{3a^4-12a^3+15a^2-6a+1} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

339.

En esto se basa la regla común para encontrar las raíces cúbicas de los números. Por ejemplo, con el número 2197 el cálculo se hace así:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2197 \quad (10+3=13 \\
 & \underline{1000} \\
300 & 1197 \\
90 & \\
9 & \\
\hline
399 & \underline{1197} \\
 & \ 0
\end{array}
$$

Además, dado el cubo 34965783, se debe encontrar la raíz cúbica.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 34\,965\,783 \quad (300+20+7=327 \\
 & \underline{27\,000\,000} \\
270000 & 7\,965\,783 \\
18000 & \\
400 & \\
\hline
288400 & \underline{5\,768\,000} \\
\hline
307200 & 2\,197\,783 \\
6720 & \\
49 & \\
\hline
313969 & \underline{2\,197\,783} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

CAPÍTULO 10

DE LAS POTENCIAS SUPERIORES DE MAGNITUDES COMPUESTAS

340.

Después de los cuadrados y cubos siguen las potencias superiores que se muestran mediante los exponentes, como ya se mencionó anteriormente: nada más que se debe poner la raíz entre paréntesis si está compuesta. Así, $(a+b)^5$ indica la quinta potencia de $a+b$, y $(a-b)^6$ indica la sexta potencia de $a-b$. En este capítulo se mostrará cómo se pueden desarrollar estas potencias.

341.

Entonces sea $a+b$ la raíz, o la primera potencia, las potencias superiores se encuentran multiplicando de la siguiente forma.

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & a+b \\
& a+b \\ \cline{2-2}
& aa+ab \\
& \quad +ab \quad +bb \\ \cline{2-2}
(a+b)^2 = & aa+2ab+bb \\
& a \;+b \\ \cline{2-2}
& a^3+2aab+\quad abb \\
& \quad + \quad aab+2abb+b^3 \\ \cline{2-2}
(a+b)^3 = & a^3+3aab+3abb+b^3 \\
& a \;+b \\ \cline{2-2}
& a^4+3a^3b+3aabb+\quad ab^3 \\
& \quad + \quad a^3b+3aabb+3ab^3+b^4 \\ \cline{2-2}
(a+b)^4 = & a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4 \\
& a \;+b \\ \cline{2-2}
& a^5+4a^4b+6a^3bb \quad + \quad 4aab^3+ab^4 \\
& \quad + \quad a^4b+4a^3bb \quad + \quad 6aab^3+4ab^4+b^5 \\ \cline{2-2}
(a+b)^5 = & a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5 \\
& a \;+b \\ \cline{2-2}
& a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3+\quad 5aab^4+\quad ab^5 \\
& \quad + \quad a^5b+\quad 5a^4bb+10a^3b^3+10aab^4+5ab^5+b^6 \\ \cline{2-2}
(a+b)^6 = & a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6,
\end{array}
$$

etc.

342.

De la misma manera, se encuentran las potencias de la raíz $a-b$, que difieren de las anteriores solo en que los términos 2.º, 4.º, 6.º, etc. obtienen el signo *menos*, como se puede ver a continuación.

$$
\begin{array}{rl}
(a-b)^1 = & a-b \\
 & \underline{a-b} \\
 & aa-ab \\
 & \underline{\quad -ab \quad +bb} \\
(a-b)^2 = & aa-2ab+bb \\
 & \underline{\ a\ \ -b \qquad\qquad\quad} \\
 & a^3-2aab+\ \ abb \\
 & \underline{\quad -\ \ aab+2abb-b^3} \\
(a-b)^3 = & a^3-3aab+3abb-b^3 \\
 & \underline{a\ \ -b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & a^4-3a^3b+3aabb-\ \ ab^3 \\
 & \underline{\quad -\ \ a^3b+3aabb-3ab^3+b^4} \\
(a-b)^4 = & a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4 \\
 & \underline{a\ \ -b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & a^5-4a^4b+6a^3bb\ \ -\ \ 4aab^3+ab^4 \\
 & \underline{\quad -\ \ a^4b+4a^3bb\ \ -\ \ 6aab^3+4ab^4-b^5} \\
(a-b)^5 = & a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5 \\
 & \underline{a\ \ -b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & a^6-5a^5b+10a^4bb-10a^3b^3+\ \ 5aab^4-\ \ ab^5 \\
 & \underline{\quad -\ \ a^5b+\ \ 5a^4bb-10a^3b^3+10aab^4-5ab^5+b^6} \\
(a-b)^6 = & a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6,
\end{array}
$$

etc.

Aquí todas las potencias impares de b obtienen el signo –, las pares mantienen el signo +, cuyo motivo es obvio: porque, dado que en la raíz se encuentra $-b$, sus potencias se desarrollan de la siguiente forma: $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, etc., donde todas las potencias pares tienen el signo +, pero todas las impares tienen el signo –.

343.

Pero aquí surge esta pregunta importante, ¿cómo pueden encontrarse todas las potencias tanto de $a+b$ como de $a-b$, sin continuar realmente este cálculo? En esto hay que tomar en cuenta, ante todo, que si se pueden especificar las potencias de $a+b$, las potencias de $a-b$ salen automáticamente, porque solo hay que cambiar los signos de los términos pares, es decir, del 2.°, 4.°, 6.°, 8.°, etc. Por lo tanto, lo importante es establecer una regla según la cual se pueda encontrar cualquier potencia de $a+b$, por elevada que sea, sin tener que hacer el cálculo a través de todas las anteriores.

344.

Si se omiten los números delante de cada término en las potencias encontradas anteriormente, los cuales se llaman coeficientes, entonces se nota un orden muy bonito en los términos, ya que primero está la potencia de *a* del orden que se requiere, en los términos siguientes el exponente de la potencia de *a* siempre disminuyen en uno, y el de las potencias de *b*, en cambio, siempre aumentan en uno, de modo que la suma de los exponentes de *a* y *b* es la misma en todos los términos. Entonces, si se pide la décima potencia de $a+b$, los términos sin coeficientes se desenvolverán así:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8bb,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

345.

Solo hay que mostrar cómo encontrar los coeficientes asociados, o sea, hay que decir qué números deben usarse para multiplicar cada término. En cuanto al primer término, su coeficiente es siempre 1 y para el segundo término el coeficiente es siempre el exponente de la potencia misma. Pero no es tan fácil notar una regularidad para los siguientes términos; sin embargo, si se continúan estos coeficientes paso por paso, se puede ir tan lejos como uno quiera, lo cual se puede ver en la siguiente tabla.

potencia	coeficientes
I	. . . . .1, 1.
II	. . . . 1, 2, 1.
III	. . . . .1, 3, 3, 1.
IV	. . . . 1, 4, 6, 4, 1.
V	. . . . .1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI	. . . . 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII	. . . . 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII	. . . 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX	. 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1,

etc.

Por lo tanto, la décima potencia de $a+b$ será:

$$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5$$
$$+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+ b^{10}.$$

346.

De estos coeficientes, debe tenerse en cuenta que su suma tiene que dar la misma potencia de 2 para cada potencia. Porque si se escogen $a=1$ y $b=1$, entonces cada término, tomándolo sin el coeficiente, será $=1$, de modo que solamente se tienen que sumar los coeficientes. Por lo tanto, la décima potencia será:

$$(1+1)^{10}=2^{10}=1024.$$

Es lo mismo con todas las demás potencias:

$$\begin{array}{rl}
\text{I} & 1+1=2=2^1 \\
\text{II} & 1+2+1=4=2^2 \\
\text{III} & 1+3+3+1=8=2^3 \\
\text{IV} & 1+4+6+4+1=16=2^4 \\
\text{V} & 1+5+10+10+5+1=32=2^5 \\
\text{VI} & 1+6+15+20+15+6+1=64=2^6 \\
\text{VII} & 1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7\text{, etc.}
\end{array}$$

347.

De estos coeficientes también se debe tener en cuenta que aumentan desde el principio hasta el medio, pero luego disminuyen de la misma manera. En las potencias pares, el más grande está en el medio, pero en las impares hay dos medios, que son iguales y son los más grandes.

Ahora, la regularidad misma merece ser considerada con mayor atención, para poder encontrar los coeficientes sin buscar previamente los anteriores. Aquí daremos la regla; su demostración se pospone al próximo capítulo.

348.

Para encontrar los coeficientes de una potencia dada como p. ej. la séptima, se escriben los siguientes quebrados ordenadamente uno tras otro:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7},$$

donde los numeradores comienzan desde el exponente de la potencia requerida y siempre se reducen en uno, pero los denominadores avanzan según el orden de los números 1, 2, 3, 4, etc. Como el primer coeficiente es siempre uno, la primera fracción da el segundo coeficiente; las dos primeras fracciones multiplicadas dan el tercero, las tres primeras multiplicadas dan la cuarta, y así sucesivamente.

Entonces el primer coeficiente es $=1$, el segundo $=\frac{7}{1}=7$, el tercero $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}=21$, el cuarto $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}=35$, el quinto $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}=35$, el sexto $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}=21$, el séptimo $=21\cdot\frac{2}{6}=7$, el octavo $=7\cdot\frac{1}{7}=1$.

349.

Entonces para la segunda potencia se tienen las fracciones $\frac{2}{1}$; $\frac{1}{2}$; por lo tanto, el primer coeficiente $=1$, el 2.° $=\frac{2}{1}=2$, el 3.° $=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

Para la tercera potencia se tienen las fracciones $\frac{3}{1}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{3}$; por lo tanto, el primer coeficiente $=1$, el 2.° $=\frac{3}{1}=3$, el 3.° $=3\cdot\frac{2}{2}=3$, el 4.° $=\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$.

Para la cuarta potencia se tienen las fracciones $\frac{4}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; por lo tanto, el primer coeficiente $=1$, el 2.° $=\frac{4}{1}=4$, el 3.° $=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}=6$, el 4.° $=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=4$, el 5.° $=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=1$.

350.

Por lo tanto, esta regla nos da la ventaja de que uno no necesita conocer los coeficientes anteriores, sino que se pueden encontrar inmediatamente los coeficientes correspondientes para cualquier potencia. Así, para la décima potencia uno escribe estos quebrados:

$$\frac{10}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{10}.$$

Por lo tanto, se obtienen el primer coeficiente $=1$, el segundo coeficiente $=\frac{10}{1}=10$,

$$\text{el } 3.^\circ = 10\cdot\frac{9}{2}=45, \qquad \text{el } 4.^\circ = 45\cdot\frac{8}{3}=120,$$

$$\text{el } 5.^\circ = 120\cdot\frac{7}{4}=210, \qquad \text{el } 6.^\circ = 210\cdot\frac{6}{5}=252,$$

$$\text{el } 7.^\circ = 252\cdot\frac{5}{6}=210, \qquad \text{el } 8.^\circ = 210\cdot\frac{4}{7}=120,$$

$$\text{el } 9.^\circ = 120\cdot\frac{3}{8}=45, \qquad \text{el } 10.^\circ = 45\cdot\frac{2}{9}=10,$$

$$\text{el } 11.^\circ = 10\cdot\frac{1}{10}=1.$$

351.

También se pueden escribir simplemente estos quebrados, sin calcular su valor, y de esta forma será fácil, apuntar cualquier potencia de $a+b$, por muy elevada que sea.

Entonces la 100.ª potencia será:

$$(a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1}a^{99}b + \frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}a^{98}bb + \frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}a^{97}b^3$$
$$+\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{96}b^4, \text{ etc.,}$$

que muestra claramente la estructura de los términos que siguen.

CAPÍTULO 11

DEL MOVER DE LAS LETRAS COMO BASE DE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA ANTERIOR

352.

Si uno regresa al origen de los coeficientes anteriores, encontrará que cada término aparece tantas veces como el número de posibilidades de mover las letras del cual consiste: como en la segunda potencia, el término *ab* aparece dos veces, porque se puede escribir *ab* y *ba*; por otro lado, *aa* ocurre una sola vez, porque el orden de las letras no sufre ningún cambio. En la tercera potencia, el término *aab* se puede escribir de tres maneras *aab*, *aba*, *baa*, y por lo tanto el coeficiente también es 3. Igualmente, en la cuarta potencia, el término a^3b, o *aaab*, se puede mover de cuatro maneras, que son *aaab*, *aaba*, *abaa*, *baaa*, por eso su coeficiente es 4, y el término *aabb* tiene 6 de coeficiente porque se pueden cambiar de lugar de 6 maneras, *aabb*, *abba*, *baba*, *abab*, *bbaa*, *baab*. Y así es también con todos los demás.

353.

De hecho, si uno considera que p. ej. la cuarta potencia de cualquier raíz, incluso si consta de más de dos términos, como $(a+b+c+d)^4$, se encuentra multiplicando estos cuatro factores:

I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, y
IV. $a+b+c+d$,

entonces cada letra del primero debe ser multiplicada con cada una del segundo, y luego con cada una del tercero, y finalmente con cada una del cuarto, por lo tanto cada término consta de 4 letras y ocurrirá tantas veces como sea posible que las letras se puedan mover entre ellas, lo cual determina su coeficiente.

354.

Aquí es importante saber cuántas veces se pueden mover entre sí una cierta cantidad de letras, y en particular ver si estas letras son iguales o diferentes. Porque si todas son iguales, no hay cambio, razón por la cual las simples potencias, como a^2, a^3, a^4, etc., todas tienen 1 como coeficiente.

355.

Primero, suponemos que todas las letras son desiguales, y empezamos con dos letras, es decir *ab*, donde obviamente hay dos colocaciones, *ab*, *ba*.

Si se tienen tres letras *abc*, debe tenerse en cuenta que todas pueden estar en la primero posición, entonces las otras dos pueden colocarse de dos maneras. Por lo tanto, si *a* está en primer lugar, se tienen dos colocaciones *abc*, *acb*; si *b* está primero, entonces nuevamente se tienen dos, *bac*, *bca*; y también si *c* viene primero, *cab*, *cba*. Por lo tanto, en total, el número de colocaciones será $3 \cdot 2 = 6$.

Si se tienen cuatro letras *abcd*, todas pueden tomar el primer lugar, y en cada caso, las tres restantes dan seis colocaciones. Por lo tanto, en total, el número de colocaciones será $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Si se tienen cinco letras *abcde*, todas pueden tomar el primer lugar, y en cada caso, las cuatro restantes dan 24 colocaciones. Por lo tanto, en total, el número de colocaciones será $5 \cdot 24 = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

356.

Tan grande como sea el número de letras, siempre y cuando que todas sean desiguales, entonces el número de todas las colocaciones se puede determinar fácilmente, como se puede ver en la siguiente tabla.

número de letras:	número de colocaciones:
I.	$1=1$
II.	$2\cdot 1=2$
III.	$3\cdot 2\cdot 1=6$
IV.	$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$
V.	$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$
VI.	$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$
VII.	$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$
VIII.	$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40320$
IX.	$9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=362880$
X.	$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=3628800$

357.

Pero hay que tomar muy en cuenta, que estos números solo tienen lugar si todas las letras son desiguales, porque si dos o más letras son iguales, el número de colocaciones será mucho menor; y si todas son iguales, solo hay una. Entonces, queremos ver cómo se tienen que reducir los números anteriores, dependiendo del número de letras iguales.

358.

Si dos letras son iguales, las dos colocaciones solo cuentan como una. Por lo tanto, el número anterior tiene que reducirse a la mitad o dividirse entre 2. Si tres letras son iguales, las 6 colocaciones cuentan como una sola: por lo tanto, los números anteriores se tienen que dividir entre $6=3\cdot 2\cdot 1$. Del mismo modo, si cuatro letras son iguales, los números anteriores deben dividirse entre 24, es decir, $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, etc.

De ello se puede determinar, cuántas maneras existen de colocar las letras *aaabbc*. El número de letras es 6, y si no fueran iguales, permitirían $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ colocaciones.

Pero debido a que *a* aparece tres veces, este número tiene que ser dividido entre $3 \cdot 2 \cdot 1$, y además, debido a que *b* ocurre dos veces, entre $2 \cdot 1$, entonces el número de colocaciones será $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$

359.

De ello, ahora podemos determinar los coeficientes de cada término para cada potencia, lo que queremos mostrar, por ejemplo, en la séptima potencia $(a+b)^7$. El primer término es a^7, que aparece solo una vez, y dado que hay siete letras en todos los demás términos, el número de todas las colocaciones sería $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ si todas las letras fueran desiguales. Pero como hay seis letras iguales en el segundo término $a^6 b$, ese número debe dividirse entre $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$, así el coeficiente será:

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{1}.$$

En el tercer término, $a^5 bb$ ocurre *a* cinco veces y *b* dos veces, por lo que el número anterior debe dividirse primero entre $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ y luego entre $2 \cdot 1,$ así el coeficiente será $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}.$

En el cuarto término $a^4 b^3$ se encuentra *a* cuatro veces y *b* tres veces; Por lo tanto, el número anterior debe dividirse primero entre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, y luego entre $3 \cdot 2 \cdot 1$, o $1 \cdot 2 \cdot 3,$ entonces el coeficiente será $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

Del mismo modo, para el quinto término $a^3 b^4$, el coeficiente es $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, etcétera, con lo que se demuestra la regla dada anteriormente.

360.

Esta consideración nos lleva aún más lejos y nos enseña cómo encontrar todas las potencias también de raíces que constan de más de dos partes. Solo explicaremos esto con la tercera potencia de $a+b+c,$ en la que todas las combinaciones posibles de tres letras deben aparecer como términos, y cada una de ellas tendrá el número de todas sus colocaciones como coeficiente: entonces esta tercera potencia, o sea $(a+b+c)^3$ será:

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Pongamos que $a=1,$ $b=1,$ $c=1,$ entonces el cubo de $1+1+1,$ o sea de 3, es

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Si se pone $a=1,$ $b=1,$ $c=-1,$ entonces el cubo de $1+1-1,$ o sea de 1, es

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

CAPÍTULO 12

DEL DESARROLLO DE LAS POTENCIAS IRRACIONALES EN SERIES INFINITAS

361.

Dado que hemos mostrado cómo encontrar cualquier potencia de la raíz $a+b,$ sea el exponente tan grande como sea, podemos expresar la potencia de $a+b$ en forma general, aunque el exponente también sea indefinido, y expresado con una letra n.

Así encontraremos según la regla dada anteriormente:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$$
$$+ \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4, \text{ etc.}$$

362.

Si se desea tomar la misma potencia de la raíz $a-b$, entonces solo se tienen que cambiar los signos del segundo, cuarto, sexto, etc., término, obteniendo:

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$$
$$+ \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4, \text{ etc.}$$

363.

Estas fórmulas nos sirven para expresar todo tipo de raíces. Porque, ya que hemos mostrado cómo se convierten las raíces mediante exponentes quebrados, y que

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}, \text{ etc.},$$

así también será:

$$\sqrt[2]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}}, \ \sqrt[3]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{3}} \ \text{ y } \ \sqrt[4]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{4}}, \text{ etc.}$$

Por lo tanto, para encontrar la raíz cuadrada de $a+b$ solo tenemos que poner la fracción $\frac{1}{2}$ como exponente n en la fórmula general anterior; entonces, primero obtendremos para los coeficientes

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}, \ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}, \ \frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}, \ \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}, \ \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}, \ \frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}.$$

Luego tenemos

$$a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \ \text{ y } \ a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \ a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}, \ a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}, \text{ etc.}$$

O también se pueden expresar estas potencias de a así:

$$a^n = \sqrt{a}, \quad a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}, \quad a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}, \quad a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3},$$
$$a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}, \text{ etc.}$$

364.

Suponiendo esto, la raíz cuadrada de $a+b$ se expresará de la siguiente forma:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}bb\frac{\sqrt{a}}{aa} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3}$$
$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4}, \text{ etc.}$$

365.

Ahora, si a es un número cuadrado, entonces se puede indicar $\sqrt{a}$, y así la raíz cuadrada de $a+b$, se puede expresar sin un signo raíz, mediante una serie infinita.

Es decir, si $a = cc$, entonces $\sqrt{a} = c$, y se tiene

$$\sqrt{cc+b} = c + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{c} - \frac{1}{8}\cdot\frac{bb}{c^3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{c^7}, \text{ etc.}$$

Esto permite extraer la raíz cuadrada de cualquier número, porque cada número se puede partir en dos partes, una de las cuales es un cuadrado, que se indica mediante *cc*. Si p. ej. uno quiere obtener la raíz cuadrada de 6, se plantea $6 = 4+2$, y así es $cc = 4$, $c = 2$ y $b = 2$, entonces se obtiene $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$, etc. Si se toman solo los dos primeros términos, se obtiene $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, cuyo cuadrado $\frac{25}{4}$ es solo $\frac{1}{4}$ mayor que 6. Si se toman tres términos, se obtiene $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, cuyo cuadrado $\frac{1521}{256}$ es demasiado pequeño por solo $\frac{15}{256}$.

366.

En este mismo ejemplo, porque $\frac{5}{2}$ ya está muy cerca del valor verdadero, se puede plantear $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$.

Entonces $cc = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$. Calculemos solo los dos primeros términos, entonces resulta

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20},$$

cuyo cuadrado $\frac{2401}{400}$ es solo $\frac{1}{400}$ mayor que 6.

Si ahora ponemos $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$, tenemos $c = \frac{49}{20}$ y $b = -\frac{1}{400}$. Tomando nuevamente los dos primeros términos, nos da

$$\sqrt{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960},$$

cuyo cuadrado $= \frac{23049601}{3841600}$. Pero ahora es $6 = \frac{23049600}{3841600}$, así el error es solo $\frac{1}{3841600}$.

367.

De la misma manera también la raíz cúbica de $a + b$ puede expresarse mediante una serie infinita. Entonces, porque $\sqrt[3]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, en nuestra fórmula general ponemos $n = \frac{1}{3}$, y por lo tanto los coeficientes son

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{3},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15} \text{ etc.}$$

Y las potencias de a son

$$a^n = \sqrt[3]{a},\ a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a},\ a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{aa},\ a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} \text{ etc.}$$

Entonces obtenemos

$$\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}\cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9}\cdot bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \frac{5}{81}\cdot b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243}\cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}, \text{ etc.}$$

368.

Por lo tanto, si a es un cubo, es decir, $a=c^3,$ entonces $\sqrt[3]{a}=c,$ y así se omiten los signos de raíz. En consecuencia, se tendrá

$$\sqrt[3]{c^3+b}=c + \frac{1}{3}\cdot\frac{b}{cc} - \frac{1}{9}\cdot\frac{bb}{c^5} + \frac{5}{81}\cdot\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}\cdot\frac{b^4}{c^{11}}, \text{ etc.}$$

369.

Con la ayuda de esta fórmula, ahora se puede encontrar la raíz cúbica de cualquier número por aproximación, porque cada número se puede partir en dos partes, como c^3+b, la primera de las cuales es un cubo.

Entonces, si se pide la raíz cúbica de 2, se plantea $2=1+1,$ así $c=1$ y $b=1,$ y $\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81},$ etc. Los primeros dos términos dan $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ cuyo cubo da $\frac{64}{27}$, que es demasiado grande por $\frac{10}{27}$. Por eso planteamos $2=\frac{64}{27}-\frac{10}{27}$, así tenemos $c=\frac{4}{3}$ y $b=-\frac{10}{27}$, y por lo tanto

$$\sqrt[3]{2}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}.$$

Estos dos términos dan $\frac{4}{3}-\frac{5}{72}=\frac{91}{72}$, cuyo cubo es $\frac{753571}{373248}$. Pero ahora $2=\frac{746496}{373248}$, entonces el error es $\frac{7075}{373248}$. Y de esta forma uno puede acercarse cada vez más, especialmente si uno desea tomar más términos.

CAPÍTULO 13

DEL DESARROLLO DE LAS POTENCIAS NEGATIVAS

370.

Se ha demostrado anteriormente que $\frac{1}{a}$ puede expresarse como a^{-1}, por lo tanto $\frac{1}{a+b}$ también se expresa como $(a+b)^{-1}$, tal que la fracción $\frac{1}{a+b}$ puede ser considerada como una potencia de $a+b$ con el exponente -1: por lo tanto, la serie para $(a+b)^n$ encontrada arriba también abarca este caso.

371.

Ahora que $\frac{1}{a+b}$ es tanto como $(a+b)^{-1}$, se pone $n=-1$ en la fórmula encontrada arriba, por lo tanto, primero obtendremos para los coeficientes

$$\frac{n}{1}=-1,\ \frac{n-1}{2}=-1,\ \frac{n-2}{3}=-1,\ \frac{n-3}{4}=-1,\ \frac{n-4}{5}=-1,\ \text{etc.},$$

luego para las potencias de a:

$$a^n=a^{-1}=\frac{1}{a},\ a^{n-1}=\frac{1}{a^2},\ a^{n-2}=\frac{1}{a^3},\ a^{n-3}=\frac{1}{a^4},\ \text{etc.}$$

Por lo tanto obtenemos

$$(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6},\ \text{etc.},$$

que es la serie que ya se había encontrada arriba mediante la división. [*párrafo 303*]

372.

Además, ya que $\frac{1}{(a+b)^2}$ es tanto como $(a+b)^{-2}$, entonces también este término puede resolverse en una serie infinita.

Ponemos $n = -2$, por lo tanto, primero obtendremos para los coeficientes:

$$\frac{n}{1} = -\frac{2}{1},\quad \frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2},\quad \frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3},\quad \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4},\ \text{etc.},$$

y para las potencias de a se tiene:

$$a^n = \frac{1}{a^2},\quad a^{n-1} = \frac{1}{a^3},\quad a^{n-2} = \frac{1}{a^4},\quad a^{n-3} = \frac{1}{a^5},\ \text{etc.}$$

Por lo tanto obtenemos

$$(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b^2}{a^4} - \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^3}{a^5}$$
$$+ \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^6},\ \text{etc.}$$

Pero ahora es

$$\frac{2}{1} = 2,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2} = 3,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 4,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4} = 5,\ \text{etc.}$$

Por lo tanto tenemos:

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8},\ \text{etc.}$$

373.

Si ponemos $n = -3$, obtenemos una serie para $(a+b)^{-3}$, o sea para $\frac{1}{(a+b)^3}$. Entonces, para los coeficientes será:

$$\frac{n}{1} = -\frac{3}{1},\quad \frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2},\quad \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3},\quad \frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4},\ \text{etc.}$$

Pero para las potencias de a:

$$a^n = \frac{1}{a^3},\ a^{n-1} = \frac{1}{a^4},\ a^{n-2} = \frac{1}{a^5},\ \text{etc.}$$

De lo cual obtenemos

$$\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\cdot\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{b^4}{a^7},\ \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9}$$

$$-36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}},\ \text{etc.}$$

Además, pongamos $n = -4$, entonces tenemos para los coeficientes:

$$\frac{n}{1} = -\frac{4}{1},\quad \frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2},\quad \frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3},\quad \frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4},\ \text{etc.}$$

Pero para las potencias de a:

$$a^n = \frac{1}{a^4},\ a^{n-1} = \frac{1}{a^5},\ a^{n-2} = \frac{1}{a^6},\ a^{n-3} = \frac{1}{a^7},\ a^{n-4} = \frac{1}{a^8},\ \text{etc.}$$

De lo cual resulta:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\cdot\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{b^4}{a^8},\ \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9},\ \text{etc.}$$

374.

De esto ahora podemos concluir con certeza que, para cualquiera de tales potencias negativas, se tendría de manera general:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^{m+3}},\ \text{etc.}$$

Con esta fórmula, todas esas fracciones se transforman ahora en series infinitas, donde incluso uno puede poner fracciones por m, para expresar términos irracionales.

375.

Para más explicación planteamos lo siguiente. Como hemos encontrado que

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}, \text{ etc.},$$

ahora multipliquemos esta serie por $a+b$, porque entonces debe salir el número 1. La multiplicación se escribirá así:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}, \text{ etc.} \\
a+b \\
\hline
1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{aa}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^5}{a^5}, \text{ etc.} \\
\quad +\frac{b}{a}-\frac{b^2}{aa}+\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}, \text{ etc.} \\
\hline
\end{array}$$

El producto es 1, como tiene que ser necesariamente.

376.

Como también hemos encontrado

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}, \text{ etc.},$$

si se multiplica esta serie por $(a+b)^2$, entonces también debe salir 1. Pero $(a+b)^2=aa+2ab+bb$, y la multiplicación se escribirá así:

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7},\ \text{etc.} \\
aa + 2ab + bb \\
\hline
1 - \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5},\ \text{etc.} \\
\quad + \frac{2b}{a} - \frac{4bb}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5},\ \text{etc.} \\
\qquad + \frac{bb}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5},\ \text{etc.} \\
\hline
\end{array}
$$

El producto es 1, como lo exige la naturaleza del asunto.

377.

Pero si solo se multiplica esta serie encontrada para $\frac{1}{(a+b)^2}$ por $a+b$, entonces tendría que salir $\frac{1}{a+b}$, o la serie encontrada arriba para esta fracción:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6},\ \text{etc.},$$

lo cual se confirma con la siguiente multiplicación.

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6},\ \text{etc.} \\
a + b \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3bb}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5},\ \text{etc.} \\
\quad + \frac{b}{a^2} - \frac{2bb}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5},\ \text{etc.} \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5},\ \text{etc.}
\end{array}
$$

FIN DE LA SEGUNDA SECCIÓN

TERCERA SECCIÓN DE LA PRIMERA PARTE

DE LAS RELACIONES Y PROPORCIONES

CAPÍTULO 1

DE LA RELACIÓN ARITMÉTICA O DIFERENCIA ENTRE DOS NÚMEROS

378.

Dos magnitudes o son iguales o son diferentes. En el último caso, una es más grande que la otra, y cuando uno se pregunta acerca de su desigualdad, esto se puede hacer de dos maneras; entonces, o se pregunta cuánto es más grande la una que la otra, o cuántas veces una es más grande que la otra. Ambas determinaciones se llaman *relaciones*, y la primera se suele llamar *relación aritmética*, y la segunda, *relación geométrica*. Estos nombres no tienen vínculo con el asunto en sí, sino que se han introducido arbitrariamente.

379.

Se sobreentiende, que las magnitudes tienen que ser del mismo tipo, porque si no, nada puede determinarse respecto a su igualdad o desigualdad. Entonces sería inconsistente si alguien preguntase, por ejemplo, si 2 libras y 3 varas son iguales o diferentes. Es por eso que aquí siempre se trata de magnitudes de un solo tipo, y dado que estas siempre se pueden indicar con números, como se mencionó al principio, aquí solo se manejan los puros números.

380.

Entonces, si se pregunta de dos números, cuánto es uno más grande que el otro, la respuesta determina su relación aritmética. Como esto sucede cuando se muestra la diferencia entre los dos números, una relación aritmética no es otra cosa que la diferencia entre dos números. El uso de esta última palabra (*diferencia*) es más adecuado, de modo que la palabra *relación* solo se mantiene con las llamadas relaciones geométricas.

381.

Ahora, la diferencia entre dos números se encuentra cuando se resta el más pequeño del más grande y esto le da la respuesta a la pregunta de cuánto es uno más grande que el otro. Entonces, si los dos números son iguales, la diferencia es nada, o sea cero, y si se pregunta por cuánto es más grande uno que el otro, entonces se tiene que responder, nada. Porque, por ejemplo $6 = 2 \cdot 3$, entonces la diferencia entre 6 y $2 \cdot 3$ es nada.

382.

Pero si los dos números no son iguales, como 5 y 3, y se pregunta por cuánto 5 es mayor que 3, la respuesta es 2; lo que se encuentra al restar 3 de 5. Asimismo, 15 es 5 mayor que 10, y 20 es 8 mayor que 12.

383.

Entonces hay tres cosas a considerar aquí; primero el número más grande, segundo el más pequeño y tercero la diferencia, que tienen una conexión tal, que de dos de ellos siempre se puede encontrar el tercero. El número mayor sea $= a$, el menor $= b$ y la diferencia $= d$; entonces se encuentra la diferencia d restando b de a, tal que $d = a - b$; de donde es evidente cómo se debe encontrar d, si están dados a y b.

384.

Pero si se da el número más pequeño b junto con la diferencia d, el más grande se encuentra agregando la diferencia al número más pequeño, por eso se obtiene el más grande $a = b + d$. Luego, si se resta el más pequeño b de $b + d$, queda d, que es la diferencia dada. Suponiendo que el número más pequeño es 12 y la diferencia 8, el más grande será $= 20$.

385.

Si ahora se da el número más grande a junto con la diferencia d, se encuentra el más pequeño b, restando la diferencia del número más grande. Por lo tanto, se obtiene $b = a - d$. Luego, si se resta el número $a - d$ del más grande a, queda d, que es la diferencia dada.

386.

Estos tres números a, b, d están vinculados de tal manera que de ello se obtienen las tres determinaciones siguientes. Primero, uno tiene $d = a - b$, segundo $a = b + d$ y tercero $b = a - d$, y si una de estas tres igualdades es verdadera, también las otras dos son necesariamente verdaderas. Por lo tanto, en general, si $z = x + y$, entonces, necesariamente también $y = z - x$ y $x = z - y$.

387.

Con tal relación aritmética, debe tenerse en cuenta que si un número arbitrario c se suma o resta a los dos números a y b, la diferencia sigue siendo la misma. Entonces, si d es la diferencia entre a y b, d también es la diferencia entre los dos números $a + c$ y $b + c$, y también entre $a - c$ y $b - c$. Como la diferencia entre los números 20 y 12 es 8, esta diferencia también permanece si arbitrariamente se suma o resta un número a esos números 20 y 12.

388.

La demostración de esto es obvia. Porque si $a-b=d$, entonces también $(a+c)-(b+c)=d$. Del mismo modo también será $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Si los dos números a y b se duplican, también la diferencia se hace dos veces mayor. Entonces, si $a-b=d$, será $2a-2b=2d$; y generalmente se tendrá $na-nb=nd$, sea n el número que sea.

CAPÍTULO 2

DE LAS PROPORCIONES ARITMÉTICAS

390.

Cuando dos relaciones aritméticas son iguales, la igualdad de ellas se denomina *proporción aritmética*.

Entonces, si $a-b=d$ y también $p-q=d$, de modo que la diferencia entre los números p y q es tan grande como entre los números a y b; entonces estos cuatro números forman una proporción aritmética, que por lo tanto se escribe $a-b=p-q$, que indica claramente que la diferencia entre a y b es tan grande como entre p y q.

391.

Por lo tanto, una proporción aritmética consta de cuatro términos que tienen que ser de tal naturaleza que, si se resta el segundo del primero, resulta lo mismo que cuando se resta el cuarto del tercero. Entonces, los números 12, 7, 9, 4 forman una proporción aritmética porque $12-7=9-4$.

392.

Si se tiene una proporción aritmética como $a-b=p-q$, los términos segundo y tercero pueden intercambiarse y también será $a-p=b-q$. Porque dado que $a-b=p-q$, entonces primero se agrega b en ambos lados y se obtiene $a=b+p-q$. Luego, restando p en ambos lados da $a-p=b-q$. Entonces, ya que $12-7=9-4$, pues también $12-9=7-4$.

393.

En cualquier proporción aritmética también se puede intercambiar el primer término con el segundo y a la vez el tercero con el cuarto. Porque si $a-b=p-q$, entonces $b-a=q-p$. Porque $b-a$ es el negativo de $a-b$ y también $q-p$ es el negativo de $p-q$. Ya que $12-7=9-4$, entonces también es $7-12=4-9$.

394.

Ahora, en particular, hay que tener bien presente la propiedad principal de cualquier proporción, que la suma del segundo y tercer término siempre es igual a la suma de los términos primero y cuarto. Lo que también se expresa así: la suma de los términos de en medio es igual a la suma de los términos de los extremos. Por ejemplo, como $12-7=9-4$, entonces $7+9=12+4$, cada uno da 16.

395.

Para demostrar esta propiedad principal, sea $a-b=p-q$; sumamos $b+q$ en ambos lados, así obtenemos $a+q=b+p$, es decir, la suma del primero y el cuarto es igual a la suma del segundo y tercero. Por otro lado, si cuatro números como a, b, p, q son tales que la suma del segundo y el tercero es tan grande como la suma del primero y el cuarto, es decir, que $b+p=a+q$, entonces ciertamente los números están en una proporción aritmética, y será $a-b=p-q$. Porque, dado $a+q=b+p$, restamos $b+q$ de ambos lados, y obtenemos $a-b=p-q$.

Ahora, ya que los números 18, 13, 15, 10 son tales que la suma de los de en medio $13+15=28$ es igual a la suma de los extremos $18+10=28$, entonces ciertamente están en una proporción aritmética y, por lo tanto, $18-13=15-10$.

396.

Con esta propiedad, se puede resolver fácilmente la siguiente pregunta: ¿Si se dan los primeros tres términos de una proporción aritmética, cómo se puede encontrar el cuarto? Los primeros tres términos sean a, b, p y para el cuarto, el que buscamos, escribimos q, entonces tendremos $a+q=b+p$. Ahora se resta a de ambos lados, se obtiene $q=b+p-a$. Entonces, el cuarto término se encuentra si se suma el segundo y el tercero y se resta el primero de la suma. Sean p. ej. 19, 28, 13 los primeros tres términos, entonces la suma del segundo y el tercero = 41, restando de ella el primer término, 19, quedan 22 para el cuarto término, y entonces la proporción aritmética será $19-28=13-22$, o $28-19=22-13$, o $28-22=19-13$.

397.

Si en una proporción aritmética el segundo término es igual al tercero, solo hay tres números, que son tales que el primero menos el segundo es tan grande como el segundo menos el tercero, o que la diferencia entre el primero y el segundo es tan grande como la diferencia entre el segundo y el tercero. De ese tipo son los 3 números 19, 15, 11 porque $19-15=15-11$.

398.

Tales tres números avanzan en una progresión aritmética, que aumenta, si el segundo excede al primero por tanto como el tercero excede al segundo, como en el ejemplo 4, 7, 10; o que baja, si los números disminuyen en la misma cantidad, como 9, 5, 1.

399.

Si tenemos los números a, b, c en una progresión aritmética, entonces tiene que ser $a-b=b-c$ lo cual implica, por la igualdad de las sumas de en medio y de los extremos, que $2b=a+c.$ Si se quita a de ambos lados, se obtendrá $c=2b-a$.

400.

Entonces, si los primeros dos términos de una progresión aritmética se dan como a, b, entonces se encuentra el tercero, si el segundo se duplica y el primero se resta de ello. Si 1 y 3 son los dos primeros términos de una progresión aritmética, el tercero será $=2\cdot 3-1=5,$ y de los números 1, 3, 5 uno tiene la proporción $1-3=3-5.$

401.

Se puede proceder de acuerdo con esta regla, y tal como, en base del primero y del segundo, se ha encontrado el tercero, se puede encontrar el cuarto desde el segundo y el tercero, etc., y así continuar la progresión aritmética hasta donde uno quiera. Sea a el primer término y b el segundo, entonces el tercero es $=2b-a$;

el cuarto $=4b-2a-b=3b-2a$;

el quinto $=6b-4a-2b+a=4b-3a$;

el sexto $=8b-6a-3b+2a=5b-4a$;

el séptimo $=10b-8a-4b+3a=6b-5a$, etc.

CAPÍTULO 3

DE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS

402.

Una lista de números que siempre crecen o disminuyen en el mismo número, sea el número de términos el que sea, se denomina una progresión aritmética.

Entonces, los números naturales escritos en orden, como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc., forman una progresión aritmética, porque siempre aumentan en uno; y la lista 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, l, etc., también es una progresión aritmética, porque estos números siempre disminuyen en 3.

403.

El número en el que aumentan o disminuyen los términos de una progresión aritmética se llama *diferencia*. Entonces, si se da el primer término junto con la diferencia, se puede continuar la progresión aritmética tanto como se desee. Sean, p. ej., el primer término $=2$ y la diferencia $=3$, entonces la progresión creciente será:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, etc.,

donde se encuentra cada término sumando la diferencia al anterior.

404.

Se suelen escribir los números naturales 1, 2, 3, 4, etc., arriba de los términos de tal progresión aritmética, para poder ver de inmediato en cual lugar está cada uno, y los números escritos arriba de ellos se llaman *índices*. [*Nota del traductor: traducción literal: indicadores*.] Entonces el ejemplo anterior se escribe así:

índice	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
prog. arit.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29, etc

Lo que muestra que 29 es el décimo término.

405.

Sea a el primer término y d la diferencia, entonces la progresión aritmética será:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	$a+7d$, etc.

De lo cual se puede encontrar cada término sin necesidad de conocer todos los términos anteriores y esto únicamente en base del primer término a y la diferencia d. Entonces p. ej., el 10.° término será $=a+9d$, el 100.° término $=a+99d$, y de manera general el enésimo término será $a+(n-1)d$.

406.

Si la progresión aritmética se trunca en algún lugar, entonces se tiene que notar particularmente el primer término y el último, y el índice del último término mostrará el número de términos. Entonces, si el primer término $=a$, la diferencia $=d$ y el número de términos $=n$, entonces el último término $=a+(n-1)d$. Es decir, el mismo se encuentra, si la diferencia se multiplica por 1 menos que el número de términos, y sumándole a eso el primer término. P. ej., si se tiene una progresión aritmética de 100 términos, cuyo primero $=4$ y su diferencia $=3$, entonces el último término será $99\cdot 3+4=301$.

407.

Si se tiene el primer término $=a$ y el último $=z$ junto con el número de términos $=n$, entonces se puede encontrar la diferencia $=d$. Porque, dado que el último término es $z = a + (n-1)d$, se resta a de ambos lados, obteniendo $z - a = (n-1)d$. Es decir, si se resta el primer término del último término, se tiene la diferencia multiplicada por l menos que el número de términos; o sea $z - a$ es el producto de $(n-1)$ y d. Así que solo hay que dividir $z - a$ entre $n-1$ para obtener la diferencia $d = \frac{z-a}{n-1}$, de donde surge esta regla: se resta el primer término del último, se divide el resto entre el número de términos menos uno, entonces se obtiene la diferencia; con la cual se puede plantear toda la progresión.

408.

Alguien tiene p. ej. una progresión aritmética de 9 términos, de los cuales el primer término es 2 y el último es 26, se debe buscar la diferencia. Por lo tanto, hay que restar el primer término 2 del último 26 y dividir el resto 24 entre $9-1$, es decir, entre 8, así se obtiene la diferencia $= 3$, y la progresión misma será:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

Para dar otro ejemplo; el primer término sea l, el último término 2 y el número de términos 10, de ello se pide la progresión aritmética. Aquí se llega a la diferencia $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$; por ello la progresión solicitada será:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Otro ejemplo. El primer término sea $2\frac{1}{3}$, el último $12\frac{1}{2}$ y el número de términos 7. De esto obtenemos la diferencia

$$\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36},$$

por lo tanto la progresión será:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36}, & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

409.

Además, dado el primer término *a* y el último *z*, junto con la diferencia *d*, entonces se puede encontrar el número de términos *n*. Entonces, ya que $z-a=(n-1)d$, se dividen ambos lados entre d y se obtiene $\frac{z-a}{d}=n-1$. Como *n* es 1 más que $n-1$, entonces $n=\frac{z-a}{d}+1$; en consecuencia, se encuentra el número de términos, si se divide la diferencia entre el primer y el último término, $z-a$, entre la diferencia, y se suma 1 al cociente $\frac{z-a}{d}$.

Sea p. ej. el primer término $=4$, el último $=100$ y la diferencia $=12$, entonces el número de términos será $\frac{100-4}{12}+1=9$, y estos nueve términos son los siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 4, & 16, & 28, & 40, & 52, & 64, & 76, & 88, & 100. \end{array}$$

Sea el primer término $=2$, el último $=6$, y la diferencia $=1\frac{1}{3}$, por lo que el número de términos será $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, y estos cuatro términos son

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 2, & 3\frac{1}{3}, & 4\frac{2}{3}, & 6. \end{array}$$

Además, sea el primer término $= 3\frac{1}{3}$, el último $= 7\frac{2}{3}$, y la diferencia $= 1\frac{4}{9}$, entonces el número de términos $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, y estos cuatro términos son

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 3\frac{1}{3}, & 4\frac{7}{9}, & 6\frac{2}{9}, & 7\frac{2}{3}. \end{array}$$

410.

Pero aquí hay que tener bien presente que el número de términos tiene que ser necesariamente un número entero. Si se hubiera encontrado una fracción para n en el ejemplo anterior, la pregunta habría sido inconsistente.

Por lo tanto, si no se encuentra un número entero para $\frac{z-a}{d}$, esta pregunta no podría resolverse y la respuesta tendría que ser que la pregunta sería imposible. Por eso, en tales preguntas, el número $z - a$ debe ser divisible entre d.

411.

Con cualquier progresión aritmética, hay las siguientes cuatro magnitudes, o cosas, a considerar:

I. el primer término a, III. el último término z,
II. la diferencia d, IV. el número de términos n,

que son tales que si se conocen tres de ellos, el cuarto se puede determinar en base a ellos, como:

I. Si se conocen a, d, n, se tiene $z = a + (n-1)d$.

II. Si se conocen z, d, n, se tiene $a = z - (n-1)d$.

III. Si se conocen a, z, n, se tiene $d = \frac{z-a}{n-1}$.

IV. Si se conocen a, z, d, se tiene $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

CAPÍTULO 4

DE LA SUMA DE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS

412.

Si se presenta una progresión aritmética, también se suele buscar la suma de la misma, que se encuentra sumando todos los términos. Dado que esta adición ahora sería muy extensa si la progresión consta de muchos términos, se puede dar una regla por medio de la cual esta suma se puede encontrar muy fácil.

413.

Consideremos primero una progresión específica, donde el primer término = 2, la diferencia = 3, el último término = 29 y el número de términos = 10.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29.

Aquí la suma del primer y último término es = 31, la suma del segundo y penúltimo = 31, la suma del tercero y antepenúltimo = 31, la suma del cuarto y del término antes del antepenúltimo = 31, y así sucesivamente, de ello se puede ver que dos términos que son igualmente distantes del primero y del último, tomados juntos, son tanto como el primero y el último juntos.

414.

La razón de esto salta a la vista inmediatamente. Porque, si el primer término es = a y el último = z, pero la diferencia $= d$, entonces la suma del primero y el último es $= a + z.$ Luego el segundo término es $a + d$ y el penúltimo $z - d,$ que juntos dan $a + z.$ Además, el tercer término es $a + 2d$ y el antepenúltimo $= z - 2d,$ que en conjunto valen $a + z.$ Lo que aclara la veracidad del teorema anterior.

415.

Para encontrar la suma de la progresión anterior, es decir, de

$$2+5+8+11+14+17+20+23+26+29,$$

se escribe debajo esta misma progresión al revés, y se suma término por término como sigue:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcr} 2 & + & 5 & + & 8 & + & 11 & + & 14 & + & 17 & + & 20 & + & 23 & + & 26 & + & 29 \\ 29 & + & 26 & + & 23 & + & 20 & + & 17 & + & 14 & + & 11 & + & 8 & + & 5 & + & 2 \\ \hline 31 & + & 31 & + & 31 & + & 31 & + & 31 & + & 31 & + & 31 & + & 31 & + & 31 & + & 31 \end{array}$$

Encontramos esta serie que consiste de términos idénticos y aparentemente es el doble de la suma de nuestra progresión. El número de estos mismos términos es 10, al igual que en la progresión, y por lo tanto su suma $= 10 \cdot 31 = 310.$ Ahora que esta suma es dos veces mayor que la suma de la progresión aritmética, la suma correcta será $= 155$.

416.

Si se procede de esta manera con cualquier progresión aritmética, de la cual el primer término $= a$, el último $= z$, y el número de términos $= n$, escribiendo la misma progresión al revés y sumando término por término, se obtiene $a + z$ para cada término, cuyo número $= n$; entonces, la suma de ellos $= n(a + z)$, que es el doble de la suma de la progresión, por lo tanto, la suma de la progresión aritmética misma es $= \frac{n(a+z)}{2}$.

417.

De ello ahora obtenemos esta regla fácil para encontrar la suma de cualquier progresión aritmética:

Se multiplica la suma del primer y último término por el número de términos, entonces la mitad de este producto mostrará la suma de la progresión completa.

O, que es lo mismo: multiplíquese la suma del primer y último término por la mitad del número de términos.

O también: multiplíquese la mitad de la suma del primer y el último término por el número total de términos, entonces se obtendrá la suma de la progresión completa.

418.

Es necesario explicar esta regla con algunos ejemplos. Pues dada la progresión de los números naturales 1, 2, 3 hasta 100, de la cual se debe buscar la suma. De acuerdo con la primera regla, esta será $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Además se pregunta cuántas campanadas da un reloj de campana en 12 horas. Para este fin, los números 1, 2, 3 a 12 deben sumarse, por lo que la suma será $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Si se quisiera saber la suma de esta misma serie extendida hasta 1000, saldría 500500; continuada hasta 10000, será = 50005000.

419.

Pregunta: alguien compra un caballo con esta condición: por el primer clavo de herradura, se pagan 5 copecas, por el segundo 8 copecas, por el tercer 11, y siempre 3 copecas más por cada uno de los siguientes. Pero hay 32 clavos en total, ¿cuánto le cuesta el caballo?

Aquí estamos buscando la suma de una progresión aritmética, el primer término = 5, la diferencia = 3 y el número de términos = 32.

Aquí primero se tiene que buscar el último término, que se encuentra según la regla anterior $= 5 + 31 \cdot 3 = 98$, y de esto la suma buscada resulta $= \frac{103 \cdot 32}{2} = 103 \cdot 16$; entonces el caballo cuesta 1648 copecas, o sea 16 rublos con 48 copecas.

420.

De manera general, supongamos que el primer término $= a$, la diferencia $= d$, y el número de términos $= n$, de los cuales se debe encontrar la suma de toda la progresión: dado que el último término ahora tiene que ser $= a + (n-1)d$, entonces la suma del primer y último término $= 2a + (n-1)d$, que multiplicada por el número de términos n da $2na + n(n-1)d$, por lo tanto la suma buscada será $= na + \frac{n(n-1)}{2} d$.

En el ejemplo anterior, porque $a = 5$, $d = 3$ y $n = 32$, con esta fórmula obtenemos la suma

$$5 \cdot 32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$$

como antes.

421.

Si la serie de números naturales 1, 2, 3 y así sucesivamente se suma hasta n, entonces el primer término $= 1$, el último término $= n$, y el número de términos $= n$, de donde se encuentra la suma $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Si establecemos $n = 1766$, la suma de todos los números del 1 al 1766 será $= 883 \cdot 1767 = 1560261$.

422.

Consideramos la progresión de los números impares 1, 3, 5, 7, etc., que continúan hasta n términos, de los cuales se requiere la suma: aquí el primer término $= 1$, la diferencia $=2$, el número de términos $=n$; entonces el último término será $1+(n-1)2=2n-1$, de ello se obtiene la suma buscada = nn.

Por lo tanto, solo se necesita multiplicar el número de términos consigo mismo. Por eso, uno puede sumar tantos términos de esta progresión como uno quiera, la suma siempre será un cuadrado, es decir, el cuadrado del número de términos, como se puede ver en lo que sigue.

no. de térm.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	etc.
progresión	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	etc.
suma	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	etc.

423.

Además, sea el primer término = 1, la diferencia = 3 y el número de términos $=n$, entonces esta progresión es $1, 4, 7, 10,$ etc., de la cual el último término será: $1+(n-1)3=3n-2$; por lo tanto la suma del primer y último término $=3n-1$; en consecuencia, la suma de la progresión es $=\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$. Si se toma $n=20$, entonces la suma $=10\cdot 59=590$.

424.

Sea el primer término $=1$, la diferencia $=d$, y el número de términos $=n$, entonces el último término será $1+(n-1)d$. Sumándole a este el primero da $2+(n-1)d$, multiplicado por el número de términos da $2n+n(n-1)d$, por lo cual la suma de la progresión será $n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Aquí agregamos la siguiente tablita:

si	$d = 1$,	entonces	la	suma	es	$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$
"	$d = 2$,	"	"	"	"	$n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$
"	$d = 3$,	"	"	"	"	$n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$
"	$d = 4$,	"	"	"	"	$n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$
"	$d = 5$,	"	"	"	"	$n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$
"	$d = 6$,	"	"	"	"	$n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$
"	$d = 7$,	"	"	"	"	$n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$
"	$d = 8$,	"	"	"	"	$n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$
"	$d = 9$,	"	"	"	"	$n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$
"	$d = 10$,	"	"	"	"	$n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$,

etc.

CAPÍTULO 5

DE LOS NÚMEROS FIGURADOS O POLIGONALES

425.

La suma de las progresiones aritméticas, que empiezan con l y cuya diferencia es l, o 2, o 3, o cualquier otro número entero, nos lleva a la teoría de los *números poligonales* que surgen cuando se suman algunos términos de tales progresiones.

426.

Si uno toma la diferencia $= 1$, mientras el primer término permanece 1, surge esta progresión aritmética

l, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.

Si ahora se toma la suma de uno, dos, tres, cuatro, etc., términos, entonces sale esta serie de números

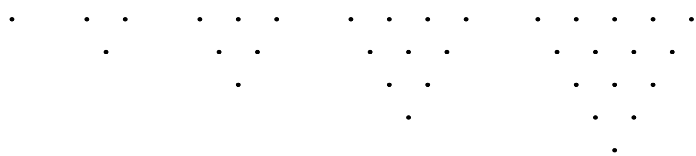
l, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, etc.

Así que

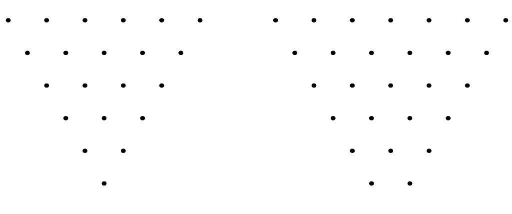
$$1 = 1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 6 = 1 + 2 + 3, \quad 10 = 1 + 2 + 3 + 4, \text{ etc.}$$

Y estos números se llaman *números triangulares* porque los puntos que representan los números se pueden escribir en forma de triángulo, como se puede ver en lo siguiente:

1 3 6 10 15



21 28

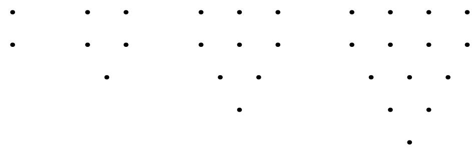


etc.

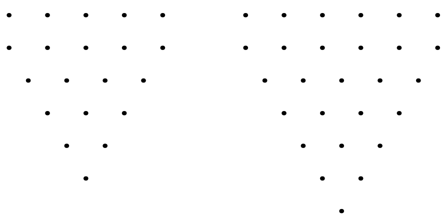
427.

En cada uno de estos triángulos se puede ver cuántos puntos hay en cada lado: en el primero solo hay uno, en el segundo 2, en el tercero 3, en el cuarto 4, y así sucesivamente. Entonces, es el número de puntos de un lado, simplemente llamado *lado*, que determina los números triangulares, o el número de todos los puntos, que simplemente se llama *triángulo*, en la siguiente forma

lado
triángulo



lado
triángulo



428.

Entonces, aquí surge la pregunta de cómo encontrar el triángulo del lado dado, lo que se puede hacer fácilmente de lo anterior:

Porque, si el lado $= n$, entonces el triángulo será

$$1+2+3+4+\cdots n,$$

cuya suma $= \frac{nn+n}{2}$, en consecuencia el triángulo será $\frac{nn+n}{2}$. Entonces si $n = 1$, el triángulo $= 1$.

si	$n = 2$,	entonces el triángulo es	$= 3$.
"	$n = 3$,	" " " "	$= 6$.
"	$n = 4$,	" " " "	$= 10$, etcétera.

Si se toma $n = 100$, el triángulo será $= 5050$, etc.

429.

La fórmula $\frac{nn+n}{2}$ se llama la fórmula general para todos los números triangulares: porque permite encontrar el número triangular para cada lado, indicado por n.

La misma fórmula también se puede escribir como $\frac{n(n+1)}{2}$, lo que sirve para facilitar el cálculo, porque de los dos números n y $n+1$, uno es un número par y se puede dividir entre 2.

Entonces, si $n = l2$, el triángulo es $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$. Si $n = l5$, entonces el triángulo es $= \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$, etc.

430.

Si se toma la diferencia = 2, se tiene esta progresión aritmética

l, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.,

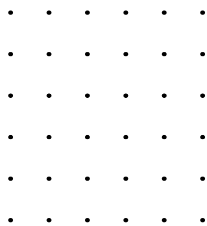
de la cual las sumas forman la serie:

l, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc.

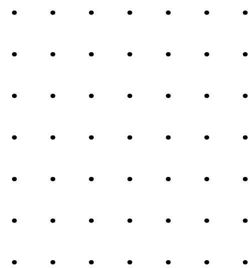
Estos números se llaman *números cuadriláteros* y son aquellos que arriba se llamaron *cuadrados*. Pues tantos puntos como indica uno de tales números, se pueden poner en un cuadrilátero:

1	4	9	16	25
.	. .	. . .	. . . .	. . . . .
	. .	. . .	. . . .	. . . . .
		. . .	. . . .	. . . . .
			. . . .	. . . . .
				. . . . .

36



49



431.

Aquí se ve que el lado de tal cuadrilátero contiene tantos puntos como la raíz cuadrada del mismo, por lo que del lado 5, el cuadrilátero es 25, y del lado 6, el cuadrilátero es 36; pero si el lado es n, que indica el número de términos en la progresión 1, 3, 5, 7, etc., hasta n, el cuadrilátero es la suma de los mismos términos, que se encontró arriba: $= nn$. Este cuadrilátero o cuadrado ya se ha tratado en detalle anteriormente.

432.

Si se pone la diferencia = 3, y se toman las sumas de la misma forma, entonces estas sumas se llaman *números pentagonales*, aunque no se puedan representar en forma bonita por puntos. Los mismos, por tanto, progresan de la siguiente manera.

índice	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
prog. arit.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
pentágono	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176,

etc.

Y el índice indica el lado de cada uno.

433.

Entonces, si el lado n está dado, el número pentagonal es

$$= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Si p. ej. $n = 7$, entonces el pentágono es 70. Si se quiere saber el número pentagonal de 100, entonces se pone $n = 100$, obteniendo 14950.

434.

Si se toma la diferencia = 4, entonces de esta manera se obtienen los números *hexagonales*, que avanzan así:

índice	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	
prog. arit.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37	
hexágono	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190,	etc.

Donde el índice otra vez da el lado de cada uno.

435.

Entonces, si el lado es n, el número hexagonal es

$$= 2nn - n = n(2n-1),$$

en lo cual hay que tomar en cuenta que todos estos números hexagonales son, a la vez, números triangulares. Porque, si en estos siempre se brinca uno, se obtendrán los hexagonales.

436.

De la misma manera, se encuentran los números heptagonales, octagonales, nonagonales, etcétera. Para los cuales plantearemos las fórmulas generales aquí.

Entonces, si el lado es n, tendremos:

$$
\begin{aligned}
\text{el triángulo} &= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},\\
\text{cuadrilátero} &= \frac{2nn+0n}{2} = nn,\\
\text{5-gono} &= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2},\\
\text{6-gono} &= \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1),\\
\text{7-gono} &= \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2},\\
\text{8-gono} &= \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2),\\
\text{9-gono} &= \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2},\\
\text{10-gono} &= \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3),\\
\text{11-gono} &= \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2},\\
\text{12-gono} &= \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4),\\
\text{20-gono} &= \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8),\\
\text{25-gono} &= \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2},\\
m\text{-gono} &= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}.
\end{aligned}
$$

[*Nota del traductor: Para describir los polígonos en esta tabla, Euler usó números romanos, por ejemplo VI en vez de 6, y la palabra alemana* eck *en vez de la griega* gono. *Es decir, él escribe VIeck en vez de 6-gono o hexágono*.]

437.

Por lo tanto, si el lado es n, entonces, de manera general, se tiene el número m-gonal $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$, de donde se pueden encontrar todos los números poligonales posibles cuyo lado $= n$. Si se quisiera encontrar el número 2-gonal, entonces sería $m = 2$ y el mismo $= n$.

Si se toma $m = 3$, el número triangular $= \frac{nn+n}{2}$.

Si se toma $m = 4$, el número cuadrilátero $= nn$, etc.

438.

Para explicar esta regla con algunos ejemplos, buscamos el número 25-gonal cuyo lado es 36. Primero buscamos el número 25-gonal para el lado n, que es $=\frac{23nn-21n}{2}$. Ahora, se pone $n = 36$, entonces se obtiene el número buscado = 14526.

439.

Pregunta: alguien compró una casa y se le pregunta, ¿en cuánto? Él responde que el número de rublos que paga es el número 365-gonal de 12.

Para encontrar este número, ponemos m = 365 y, por lo tanto, el 365-gono de n es $=\frac{363nn-361n}{2}$. Ahora es $n = 12$, por lo cual el precio buscado de la casa será de 23970 rublos.

CAPÍTULO 6

DE LA RELACIÓN GEOMÉTRICA

440.

La relación geométrica entre dos números contiene la respuesta a la pregunta: ¿cuántas veces es un número más grande que el otro? La respuesta se encuentra dividiendo uno entre el otro, y el cociente indica la *razón* de la relación geométrica.

441.

Hay tres cosas a considerar en una relación geométrica. En primer lugar, el primero de los números dados, que se llama *antecedente*. Segundo, el otro de la misma, que se llama *consecuente*. Tercero, la *razón* que se encuentra al dividir el antecedente entre el consecuente. Por ejemplo, si se tiene que encontrar la relación entre los números 18 y 12, entonces 18 es el antecedente, 12 el consecuente y la razón será $=\frac{18}{12}=1\frac{1}{2}$; de donde se puede ver que el antecedente 18 comprende el consecuente 12, una vez, y además $\frac{1}{2}$ vez.

442.

Para representar la relación geométrica de dos números, se usan dos puntos colocados uno encima del otro, que se ponen entre el antecedente y el consecuente.

Entonces $a:b$ muestra la relación de *a* y *b*. Como ya se mencionó anteriormente, el signo [:] también indica la división, y se usa aquí precisamente por eso; porque para obtener la razón, el número *a* debe dividirse entre *b*; este signo se lee así: *a* es a *b*.

443.

Por lo tanto, la razón de dicha relación se expresa mediante una fracción, cuyo numerador es el antecedente y cuyo denominador es el consecuente. Pero para mayor claridad, esta fracción siempre debe reducirse a su forma más pequeña, lo que se logra dividiendo el numerador y denominador entre su máximo común divisor, como ya sucedió arriba, donde redujimos el quebrado $\frac{18}{12}$ a $\frac{3}{2}$, dividiendo el numerador y denominador entre 6.

444.

Por eso, las relaciones solo son diferentes, si sus razones son diferentes, y por lo tanto hay tantos tipos diferentes de relaciones, como razones diferentes.

El primer tipo ahora es, sin duda, el que tiene la razón l; y esto sucede cuando los dos números son iguales, como $3:3$, $4:4$, $a:a$, de los cuales la razón es 1, y por lo tanto, se llama la *relación de igualdad*.

Después siguen aquellas cuya razón es un número entero como $4:2$, donde la razón es 2. Además $12:4$, donde la razón es 3, y $24:6$, donde la razón es 4, etc.

Después hay aquellas cuyas razones se expresan por fracciones. Como $12:9$, cuya razón es $\frac{4}{3}$ o sea $1\frac{1}{3}$; $18:27$, cuya razón es $\frac{2}{3}$, etc.

445.

Ahora, el antecedente sea *a*, el consecuente sea *b*, y la razón sea *d*, ya hemos visto que, dadas *a* y *b*, se encuentra $d=\frac{a}{b}$.

En cambio, si el consecuente *b* se da junto a la razón *d*, entonces se encuentra el antecedente $a=bd$, porque *bd* divido entre *b* da *d*. Finalmente, si el antecedente *a* se da con la razón *d*, entonces se encuentra el consecuente $b=\frac{a}{d}$. Porque si se divide el antecedente *a* entre el consecuente $\frac{a}{d}$, entonces el cociente es *d*, o sea la razón.

446.

Cada relación $a:b$ permanece igual si el antecedente y el consecuente se multiplican o se dividen por el mismo número, porque la razón sigue siendo la misma. Si *d* es la razón de $a:b$, tal que $d=\frac{a}{b}$, entonces la razón de la relación $na:nb$ es $\frac{a}{b}=d$; y la razón de la relación $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ es también $\frac{a}{b}=d$.

447.

Si la razón se ha reducido a la forma más pequeña, la relación puede reconocerse claramente y expresarse en palabras. Es decir, si el término se ha reducido a la fracción

$\frac{p}{q}$, se dice: $a:b = p:q$, y dicho en palabras: *a* es a *b* como *p* es a *q*. Entonces, ya que la relación $6:3$ tiene la razón $\frac{2}{1}$, o sea 2, tenemos $6:3 = 2:1$. También se dice $18:12 = 3:2$, y $24:18 = 4:3$ y además $30:45 = 2:3$. Pero si la razón no se deja reducir, la relación también no será más clara: porque si uno dice $9:7 = 9:7$, no se hace más comprensible.

448.

Pero si la razón puede reducirse a números muy pequeños, se obtiene un conocimiento claro de una relación entre dos números muy grandes. Entonces, si uno dice 288 : 144 = 2 : 1, el asunto está muy claro; y si se pregunta cómo es la relación 105 : 70, se responde: como 3 : 2. Si además se pregunta cómo es la relación 576 : 252, se responde: como 16 : 7.

449.

Entonces, para representar cada relación de la manera más clara, se debe tratar de reducir la razón de la relación a los números más bajos, lo que se puede lograr en un solo paso dividiendo los dos términos de la relación entre su máximo común divisor. Así, la relación $576:252$ se reduce de un golpe a $16:7$ dividiendo los dos números 576 y 252 entre 36, que es su máximo común divisor.

450.

Ya que en este asunto el punto es saber encontrar el máximo común divisor de dos números dados, en el siguiente capítulo se dará la instrucción necesaria.

CAPÍTULO 7

DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS NÚMEROS DADOS

451.

Hay números que aparte de 1 no tienen otro común divisor, y si el numerador y el denominador de una fracción son así, ella no puede ser reducida a una forma más fácil.

Por ejemplo, los dos números 48 y 35 no tienen un común divisor, aunque cada uno tiene sus propios divisores. Por eso la relación $48:35$ no se puede expresar en una forma más fácil, a pesar de que ambos se pueden dividir entre l, lo que no reduciría los números.

452.

Pero si los números tienen un común divisor, lo encontramos mediante la siguiente regla, que incluso nos da el máximo común divisor.

Divídase el número más grande entre el más pequeño; el divisor anterior se divide entre el resto; nuevamente, se divide el divisor anterior entre el resto reciente; y se continúa de esta manera hasta que la división salga sin resto. Entonces el último divisor es el máximo común divisor de los dos números dados.

Para los números 576 y 252 este procedimiento se plantea así:

$$\begin{array}{r|c|l} 252 & 576 & 2 \\ & 504 & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|l} 72 & 252 & 3 \\ & 216 & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|l} 36 & 72 & 2 \\ & 72 & \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{0} & \end{array}$$

Entonces aquí el máximo común divisor es 36.

453.

Será útil explicar esta regla con algunos ejemplos. Buscamos el máximo común divisor de los números 504 y 312.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
312 & 504 & 1 & & & & & \\
 & \underline{312} & & & & & & \\
 & 192 & 312 & 1 & & & & \\
 & & \underline{192} & & & & & \\
 & & 120 & 192 & 1 & & & \\
 & & & \underline{120} & & & & \\
 & & & 72 & 120 & 1 & & \\
 & & & & \underline{72} & & & \\
 & & & & 48 & 72 & 1 & \\
 & & & & & \underline{48} & & \\
 & & & & & 24 & 48 & 2 \\
 & & & & & & \underline{48} & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Entonces 24 es el máximo común divisor, y por eso la relación $504:312$ se puede reducir a la forma $21:13$.

454.

Además, buscamos el máximo común divisor de los dos números $625:529$.

$$
\begin{array}{r|r|l}
529 & 625 & 1 \\
 & 529 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
96 & 529 & 5 \\
 & 480 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
49 & 96 & 1 \\
 & 49 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
47 & 49 & 1 \\
 & 47 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
2 & 47 & 23 \\
 & 46 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
1 & 2 & 2 \\
 & 2 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Es decir, aquí el máximo común divisor es 1, y por lo tanto, la relación $625:529$ no se puede reducir a una forma más fácil, es decir, no se puede expresar con números más pequeños.

455.

Ahora todavía es necesario dar la demostración de la regla. Sea a el mayor y b el menor de los números dados, y d sea un común divisor de ellos. Ya que a y b se pueden dividir entre d, $a-b$ también se puede dividir entre d, lo mismo con $a-2b$ y $a-3b$, y en general $a-nb$.

456.

Esto también es cierto al revés, y si los números b y $a-nb$ se pueden dividir entre d, entonces el número a también tiene que ser divisible entre d. Porque, dado que nb se puede dividir, $a-nb$ no sería divisible si a no se pudiera dividir también.

457.

También se debe tener en cuenta que si *d* es el máximo común divisor de los dos números *b* y $a-nb$, también será el máximo común divisor de los números *a* y *b*. Porque, si para estos números *a* y *b*, hubiera un común divisor mayor que *d*, el mismo también sería un común divisor de *b* y $a-nb$, y consecuentemente *d* no sería el mayor. Pero ahora *d* es el máximo común divisor de *b* y $a-nb$, entonces *d* también debe ser el máximo común divisor de *a* y *b*.

458.

Suponiendo estos tres teoremas, dividamos el número más grande *a* entre el más pequeño *b*, como lo ordena la regla, y suponemos que el cociente es *n*, obtenemos el resto $a-nb$, que siempre es más pequeño que *b*. Dado que este resto $a-nb$ y el divisor *b* tienen el mismo máximo común divisor que los números dados *a* y *b*, entonces se divide el divisor anterior *b* entre este resto $a-nb$, y el resto resultante junto con el divisor reciente tiene exactamente el mismo máximo común divisor, y así sucesivamente.

459.

Pero uno continúa hasta llegar a una división donde no quede ningún resto. Ahora, sea *p* el último divisor, que está contenido tantas veces en su dividendo. Entonces el dividendo es divisible entre *p*, y en consecuencia tendrá la forma *mp*; los números *p* y *mp* se pueden dividir entre *p*, y ciertamente no tienen ningún común divisor mayor que este, porque ningún número se puede dividir entre un número mayor que él mismo. Por lo tanto, el último divisor es el máximo común divisor de los dos números *a* y *b* dados al principio, lo cual es la demostración de la regla planteada.

460.

Consideremos un ejemplo más, y busquemos el máximo común divisor de los números 1728 y 2304, entonces el cálculo será como sigue:

$$\begin{array}{r|r|l} 1728 & 2304 & 1 \\ & 1728 & \\ \cline{2-2} \end{array}$$
$$\begin{array}{r|r|l} 576 & 1728 & 3 \\ & 1728 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Entonces 576 es el máximo común divisor, y la razón $1728:2304$ se reduce a $3:4$; en consecuencia, $1728:2304$ es como $3:4$.

CAPÍTULO 8

DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

461.

Dos relaciones geométricas son iguales si sus razones son iguales; y la igualdad de dos de esas relaciones se llama *proporción geométrica*, y se escribe como $a:b=c:d$, pero en palabras se dice así: *a* es a *b* como *c* es a *d*. Ahora, un ejemplo de tal proporción es $8:4=12:6$. Porque la razón de la relación $8:4$ es $\frac{2}{1}$, y esa también es la razón de la relación $12:6$.

462.

Pues, si $a:b=c:d$ es una proporción geométrica, entonces las razones de ambos lados tienen que ser iguales, y por lo tanto $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; y al revés, si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, entonces es $a:b=c:d$.

463.

Por lo tanto, una proporción geométrica consta de cuatro términos que son tales que el primero dividido entre el segundo es igual al tercero dividido entre el cuarto. Eso implica una propiedad principal muy importante de todas las proporciones geométricas: el producto del primer y cuarto término es siempre igual al producto del segundo y el tercero. O más corto, que el producto de los términos de los extremos es igual al producto de los términos de en medio.

464.

Para demostrar esta propiedad, sea $a:b=c:d$ una proporción geométrica, y así $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Se multiplica cada una de estas fracciones por *b*, obteniendo $a=\frac{bc}{d}$, eso se multiplica por *d* en ambos lados, se obtiene $ad=bc$. Pero ahora *ad* es el producto de los términos de los extremos, y *bc* es el producto de los términos de en medio, y así ambos productos son iguales.

465.

Al revés, si cuatro números *a*, *b*, *c*, *d* son tales, que el producto *ad* de los extremos es igual al producto *bc* de los términos de en medio, entonces están en una proporción geométrica. Porque, dado que $ad=bc$, se divide en ambos lados entre *bd*, entonces se obtiene $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, o sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; por lo tanto $a:b=c:d$.

466.

Los cuatro términos de una proporción geométrica como $a:b=c:d$ se pueden intercambiar de diferentes maneras, tal que la proporción permanezca. Lo único que importa es que el producto de los términos de los extremos siga siendo igual al producto de los términos de en medio, o sea que $ad = bc$. Entonces se tendrá, primero $a:b = c:d$, segundo $a:c = b:d$, tercero $d:b = c:a$, cuarto $d:c = b:a$.

467.

Además de estas, también se pueden derivar muchas otras proporciones geométricas. Porque, si $a:b = c:d$, entonces $a+b:a$, o sea el primero + el segundo es al primero, como $c+d:c$, o sea el tercero + el cuarto es al tercero; es decir, $a+b:a = c+d:c$.

También, el primero – el segundo es al primero, como el tercero – el cuarto es al tercero; o sea $a-b:a = c-d:c$.

Porque si uno toma los productos de los extremos y de los términos de en medio, entonces obviamente $ac-bc = ac-ad$, porque $ad = bc$. Además, $a-b:b = c-d:d$, porque $ad-bd = bc-bd$ y $ad = bc$.

468.

Todas las proporciones derivadas de $a:b = c:d$ se pueden representar en forma general como sigue:

$$ma+nb : pa+qb = mc+nd : pc+qd.$$

Porque el producto de los extremos es $mpac+npbc+mqad+nqbd$, que, debido a que $ad = bc$, es igual a $mpac+npbc+mqbc+nqbd$; ahora, el producto de los términos de en medio es $mpac+mqbc+npad+nqbd$; ya que $ad = bc$, esto es $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, así que los dos productos son iguales.

469.

Entonces de una proporción dada, como por ejemplo $6:3 = 10:5$, se pueden derivar un número infinito de otras, de las cuales mostramos algunas:

$$3:6=5:10,\qquad 6:10=3:5,\qquad 9:6=15:10,$$
$$3:3=5:\ 5,\qquad 9:15=3:5,\qquad 9:3=15:\ 5.$$

470.

Ya que en una proporción geométrica, el producto de los extremos es igual al producto de los términos de en medio, entonces, si se conocen los tres primeros términos, se puede encontrar el cuarto. Los tres primeros términos sean $24:15=40$ a $\ldots$ Entonces, dado que el producto de los términos de en medio es 600, el cuarto multiplicado por 24 tiene que dar también 600, por lo tanto hay que dividir 600 entre 24, y el cociente da el cuarto término: 25. Por lo tanto, la proporción es $24:15=40:25.$ Y si, en general, los primeros tres términos son $a:b=c:\ldots,$ entonces, para el cuarto término, que es desconocido, ponemos la letra *d*, y dado que $ad=bc,$ dividimos ambos lados entre *a* y obtenemos $d=\frac{bc}{a};$ por eso el cuarto término $=\frac{bc}{a},$ y se encuentra multiplicando el segundo término por el tercero y dividiendo el producto entre el primer término.

471.

Esta es la base de la famosa *regla de tres* que se encuentra en todos los libros de aritmética; porque en ella de tres números dados siempre se busca el cuarto, que está en una proporción geométrica con los demás; es decir, el primero es al segundo como el tercero es al cuarto.

472.

Aquí hay que tomar nota de algunas circunstancias particulares: si dos proporciones tienen los mismos primeros y terceros términos, como en $a:b=c:d$ y $a:f=c:g,$ entonces también los segundos serán proporcionales a los cuartos, es decir, $b:d=f:g;$ porque de la primera proporción sale $a:c=b:d,$ y de la segunda

$a:c=f:g,$ entonces las relaciones $b:d$ y $f:g$ son iguales, porque cada una es igual a la relación $a:c.$ Por ejemplo, si $5:100=2:40$ y $5:15=2:6,$ eso implica que $100:40=15:6.$

473.

Pero si dos proporciones son tales que tienen términos de en medio iguales, entonces los primeros términos están en una relación inversa a los cuartos. Es decir, si $a:b=c:d$ y $f:b=c:g,$ entonces se deduce que $a:f=g:d.$ Por ejemplo, de las proporciones $24:8=9:3$ y $6:8=9:12$ resulta $24:6=12:3.$ La demostración de esto es obvia: porque la primera proporción da $ad=bc$ y la segunda $fg=bc,$ por lo tanto $ad=fg,$ y $a:f=g:d,$ o sea $a:g=f:d.$

474.

Dadas dos proporciones, siempre se puede hacer una nueva proporción, multiplicando por separado los primeros términos, luego los segundos, los terceros y los cuartos. Entonces, las proporciones $a:b=c:d$ y $e:f=g:h$ generan $ae:bf=cg:dh.$ Porque la primera proporción da $ad=bc,$ y la segunda $eh=fg,$ entonces será $adeh=bcfg.$ Pero ahora $adeh$ es el producto de los extremos, y $bcfg$ el producto de los términos de en medio en la nueva proporción, por lo tanto estos productos son iguales.

475.

Por ejemplo, la combinación de las dos proporciones $6:4=15:10$ y $9:12=15:20$ nos da la siguiente proporción

$$6\cdot 9:4\cdot 12=15\cdot 15:10\cdot 20$$

esto es $$54:48=225:200$$

o $$9:8=9:8.$$

476.

Finalmente, debe notarse aquí que, al revés, si dos productos son iguales, como $ad=bc,$ se puede formar una proporción geométrica de ellos. Porque siempre uno de los factores del primer producto es a uno del segundo, como el otro del segundo es al otro del primero. Aquí será $a:c=b:d$. Por ejemplo, de $3\cdot 8=4\cdot 6$ sale la proporción $8:4=6:3,$ o $3:4=6:8;$ y como $3\cdot 5=1\cdot 15,$ obtenemos $3:15=1:5,$ o $5:1=15:3,$ o $3:1=15:5.$

CAPÍTULO 9

NOTAS SOBRE LAS PROPORCIONES Y SU UTILIDAD

477.

Esta teoría es tan útil en el comercio y en la vida cotidiana en general que casi nadie puede prescindir de ella. Los precios y los bienes son siempre proporcionales y con los diferentes tipos de dinero, lo esencial es determinar su relación. Esto será muy útil para explicar mejor la teoría presentada y aplicarla con beneficio.

478.

Si se quiere investigar la relación entre dos monedas, p. ej. un luis de oro y un ducado, entonces se tiene que ver cuánto valen estas monedas en algún otro tipo de moneda. Ahora, en Berlín un luis de oro (1 lui.) vale 5 táleros (5 tál.) y 8 groses (8 gro.; o sea $\frac{1}{3}$ tál.), y un ducado (1 duc.) vale 3 táleros; ahora hay que transformar estos dos valores en una sola moneda, ya sea en táleros, o groses. Tomando táleros, se obtiene la proporción: $1\,\text{lui.}:1\,\text{duc.} = 5\frac{1}{3}\ \text{tál.}:3\ \text{tál.}$, es decir como 16 : 9. Tomando groses, se tiene la proporción: $1\,\text{lui.}:1\,\text{duc.} = 128:72 = 16:9$, y de esta proporción se obtiene la relación entre luises de oro y ducados. Planteando la igualdad de los productos de los términos de los extremos y de los de en medio, se obtiene 9 luises de oro = 16 ducados; y mediante esta igualdad uno puede convertir cualquier suma de luises de oro en ducados. Entonces, si se pregunta cuánto son 1000 luises de oro en ducados, se plantea esta regla de tres: 9 luises de oro dan 16 ducados, ¿cuánto son 1000 lui.? Respuesta: $1777\frac{7}{9}$ ducados.

Pero si se pregunta cuánto son 1000 ducados en luises de oro, entonces se plantea esta regla de tres: 16 duc. dan 9 lui., ¿cuánto son 1000 duc.? Respuesta: $562\frac{1}{2}$ lui.

479.

Aquí en San Petersburgo, el valor de un ducado es variable y se basa en el tipo de cambio que determina el valor de un rublo (rub.) en stuivers holandeses, de los cuales 105 valen un ducado.

Entonces, si el tipo de cambio es de 45 stuivers, se tiene la proporción $1\,\text{rub.}:1\,\text{duc.} = 45:105 = 3:7$, y por lo tanto esta igualdad: $7\,\text{rub.} = 3\,\text{duc.}$ Con esto se puede encontrar cuánto es un ducado en rublos: porque $3\,\text{duc.}:7\,\text{rub.} = 1\,\text{duc.}:\ldots$ Respuesta $2\frac{1}{3}$ rublos. Pero si el tipo de cambio es 50 stuivers, se tiene la proporción $1\,\text{rub}:1\,\text{duc} = 50:105 = 10:21$, y por lo tanto la igualdad $21\,\text{rub.} = 10\,\text{duc.}$ Por eso $1\,\text{duc.} = 2\frac{1}{10}\,\text{rub.}$ Pero si el tipo de cambio es de solo 44 stuivers, se tiene

$$1\,\text{rub.} : 1\,\text{duc.} = 44 : 105,$$

por lo tanto $1\,\text{duc.} = 2\frac{17}{44}\,\text{rub.} = 2\,\text{rub.}\ 38\frac{7}{11}$ copecas.

480.

Con esto también podemos comparar más de dos tipos diferentes de monedas, lo que ocurre a menudo cuando se cambia dinero. Para dar un ejemplo de esto, se supone que alguien de aquí transfiere 1000 rublos a Berlín, y quiere saber cuánto valdrá en ducados en Berlín. Pero ahora el tipo de cambio local es $47\frac{1}{2}$ stuivers (es decir, un rublo vale $47\frac{1}{2}$ stuivers holandeses). Luego en Holanda 20 stuivers son un florín holandés. Además $2\frac{1}{2}$ florines holandeses son un tálero especial holandés. Además, el tipo de cambio de Holanda a Berlín es 142, es decir, por 100 táleros especiales en Berlín se pagan 142 táleros. Finalmente l ducado vale 3 táleros en Berlín.

481.

Para resolver esta pregunta, primero vamos paso a paso. Entonces comenzamos con los stuivers, y ya que l rublo = $47\frac{1}{2}$ stuivers, o sea 2 rub. = 95 stuivers, entonces ponemos

$$2\,\text{rublos} : 95\,\text{stuivers} = 1000 : \ldots$$

Respuesta: 47500 stuivers.

Además, seguimos adelante y establecemos

$$20\,\text{stuivers} : 1\,\text{florín} = 47500\,\text{stuivers} : \ldots$$

Respuesta: 2375 florines.

Además, ya que $2\frac{1}{2}\,\text{florines} = 1\,\text{tálero especial},$ o sea $5\,\text{florines} = 2\,\text{táleros especiales},$ ponemos

$$5\,\text{florines} : 2\,\text{táleros esp.} = 2375\,\text{florines} : \ldots$$

Respuesta: 950 táleros especiales.

Además, vamos a los táleros de Berlín, con el tipo de cambio 142:

$$100 \text{ táleros esp.} : 142 \text{ táleros} = 950 \text{ táleros esp.} : \ldots$$

Respuesta: 1349 táleros.

Ahora finalmente vamos a los ducados y, por lo tanto, planteamos

$$3 \text{ táleros} : 1 \text{ ducado} = 1349 \text{ táleros} : \ldots$$

Respuesta: $449\frac{2}{3}$ ducados.

482.

Para explicar aún más tales cálculos, queremos suponer que el banquero en Berlín ponga obstáculos para pagar esta suma, con uno u otro pretexto, sea cual sea, y solo quiere pagar con un descuento del 5 por ciento. Pero esto debe entenderse tal que solo paga 100 en lugar de 105, por lo tanto hay que añadir la siguiente regla de tres:

$$105 : 100 = 449\frac{2}{3} \text{ es a} \ldots$$

Resultan $428\frac{16}{63}$ ducados.

483.

Para esto, ahora se requerían seis cálculos con la regla de tres; pero se han encontrado medios para acortar considerablemente estos cálculos mediante el uso de la llamada *regla de la cadena*. Para explicarla tomemos en consideración los dos primeros términos de los seis cálculos anteriores y los ponemos a la vista aquí:

I.) $2 \text{ rub.} : 95 \text{ stu.}$	II.) $20 \text{ stu.} : 1 \text{ flo.}$	III.) $5 \text{ flo.} : 2 \text{ tál.esp.}$
IV.) $100 \text{ tál.esp.} : 142 \text{ tál.}$	V.) $3 \text{ tál.} : 1 \text{ duc.}$	VI.) $105 \text{ duc.} : 100 \text{ duc.}$

Si ahora consideramos los cálculos anteriores, encontramos que siempre hemos multiplicado la cantidad dada por los segundos términos, y hemos dividido entre los primeros términos; por eso está claro que se encontrará el mismo resultado, si la cantidad dada se multiplica de una vez por el producto de todos los segundos términos y se divide entre el producto de todas los primeros términos; o si esto se plantea en una sola regla de tres: el producto de todos los primeros términos es al producto de todos los segundos términos como el número dado de rublos es al número de ducados pagados en Berlín.

484.

Este cálculo se acorta aún más si se puede reducir cualquier primer término con cualquier segundo término, ya que entonces se tachan esos términos y se sustituyen por los cocientes que se obtienen de la reducción. De esta manera, el ejemplo anterior se plantea así:

$$
\begin{array}{lrcrl}
\text{rub.} & \cancel{2} & : & 19.\cancel{9}\cancel{5} & \text{stu.} \qquad\qquad 1000 \text{ rub.} \\
 & \cancel{2}\cancel{0} & : & 1 & \text{flo.} \\
 & \cancel{5} & : & \cancel{2} & \text{tál. esp.} \\
 & 100 & : & 142 & \text{tál.} \\
 & 3 & : & 1 & \text{duc.} \\
 & \cancel{1}\cancel{0}\cancel{5}.21 & : & \cancel{5}.\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0} & \text{duc.} \\
\hline
 & 63\cancel{0}\cancel{0} & : & 2698 & = 10\cancel{0}\cancel{0} \text{ es a } \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
7) & 26980 \\
\hline
9) & 3854 \quad (2 \\
\hline
 & 428 \quad (2
\end{array}
\qquad \text{Respuesta: } 428\tfrac{16}{63} \text{ ducados.}
$$

485.

Para usar la regla de la cadena, uno debe observar este orden: uno comienza con el tipo de moneda de la que trata la pregunta, y lo compara con otro, con el que la siguiente relación comienza de nuevo, y compara el mismo con un tercero, tal que cada relación comience con el tipo de moneda con la que termina la relación anterior, y así se continúa hasta llegar al tipo moneda que se busca. Finalmente se calculan los gastos.

486.

Para más explicación queremos agregar varias preguntas.

Si los ducados en Hamburgo están 1 % mejor que 2 táleros del banco (es decir, si 50 duc. no valen 100 tál. ban., sino 101), y el tipo de cambio entre Hamburgo y Königsberg es de 119 groses polacos (es decir, l tál. ban. son 119 groses pol.), ¿cuánto son 1000 duc. en florines polacos? (30 groses pol. valen 1 fl. pol.)

$$
\begin{array}{rcrll}
\text{duc. } 1 & : & \cancel{2} & \text{tál. b.} & \qquad 1000 \text{ duc.} \\
\cancel{100}.50 & : & 101 & \text{tál. b.} & \\
1 & : & 119 & \text{gro. pol.} & \\
30 & : & 1 & \text{fl. pol.} & \\
\hline
15\cancel{0}\cancel{0} & : & 12019 & = 10\cancel{0}\cancel{0} \text{ duc. es a } \ldots & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
3) & 120190 & \\
\hline
5) & 40063 & (1 \\
\hline
 & 8012 & (3
\end{array}
$$

Respuesta: $8012\frac{2}{3}$ fl. pol.

487.

Para tener aún más brevedad, se coloca el número de la pregunta arriba de la segunda columna, ya que el producto de la segunda columna, dividido entre el producto de la primera, da la respuesta requerida.

Pregunta: Leipzig pide ducados de Ámsterdam, donde valen 5 fl. 4 stu. corrientes (es decir, un duc. vale 104 stu., o sea 5 duc. son 26 fl.) Si ahora el Agio di Banco en Ámsterdam es 5 % (es decir, 105 corrientes son 100 del Banco), y el tipo de cambio de Leipzig a Ámsterdam en el Banco es de $133\frac{1}{4}$ % (es decir, por 100 tál. se pagan $133\frac{1}{4}$ tál. en Leipzig). Finalmente, 2 tál. hol. valen 5 fl. hol. ¿Cuántos táleros hay que pagar por 1000 ducados en Leipzig, según estos tipos de cambio?

$$
\begin{array}{rrcrl}
 & & & \cancel{5}.\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} & \text{duc.} \\
\hline
\text{duc.} & \cancel{5} & : & 26 & \text{fl. hol. corr.} \\
 & \cancel{1}\cancel{0}\cancel{5}.21 & : & 4.\cancel{2}\cancel{0}.\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0} & \text{fl. hol. b.} \\
 & \cancel{5} & : & \cancel{2} & \text{tál. hol. b.} \\
 & \cancel{4}\cancel{0}\cancel{0}.\cancel{2} & : & 533 & \text{tál. en Leipzig} \\
\hline
 & 21 & & 3)\ 55432 & \\
\cline{4-5}
 & & & 7)\ 18477 & (1 \\
\cline{4-5}
 & & & 2639 & (4
\end{array}
$$

Respuesta: $2639\frac{13}{21}$ tál., o 2639 tál., más casi 15 groses.

CAPÍTULO 10

DE LAS RELACIONES COMPUESTAS

488.

Las *relaciones compuestas* se obtienen de dos o más relaciones, multiplicando los antecedentes y los consecuentes por separado; entonces se dice que la relación de estos productos esta compuesta por las dos o más relaciones dadas.

Así, de las relaciones $a:b$, $c:d$, $e:f$ surge la relación compuesta $ace:bdf$.

489.

Dado que una relación sigue siendo la misma si se dividen ambos términos entre el mismo número (o sea si se simplifica), la composición anterior se puede facilitar mucho si se cancelan o reducen los antecedentes con los consecuentes, como se hizo en el capítulo anterior.

Entonces de las siguientes relaciones dadas se encuentra la compuesta de la siguiente manera. Las relaciones dadas son:

$$12:25, \quad 28:33, \quad \text{y} \quad 55:56$$

$$\begin{array}{l}
\cancel{12}.\cancel{4}.2 : 5.\cancel{25} \\
\cancel{28} \qquad : \cancel{3}.\cancel{33} \\
\cancel{55}.\cancel{5} \quad : \cancel{2}.\cancel{56} \\
\hline
\qquad 2:5
\end{array}$$

Entonces, la composición da la relación $2:5$.

490.

Esto también se aplica de manera general con letras; y en particular es notable el caso en que el antecedente siempre es igual al consecuente anterior. Como en las relaciones:

$$\begin{array}{c}
a:b \\
b:c \\
c:d \\
d:e \\
e:a \\
\hline
\end{array}$$

Entonces la relación compuesta es como $1:1$.

491.

Para mostrar la utilidad de esta teoría, debe tenerse en cuenta que la relación entre dos campos rectangulares se compone de las relaciones de sus longitudes y anchos.

Sean p. ej. dos de estos campos *A* y *B*. La longitud del campo *A* es de 500 pies, y el ancho es de 60 pies. La longitud del campo *B* es de 360 pies y el ancho es de 100 pies; entonces la relación de la longitud es como 500 : 360 y el ancho como 60 : 100. Así tenemos:

$$\begin{array}{c}
\cancel{500}.5 : 6.\cancel{360} \\
\cancel{60} \quad : \quad \cancel{100} \\
\hline
5 : 6
\end{array}$$

Entonces el campo *A* es al campo *B* como 5 es a 6.

492.

Otro ejemplo. El campo *A* mide 720 pies de largo y 88 pies de ancho; pero el campo *B* tiene 660 pies de largo y 90 pies de ancho, por lo que hay que componer las siguientes dos relaciones

$$\begin{array}{ll}
\text{relación de las longitudes} & \cancel{720}.8 \quad : 15.\cancel{60}.\cancel{660} \\
\text{relación de los anchos} & \cancel{88}.\cancel{8}.2 : \qquad \cancel{90} \\
\hline
 & \qquad 16 : 15
\end{array}$$

Y esta es la relación de los campos *A* y *B*.

493.

Además, para poder comparar el espacio o contenido de dos habitaciones, se debe saber que su relación se compone de tres relaciones. Es decir, de la relación de la longitud, la relación del ancho y la relación de la altura. Consideramos p. ej. la habitación *A*, cuya longitud = 36 pies, el ancho = 16 pies y la altura = 14 pies. De otra habitación *B*, la longitud = 42 pies, el ancho = 24 pies y la altura = 10 pies. Entonces las tres relaciones son:

$$\begin{array}{ll}
\text{de la longitud} & \cancel{3}\cancel{6}.\cancel{6}.\cancel{3} : \cancel{4}\cancel{2}.\cancel{6} \\
\text{de lo ancho} & \cancel{1}\cancel{6}.2 \quad : \cancel{2}\cancel{4}.\cancel{3} \\
\text{de la altura} & \cancel{1}\cancel{4}.2 \quad : \cancel{1}\cancel{0}.5 \\
\hline
 & \qquad 4:5
\end{array}$$

Entonces, el contenido de la habitación *A* es al contenido de la habitación *B* como 4 es a 5.

494.

Si las relaciones que se componen de tal forma son iguales, entonces surgen relaciones múltiples. Es decir, de dos relaciones iguales surge una *relación duplicada* o *cuadrática*, de tres iguales una *relación triple* o *cúbica*, y así sucesivamente. Así, las relaciones $a:b$ y $a:b$ dan la relación compuesta $aa:bb$, por lo tanto, se dice que los cuadrados tienen una relación doble de sus raíces. Y tres veces la relación $a:b$ da la relación $a^3:b^3$, por eso se dice que los cubos tienen una relación triple de sus raíces.

495.

En la geometría se demuestra que dos plazas circulares están en la relación duplicada de sus diámetros, es decir, su relación es como la de los cuadrados de sus diámetros.

Dada tal plaza *A* cuyo diámetro = 45 pies, y otra plaza circular *B* con un diámetro = 30 pies, entonces la plaza *A* es a la plaza *B* como $45\cdot 45$ es a $30\cdot 30$, o sea su relación está compuesto de estas dos relaciones iguales:

$$\begin{array}{c}
\cancel{4}\cancel{5}.\cancel{9}.3 : \cancel{3}\cancel{0}.\cancel{6}.2 \\
\cancel{4}\cancel{5}.\cancel{9}.3 : \cancel{3}\cancel{0}.\cancel{6}.2 \\
\hline
9:4
\end{array}$$

Por lo tanto, estas plazas son como 9 es a 4.

496.

Además también se demuestra que los contenidos de las esferas están en la misma relación que los cubos de sus diámetros. Entonces, si el diámetro de una esfera *A* es un pie y el de otra esfera *B* es dos pies, el contenido de la esfera *A* será al de la esfera *B* como $1^3 : 2^3$, o sea $1:8$.

Entonces, si estas esferas están hechas del mismo material, la esfera *B* será ocho veces más pesada que la esfera *A*.

497.

De esto, se puede encontrar el peso de las balas de cañón a partir de sus diámetros, siempre y cuando se tenga el peso de una. Por ejemplo, dada una bala *A*, cuyo diámetro = 2 pulgadas, y que pesa cinco libras, se pregunta sobre el peso de otra bala *B*, cuyo diámetro = 8 pulgadas. Aquí tenemos la proporción $2^3 : 8^3 = 5 : \ldots$ Resultan 320 libras, y este es el peso de la bala *B*. Por otro lado, el peso de otra bala *C*, cuyo diámetro = 15 pulgadas, será

$$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots \quad \text{Respuesta: } 2109\tfrac{3}{8} \text{ libras.}$$

498.

Si se busca la razón de dos fracciones, como $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, esta siempre se puede expresar con números enteros; porque solo hay que multiplicar ambas fracciones por *bd*, entonces sale la razón *ad* : *bc*, que es igual a la anterior, y surge la proporción $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Si *ad* y *bc* tienen divisores comunes, la relación se vuelve aún más fácil. Entonces $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10$.

499.

También se pregunta por la relación de las fracciones $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$, entonces está claro de inmediato que será $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$, lo mismo dicho con palabras: la relación de dos fracciones cuyos numeradores son 1, es inversa a la relación de los denominadores. Esto también se aplica a dos fracciones que tienen el mismo numerador. Porque $\frac{c}{a}:\frac{c}{b}=b:a$, también son inversas a sus denominadores. Pero si dos fracciones tienen el mismo denominador, como $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$, entonces tienen la misma relación que sus numeradores, es decir como $a:b$. Por lo tanto, $\frac{3}{8}:\frac{3}{16} = \frac{6}{16}:\frac{3}{16} = 6:3 = 2:1$, y $\frac{10}{7}:\frac{15}{7} = 10:15$, o sea $2:3$.

500.

En la caída libre de los cuerpos, se observó que en un segundo un cuerpo cae 15 pies, en dos segundos cae de una altura de 60 pies, y en tres segundos 135 pies; se concluyó que las alturas se relacionan como los cuadrados de los tiempos; y por eso, al revés, los tiempos como las raíces cuadradas de las alturas.

Si se pregunta cuánto tiempo tarda una piedra en caer desde una altura de 2160 pies, entonces

$$15:2160=1:\text{cuadrado del tiempo buscado.}$$

Por lo tanto, el cuadrado del tiempo buscado es 144, pero el tiempo mismo es de 12 segundos.

501.

Se pregunta, ¿qué tan profundo puede caer una piedra en una hora, o sea en 3600 segundos?

Entonces se dice: la relación de los cuadrados de los tiempos, es decir $1^2 : 3600^2$, es como la altura dada $= 15$ pies a la altura buscada.

$$\begin{array}{r} 1:12960000 \\ 15 \\ \hline 64800000 \\ 1296 \\ \hline 194400000 \end{array} = 15 \text{ a } \ldots$$

Respuesta: 194 400 000 pies.

Si ahora tomamos en cuenta que 24 000 pies son una milla alemana, esta altura será de 8100 millas, altura que es mayor que el grosor de toda la tierra.

502.

Es lo mismo con el precio de las piedras preciosas, que no depende de su peso, sino de una relación mayor. Para los diamantes, se aplica la regla que el precio está en la misma relación que el cuadrado del peso, o sea que la relación de los precios es igual a la doble relación del peso. Ahora los diamantes se pesan en base a una unidad llamada *quilate*, la cual consta de cuatro *granos*. Si un diamante de un quilate vale dos rublos, un diamante de 100 quilates valdrá tantas veces más como el cuadrado de 100 sea mayor que el cuadrado de 1. Por lo tanto, la regla de tres se debe plantear así:

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ rublos} : \ldots$$

o $1 : 10000 = 2 \text{ rublos} : \ldots$ Respuesta: 20000 rublos.

En Portugal se encuentra un diamante de 1680 quilates, cuyo precio entonces se encuentra así:

$1^2 : 1680^2 = 2 \text{ rublos} : \ldots$ o

$1 : 2822400 = 2 \text{ rublos} : \ldots$ Respuesta: 5644800 rublos.

503.

Los viajes en diligencias y a caballo son ejemplos notables de relaciones compuestas, porque el precio de un viaje se basa en la relación compuesta del número de caballos y del número de millas. Si para un caballo y una milla se pagan 8 groses, o sea $\frac{1}{3}$ tálero, y se desea saber cuánto se debe pagar por 28 caballos y $4\frac{1}{2}$ millas, entonces primero se plantea la relación de los caballos, es decir

$$\begin{array}{ll} 1:28 & \text{debajo se escribe la relación de las millas} \\ \underline{2:9\quad} & \text{y se combina las dos relaciones} \\ 2:252 & \text{o más corto } 1:126 = \frac{1}{3}:\ldots \qquad \text{Respuesta: 42 tál.} \end{array}$$

Si se paga un ducado por 8 caballos y 3 millas, ¿cuánto costarán 30 caballos en 4 millas? Aquí el cálculo se plantea así:

$$\begin{array}{l} \cancel{8}.\cancel{2}:\cancel{3}\cancel{0}.\cancel{1}\cancel{5}.5 \\ \underline{\cancel{3}\quad:\quad\cancel{4}\qquad\qquad} \\ \quad 1:5 \quad = 1\,\text{ducado}:\ldots \end{array}$$

Por lo tanto, el pago es de 5 ducados.

504.

Esta composición de relaciones también ocurre con los obreros, ya que el pago debe hacerse de acuerdo con la relación compuesta del número de obreros y el número de días.

Si, por ejemplo, un albañil recibe 10 groses cada día y se quiere saber cuánto se debe pagar a 24 albañiles que han trabajado durante 50 días, entonces el cálculo es:

$$1:24$$
$$\underline{1:50\quad}$$
$$1:1200 = 10 \text{ gro.} : 500 \text{ tál.}$$
$$\underline{\quad 10 \quad}$$
$$3)\ \underline{12000 \text{ gro.}}$$
$$8)\ \underline{\ 4000 \quad}$$
$$500 \text{ tál.}$$

Debido a que hay cinco magnitudes dadas en tales ejemplos, el método para calcularlos se llama *regla de cinco* en los libros de aritmética.

CAPÍTULO 11

DE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

505.

Una lista de números que aumentan o disminuyen siempre en el mismo número de veces, se llama *progresión geométrica*, porque cada término y su sucesor siempre están en la misma relación geométrica, y el número que muestra cuántas veces cada término es más grande que el anterior se llama *razón*; si el primer término es l y la razón = 2, la progresión geométrica es la siguiente:

términos	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	
prog.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	etc.,

donde ponemos los números arriba para mostrar en que lugar está cada término.

506.

En general, si el primer término = *a* y la razón = *b*, la progresión geométrica es:

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	…	n
prog.	a,	ab,	ab^2,	ab^3,	ab^4,	ab^5,	ab^6,	ab^7	…	ab^{n-1}

Entonces, si esta progresión consta de n términos, el último es $= ab^{n-1}$. Aquí hay que tomar en cuenta, que, si la razón b es mayor que l, los términos van aumentando, pero si la razón $b = 1$, entonces los términos siempre permanecen iguales, y si la razón b es menor que l, o una fracción, entonces los términos disminuyen. Si $a = 1$ y $b = \frac{1}{2}$, se obtiene esta progresión geométrica:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{128},\ \text{etc.}$$

507.

Aquí hay que considerar los siguientes elementos:

I. el primer término, el cual aquí se llama a,
II. la razón, la cual aquí se llama b,
III. el número de términos, representado por n,
IV. el último término, que resultó ser $= ab^{n-1}$.

Por lo tanto, si se dan las tres primeras magnitudes, el último término se encuentra multiplicando la (n–1)-gésima potencia de la razón b, es decir b^{n-1}, por el primer término a.

Si se desea saber el 50.° término de la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, etc., entonces aquí es $a = 1$, $b = 2$ $n = 50$. Por lo tanto, el 50.° término será $= 2^{49}$. Ya que $2^9 = 512$, entonces $2^{10} = 1024$. Tomando el cuadrado da $2^{20} = 1048576$. Tomando otra vez el cuadrado da $2^{40} = 1099511627776$. Si multiplica 2^{40} por $2^9 = 512$, se obtiene $2^{49} = 512 \cdot 1099511627776 = 562949953421312$.

508.

En este tema se suele preguntar, en particular, cómo se puede encontrar la suma de todos los términos de tal progresión, lo cual queremos mostrar aquí de la siguiente manera. Primero consideramos esta progresión de diez términos: l, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, cuya suma denominamos con la letra *s*, tal que

$$s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512,$$

duplicado da:

$$2s = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024.$$

Se resta la progresión anterior, y queda

$$s = 1024 - 1 = 1023;$$

entonces la suma buscada es = 1023.

509.

Ahora suponemos en esta progresión que el número de términos no está determinado, y lo ponemos = *n*, tal que la suma será

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots 2^{n-1},$$

multiplicado por 2 da

$$2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots 2^n;$$

de esto se resta lo anterior y se obtiene $s = 2^n - 1$. Por lo tanto, la suma buscada se encuentra multiplicando el último término 2^{n-1} por la razón 2, que da 2^n, y restando l de este producto.

510.

Explicamos esto mediante los siguientes ejemplos, sustituyendo *n* paso a paso por 1, 2, 3, 4, etc.:

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 4 = 7, \quad 1 + 2 + 4 + 8 = 15,$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31, \quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63, \text{ etc.}$$

511.

En este tema es costumbre plantear la siguiente pregunta: alguien vende su caballo según los clavos de herradura, que son 32; para el primer clavo se pide 1 penique, para el segundo 2 peniques, para el tercer 4 peniques, para el cuarto 8 peniques y siempre para los siguientes dos veces lo del anterior. Ahora la pregunta es, ¿en cuánto se vendió este caballo?

Aquí se tiene que continuar la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc., hasta el 32.° término, y buscar la suma de todos. Como el último término ahora será 2^{31}, y ya encontramos anteriormente $2^{20} = 1\,048\,576$, esto se multiplica por $2^{10} = 1024$, obteniendo $2^{30} = 1\,073\,741\,824$. Multiplicando por 2, obtenemos el último término $2^{31} = 2\,147\,483\,648$; en consecuencia, la suma será el doble de este número menos 1: es $4\,294\,967\,295$ peniques;

2) 4 294 967 295 peniques
6) 2 147 483 647 (1
o sea 357 913 941 groses 3 peniques
3) 357 913 941
8) 119 304 647
o sea 14 913 080 tál. 21 gro. 3 peniques

Por lo tanto, el precio del caballo será 14913080 tál. 21 gro. 3 peniques.

512.

Ahora sea la razón = 3 y la progresión geométrica sea 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, y la suma de estos 7 términos se tiene que encontrar. Por lo pronto, esta suma sea $= s$, de modo que:

$$s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Multiplicamos por 3 y tenemos

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Si se resta la serie anterior, se obtiene $2s = 2187 - 1 = 2186.$ Por lo tanto, la suma duplicada = 2186 y, en consecuencia, la suma 1093.

513.

En esta misma progresión, sea el número de términos $= n$ y la suma $= s$, asi que $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^{n-1}$, multiplicado por 3 da $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^n.$ Restamos lo anterior de esto, y como todos los términos en la serie inferior, excepto el último, se cancelan con todos de la serie anterior, excepto el primero, se obtiene $2s = 3^n - 1$ y por lo tanto $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

Entonces, la suma se encuentra multiplicando el último término por 3, restando 1 del producto y dividiendo el resto entre 2, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

$$1 = 1, \quad 1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4, \quad 1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13,$$

$$1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40,$$

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121.$$

514.

Ahora, de manera general, sea el primer término $= a$, la razón $= b$, el número de términos $= n$ y la suma de ellos $= s$, tal que

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^{n-1}.$$

Esto se multiplica por b y se obtiene

$$bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^n.$$

De esto restamos lo anterior, así se obtiene $(b-1) \cdot s = ab^n - a.$ Entonces la suma buscada resulta ser

$s = \frac{ab^n - a}{b-1}$. Por lo tanto, la suma de cualquier progresión geométrica se encuentra multiplicando el último término por la razón de la progresión, restando el primer término del producto y dividiendo el resto entre la razón menos l.

515.

Consideramos una progresión geométrica de 7 términos; el primero = 3 y la razón = 2, luego $a = 3$, $b = 2$ y $n = 7$, en consecuencia el último término es $3 \cdot 2^6$, que es $3 \cdot 64 = 192$, y la progresión misma:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192.$$

Entonces, el último término 192 multiplicado por la razón 2 da 384, restado el primer término 3, quedan 381, este resto dividido entre $b - 1$, es decir entre 1, da 381, que es la suma de la progresión.

516.

Además, consideramos una progresión geométrica de seis términos, de los cuales el primero es 4, y la razón $\frac{3}{2}$. Por lo tanto la progresión es:

$$4,\ 6,\ 9,\ \frac{27}{2},\ \frac{81}{4},\ \frac{243}{8},$$

cuyo último término, $\frac{243}{8}$, multiplicado por la razón $\frac{3}{2}$, da $\frac{729}{16}$, restado de esto el primer término 4, da $\frac{665}{16}$, y finalmente, este resto dividido entre $b - 1 = \frac{1}{2}$, da $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

517.

Si la razón es menor que 1 y, por lo tanto, los términos de la progresión siempre disminuyen, se puede dar la suma de una progresión que continúa sin fin.

Por ejemplo, sea el primer término = l, la razón $=\frac{1}{2}$ y la suma = s, tal que

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}, \text{ etc.,}$$

sin fin. Se multiplica por 2, entonces se obtiene:

$$2s=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}, \text{ etc.,}$$

sin fin. De esto se resta lo anterior, así queda $s = 2$, que es la suma de la progresión infinita.

518.

Además, sea el primer término = l, la razón $=\frac{1}{3}$ y la suma = s, tal que

$$s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}, \text{ etc., sin fin.}$$

Se multiplica todo por 3, entonces se tiene:

$$3s=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}, \text{ etc., sin fin.}$$

De esto se resta la serie anterior, así queda $2s=3$, por lo tanto la suma es $=1\frac{1}{2}$.

519.

Sea, además, el primer término = 2, la razón $=\frac{3}{4}$, y la suma = s, tal que $s=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$, etc., sin fin. Esto se multiplica por $\frac{4}{3}$, entonces se tiene

$$\frac{4}{3}s=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}, \text{ etc., sin fin.}$$

De esto se resta lo anterior, queda $\frac{1}{3}s=\frac{8}{3}$, por lo tanto la suma misma será 8.

520.

Si, en general, se pone el primer término = a, la razón $= \frac{b}{c}$, donde esta fracción es menor que 1, es decir b es menor que c, entonces la suma de esta progresión infinita se puede encontrar de la siguiente forma. Ponemos

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}, \text{ etc.,}$$

sin fin. Aquí se multiplica por $\frac{b}{c}$, entonces se obtiene:

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}, \text{ etc.,}$$

sin fin. Esto se resta de lo anterior, así queda $(1-\frac{b}{c})s = a$, por lo tanto la suma es

$$s = \frac{a}{1-\frac{b}{c}}.$$

Si se multiplica arriba y abajo por c, se obtiene $s = \frac{ac}{c-b}$, por lo tanto, la suma de esta progresión geométrica infinita es

$$= \frac{a}{1-\frac{b}{c}} \quad \text{o} \quad = \frac{ac}{c-b}.$$

Es decir, esta suma se encuentra dividiendo el primer término a entre 1 menos la razón; o se resta la razón de 1, y el primer término se divide entre el resto, obteniendo la suma.

521.

Si en tales progresiones alternan los signos + y –, se puede encontrar la suma justamente de la misma manera. Porque sea

$$s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}, \text{ etc.}$$

Multiplíquese esto por $\frac{b}{c}$, así se obtiene:

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4}, \text{ etc.}$$

Esto se suma a lo de arriba, luego se obtiene $(1+\frac{b}{c})s = a$.
De esto se encuentra la suma deseada

$$s = \frac{a}{1+\frac{b}{c}} \quad \text{o} \quad s = \frac{ac}{c+b}.$$

522.

Por ejemplo, sea el primer término $a = \frac{3}{5}$ y la razón $= \frac{2}{5}$, o sea $b = 2$ y $c = 5$, entonces se encuentra la suma de la serie $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$, etc., de esta manera: se resta la razón de 1, queda $\frac{3}{5}$, entre esto hay que dividir el primer término $\frac{3}{5}$, se obtiene la suma = 1.
Pero si los signos + y – se alternan y se tiene la serie

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625}, \text{ etc.,}$$

la suma será

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Para practicar, planteamos esta progresión infinita

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000}, \text{ etc.}$$

Aquí el primer término es $\frac{3}{10}$ y la razón $\frac{1}{10}$. Restando la razón de 1 quedan $\frac{9}{10}$. Dividiendo el primer término entre este resto da la suma $\frac{1}{3}$.

Si se toma solo un término, o sea $\frac{3}{10}$, falta $\frac{1}{30}$. Si se toman dos términos, o sea $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{33}{100}$, falta $\frac{1}{300}$ para que sea $\frac{1}{3}$, etc.

524.

En la serie infinita

$$9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}, \text{ etc.},$$

el primer término es 9, y la razón $\frac{1}{10}$. Entonces, 1 menos la razón es $\frac{9}{10}$. Dividimos el primer término 9 entre esta diferencia, da la suma = 10. Aquí hay que notar, que esta serie se puede representar por la fracción decimal 9,9999999, etc.

CAPÍTULO 12

DE LAS FRACCIONES DECIMALES INFINITAS

525.

Arriba vimos que en los cálculos con logaritmos se usan fracciones decimales en lugar de quebrados comunes, lo que puede ser de gran ventaja también en otros cálculos. Por eso es importante mostrar cómo convertir una fracción común en una fracción decimal, y, al revés, cómo se expresa el valor de una fracción decimal mediante un quebrado común.

526.

De manera general, la fracción dada sea $\frac{a}{b}$, la cual debe ser convertida en una fracción decimal. Ya que este quebrado expresa el cociente que surge cuando se divide el numerador *a* entre el denominador *b*, se escribe *a* en la forma *a*,0000000, que obviamente indica nada menos que el número *a*, porque no hay décimos, ni centésimos, etc. Esta forma se divide entre *b* según las reglas habituales de la división, pero prestando atención para poner la coma (que distingue los fracciones decimales de los números enteros) en el lugar debido. Esto lo explicaremos mediante los siguientes ejemplos.

Primero, la fracción dada sea $\frac{1}{2}$, entonces la división decimal se escribe así:

$$\frac{2)\ 1{,}0000000}{\quad 0{,}5000000 = \frac{1}{2}}$$

De esto vemos que $\frac{1}{2}$ es lo mismo que 0,5000000, o sea que 0,5, lo cual es obvio porque esa fracción decimal indica $\frac{5}{10}$, que es lo mismo que $\frac{1}{2}$.

527.

Además, dado el quebrado $\frac{1}{3}$, se tiene la fracción decimal:

$$\frac{3)\ 1{,}0000000}{\quad 0{,}3333333,\text{ etc.} = \frac{1}{3}}$$

De esto vemos que esta fracción decimal, cuyo valor es $\frac{1}{3}$, no puede ser truncada en ningún lugar, sino que sigue al infinito con 3. Por lo tanto, la suma de todas las fracciones $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}$, etc., sin fin da justamente $\frac{1}{3}$, como hemos demostrado anteriormente.

Para $\frac{2}{3}$ encontramos la siguiente fracción decimal que también continúa hasta el infinito:

$$\begin{array}{l} 3)\ \ 2{,}0000000 \\ \hline \qquad 0{,}6666666,\text{ etc.} = \frac{2}{3} \end{array}$$

Lo que también está claro por lo anterior, porque este quebrado es el doble del anterior.

528.

Para el quebrado $\frac{1}{4}$ tenemos la división

$$\begin{array}{l} 4)\ \ 1{,}0000000 \\ \hline \qquad 0{,}2500000 = \frac{1}{4} \end{array}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{4}$ es lo mismo que 0,2500000, o sea que 0,25, lo cual está claro porque

$$\frac{2}{10}+\frac{5}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}.$$

Asimismo, para el quebrado $\frac{3}{4}$ se obtiene la siguiente fracción decimal:

$$\begin{array}{l} 4)\ \ 3{,}0000000 \\ \hline \qquad 0{,}7500000 = \frac{3}{4} \end{array}$$

Entonces es $\frac{3}{4}=0{,}75$, es decir $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}=\frac{75}{100}$, esta fracción, simplificado con 25, da $\frac{3}{4}$.

Si se quiere convertir $\frac{5}{4}$ en una fracción decimal, se tiene

$$\begin{array}{r} 4)\ \ 5,0000000 \\ \hline 1,2500000 = \frac{5}{4} \end{array}$$

Y esto es $1+\frac{25}{100}$, lo cual es $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

529.

De esta manera se obtiene $\frac{1}{5}=0,2$; y $\frac{2}{5}=0,4$; además $\frac{3}{5}=0,6$; $\frac{4}{5}=0,8$, y $\frac{5}{5}=1$; luego $\frac{6}{5}=1,2$, etc.

Si el denominador es 6, entonces obtenemos $\frac{1}{6}=0,1666666$, etc., que es lo mismo que $0,666666-0,5$. Pero ahora es $0,666666=\frac{2}{3}$ y $0,5=\frac{1}{2}$, entonces $0,1666666=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Además se encuentra $\frac{2}{6}=0,3333333,\text{etc.}=\frac{1}{3}$; en cambio, $\frac{3}{6}$ se convierte en $0,5000000=\frac{1}{2}$. Además, $\frac{5}{6}=0,8333333=0,3333333+0,5$, es decir, $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

530.

Si el denominador es 7, las fracciones decimales se vuelven más enredadas: así, $\frac{1}{7}$ resulta ser $=0,142857$, etc., donde hay que notar que las cifras 142857 aparecen repetidamente. Para demostrar que esta fracción decimal justamente da $\frac{1}{7}$, la convertimos en una progresión geométrica, cuyo primer término es $=\frac{142857}{1000000}$ y cuya razón es $=\frac{1}{1000000}$; entonces la suma será $=\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$. Multiplicando arriba y abajo por 1000000, la suma será

$$=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}.$$

531.

Se puede demostrar de una manera aún más fácil, que la fracción decimal encontrada es exactamente $\frac{1}{7}$. Para el valor ponemos la letra s, tal que

$$\begin{array}{rrl}
 & s = & 0,142857142857142857, \text{etc.} \\
\text{luego} & 10s = & 1,42857142857142857, \text{etc.} \\
 & 100s = & 14,2857142857142857, \text{etc.} \\
 & 1000s = & 142,857142857142857, \text{etc.} \\
 & 10000s = & 1428,57142857142857, \text{etc.} \\
 & 100000s = & 14285,7142857142857, \text{etc.} \\
 & 1000000s = & 142857,142857142857, \text{etc.} \\
 & \text{réstese } s = & 0,142857142857, \text{etc.} \\
\hline
 & 999999s = & 142857
\end{array}$$

Ahora se divide entre 999999, así se obtiene $s = \frac{142857}{999999}$, y este es el valor de la fracción decimal de $\frac{1}{7}$ dado arriba.

532.

De la misma manera se convierten $\frac{2}{7}$ en la fracción decimal 0,28571428, etc. Esto nos lleva a un modo más fácil de encontrar el valor de la fracción decimal anteriormente denominado s; porque esta fracción es el doble del anterior, y por lo tanto $= 2s$. Ya habíamos calculado que

$$\begin{array}{rrl}
 & 100s = & 14,28571428571, \text{etc.} \\
\text{restando } 2s & 2s = & 0,28571428571, \text{etc.} \\
\hline
\text{queda} & 98s = & 14 \\
\text{por eso} & s = & \frac{14}{98} = \frac{1}{7}.
\end{array}$$

Además será $\frac{3}{7} = 0,42857142857$, etc., que según lo dicho arriba = $3s$; pero hemos encontrado

$$\begin{array}{lr} & 10s = 1,42857142857, \text{ etc.} \\ \text{restar} & 3s = 0,42857142857, \text{ etc.} \\ \hline \text{queda} & 7s = 1, \\ \text{entonces} & s = \frac{1}{7}. \end{array}$$

533.

Entonces, si el denominador de la fracción dada es 7, la fracción decimal continúa hasta el infinito y se repiten 6 cifras dentro de ella, cuya causa se puede entender fácilmente; porque dividiendo continuamente, se llega a un resto que ya se había obtenido al principio. Ahora, no puede haber más restos diferentes que 1, 2, 3, 4, 5, 6, por lo que a partir de la sexta división, tienen que salir de nuevo aquellos números que salieron al principio. Sin embargo, si el denominador es tal que la división es finita, esto no se da.

534

Si el denominador de la fracción es 8, entonces se encuentran las siguientes fracciones decimales:

$$\frac{1}{8} = 0,125; \quad \frac{2}{8} = 0,250; \quad \frac{3}{8} = 0,375; \quad \frac{4}{8} = 0,500;$$
$$\frac{5}{8} = 0,625; \quad \frac{6}{8} = 0,750; \quad \frac{7}{8} = 0,875, \text{ etc.}$$

535.

Si el denominador es 9, se encuentran las siguientes fracciones decimales: $\frac{1}{9} = 0,111$, etc., $\frac{2}{9} = 0,222$, etc., $\frac{3}{9} = 0,333$, etc. Ahora, si el denominador es 10, se obtienen los siguientes fracciones: $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$, lo cual está claro por la naturaleza del asunto. También es

$\frac{1}{100} = 0,01;$ $\frac{37}{100} = 0,37;$ además $\frac{256}{1000} = 0,256;$ y $\frac{24}{10000} = 0,0024;$ lo cual es obvio por sí mismo.

536.

Sea el denominador 11, entonces se encuentra la fracción decimal $\frac{1}{11} = 0,0909090,$ etc. Si estuviera dada esta fracción, y tendríamos que encontrar su valor, entonces lo ponemos $= s$. Por tanto, $s = 0,0909090$ y $10s = 0,909090.$ Además, $100s = 9,09090.$ Restando s de esto, da $99s = 9$ y por eso $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Por lo tanto:

$$\frac{2}{11} = 0,181818, \text{ etc.};$$

$$\frac{3}{11} = 0,272727, \text{ etc.};$$

$$\frac{6}{11} = 0,545454, \text{ etc.}$$

537.

Aquí, aquellas fracciones decimales que contienen algunas cifras que se repiten continuamente hasta el infinito, son muy notables. La forma de encontrar el valor de tales fracciones fácilmente, se mostrará en seguida.

En primer lugar, si solo se repite una cifra, que sea $= a$, entonces tenemos $s = 0,aaaaaaa.$ Luego

$$\begin{array}{rl} & 10s = a,aaaaaaa \\ \text{restar} & s = 0,aaaaaaa \\ \hline \text{da} & 9s = a, \text{ entonces } s = \frac{a}{9}. \end{array}$$

Si se repiten dos cifras como ab, uno tiene $s = 0,abababa.$ Por eso, $100s = ab,ababab;$ restando s de esto, queda $99s = ab;$ entonces $s = \frac{ab}{99}$.

Si se repiten tres cifras como *abc*, uno tiene $s = 0{,}abcabcabc$; por eso, $1000s = abc{,}abcabc$. Restando s de esto, queda $999s = abc$; entonces $s = \frac{abc}{999}$, y así sucesivamente.

538.

Siempre que aparezca tal fracción decimal, es fácil indicar su valor: dado 0,296296, su valor será $= \frac{296}{999}$. Simplificado con 37 es $= \frac{8}{27}$.

De esto, al revés, debe salir la fracción decimal anterior; para demostrar esto más fácilmente, ya que $27 = 3 \cdot 9$, primero se divide 8 entre 9 y el cociente además entre 3, como sigue:

$$\begin{array}{rl} 9) & 8{,}0000000 \\ 3) & 0{,}8888888 \\ \hline & 0{,}2962962, \text{etc.} \end{array}$$

La cual es la fracción decimal dada.

539.

Para dar otro ejemplo, convertimos el quebrado

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

en una fracción decimal, lo cual se hará de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l}
2) & 1,000\,000\,000\,000\,00 \\ \hline
3) & 0,500\,000\,000\,000\,00 \\ \hline
4) & 0,166\,666\,666\,666\,66 \\ \hline
5) & 0,041\,666\,666\,666\,66 \\ \hline
6) & 0,008\,333\,333\,333\,33 \\ \hline
7) & 0,001\,388\,888\,888\,88 \\ \hline
8) & 0,000\,198\,412\,698\,41 \\ \hline
9) & 0,000\,024\,801\,587\,30 \\ \hline
10) & 0,000\,002\,755\,731\,92 \\ \hline
 & 0,000\,000\,275\,573\,19
\end{array}$$

CAPÍTULO 13

DEL CÁLCULO DE INTERESES

540.

Los intereses sobre un capital suelen ser expresados en porcientos, diciendo cuánto se pagan por 100 anualmente. Generalmente por el dinero invertido se pagan 5 %, tal que por 100 táleros se pagan 5 táleros de intereses. Por eso es claro y fácil calcular el interés de cualquier capital diciendo según la regla de tres:

100 dan 5, ¿cuánto da el capital dado? El capital sea, por ejemplo, 860 tál., entonces así se encuentra el interés anual:

$$100 : 5 = 860 \text{ a } \ldots \qquad \text{Respuesta: 43 tál.}$$

$$\begin{array}{r}
5 \\ \hline
100)\;4300 \\ \hline
43
\end{array}$$

541.

No queremos demorarnos en el cálculo de este interés simple, sino considerar los intereses compuestos, en los que se agregan los intereses anuales al capital, que por eso aumenta, y la pregunta es: ¿a cuánto aumenta un capital dado, en el transcurso de algunos años? Ya que el capital crece anualmente, y, suponiendo 5 % de interés, 100 táleros crecen a 105 en un año, entonces, ¿se puede encontrar a cuánto crece cualquier capital después de un año?

Sea el capital $= a$, entonces se encuentra el capital después de un año, diciendo: 100 da 105, ¿cuánto da a? Respuesta: $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, lo cual también se puede escribir así: $\frac{21}{20} \cdot a$ o sea $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

542.

Entonces, si al capital actual se suma su 20.ª parte, se obtiene el capital para el próximo año. Si a este otra vez se le suma su 20.ª parte, se encuentra el capital para el segundo año; y sumando a este otra vez su 20.ª parte, sale el capital para el tercer año, y así sucesivamente. De eso se puede ver fácilmente, como el capital crece anualmente, y este cálculo se puede continuar tanto como uno quiera.

543.

El capital actual sea de 1000 tál., invertidos a 5 %, los intereses se suman anualmente al capital. Ya que en el cálculo en cuestión pronto surgen quebrados, los expresaremos en fracciones decimales, pero no más allá de la 1000.ª parte de un tálero, porque las partes más pequeñas aquí no son relevantes.

El capital actual de 1000 tál. será

después de 1 año	1050 tál.
	52,5
después de 2 años	1102,5
	55,125
después de 3 años	1157,625
	57,881
después de 4 años	1215,506
	60,775
después de 5 años	1276,281, etc.

544.

De esta forma se puede continuar con los años que uno quiera; pero si el número de años es muy grande, entonces este cálculo se vuelve muy extenso y laborioso; ahora, el cálculo se puede abreviar de la siguiente manera. El capital actual sea = a, y ya que un capital de 20 tál. después de un año será 21 tál., entonces el capital a en un año aumentará a $\frac{21}{20}\cdot a$. Además, en el año siguiente a $\frac{21^2}{20^2}\cdot a = \left(\frac{21}{20}\right)^2\cdot a$. Este es el capital después de dos años, que dentro de un año aumentará otra vez a $\left(\frac{21}{20}\right)^3\cdot a$, que será el capital después de tres años; después de cuatro años será $\left(\frac{21}{20}\right)^4\cdot a$; después de cinco años $\left(\frac{21}{20}\right)^5\cdot a$; después de 100 años $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\cdot a$; y en general, después de n años $\left(\frac{21}{20}\right)^n\cdot a$; con esto se puede calcular el capital después del transcurso de cualquier número de años.

545.

El quebrado $\frac{21}{20}$ que aparece aquí, surge de tomar el interés al 5 %, y $\frac{21}{20}$ es tanto como $\frac{105}{100}$. Si los intereses se calculan en base al 6 %, entonces el capital *a* en un año aumenta a $\frac{106}{100}\cdot a$, después de dos años a $\left(\frac{106}{100}\right)^2\cdot a$, y después de *n* años a $\left(\frac{106}{100}\right)^n\cdot a$.

Pero si los intereses solo son del 4 %, entonces el capital *a* después de *n* años crecerá a $\left(\frac{104}{100}\right)^n\cdot a$.

546.

Ahora, dados tanto el capital *a* como el número de años, esta fórmula se puede resolver fácilmente mediante los logaritmos. Solo hay que buscar el logaritmo de la fórmula, la cual, para 5 %, es $\left(\frac{21}{20}\right)^n\cdot a$. Ya que ella es un producto de $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ y *a*, entonces su logaritmo es $=\log\left(\frac{21}{20}\right)^n+\log a$. Porque, además, $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ es una potencia, entonces $\log\left(\frac{21}{20}\right)^n = n\log\frac{21}{20}$. Por eso el logaritmo del capital buscado es $=n\cdot\log\frac{21}{20}+\log a$. Pero el logaritmo del quebrado $\frac{21}{20}$ es $=\log 21-\log 20$.

547.

Ahora, sea el capital = 1000 tál., y se pregunta cuánto será después de 100 años al 5 % de interés. Entonces aquí es $n=100$. El logaritmo del capital buscado será

$=100\log\frac{21}{20}+\log 1000,$ el cual se calculará de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrcl} & \log 21 & = & 1,3222193 \\ \text{restar} & \log 20 & = & 1,3010300 \\ \hline & \log\frac{21}{20} & = & 0,0211893 \\ \text{mult. por } 100 & & & \\ \hline & 100\log\frac{21}{20} & = & 2,1189300 \\ \text{sumar} & \log 1000 & = & 3,0000000 \\ \hline & & & 5,1189300 \end{array}$$

Este es el logaritmo del capital buscado, y cuyo número consistirá de 6 cifras y por lo tanto será 131501 tál.

548.

Dado un capital de 3452 tál. al 6 %, ¿qué tan grande será en 64 años?

Entonces aquí es $a=3452$ y $n=64.$ Por lo tanto, el logaritmo del capital buscado $=64\log\frac{53}{50}+\log 3452,$ lo cual se calcula así:

$$\begin{array}{rrcl} & \log 53 & = & 1,7242759 \\ \text{restar} & \log 50 & = & 1,6989700 \\ \hline & \log\frac{53}{50} & = & 0,0253059 \\ \hline \text{mult. por } 64; & 64\log\frac{53}{50} & = & 1,6195776 \\ & \log 3452 & = & 3,5380708 \\ \hline & & & 5,1576484 \end{array}$$

Por lo tanto, el capital buscado = 143763 tál.

549.

Si el número de años es muy grande, y porque el logaritmo de un quebrado se multiplica por él, pero los logaritmos en las tablas solo son de 7 dígitos, entonces puede surgir un error notable. Por eso el logaritmo se tiene que tomar con más cifras, como se puede ver en el siguiente ejemplo. Un capital de un tálero queda invertido por 500 años al 5 % de interés, siempre sumando los intereses anuales. La pregunta es, ¿cuánto será el capital en 500 años?

Entonces aquí es $a = 1$ y $n = 500$; por lo tanto, el logaritmo del capital buscado es $= 500 \log \frac{21}{20} + \log 1$, de lo cual surge el cálculo que sigue:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \log 21 & = & 1{,}322\,219\,294\,733\,919 \\
\text{restar} & \log 20 & = & 1{,}301\,029\,995\,663\,981 \\
\hline
 & \log \frac{21}{20} & = & 0{,}021\,189\,299\,069\,938 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{\text{mult. por 500 da}} & & 10{,}594\,649\,534\,969\,000
\end{array}
$$

Este es el logaritmo del capital buscado, que por eso será $= 39\,323\,200\,000$ táleros.

550.

Si al capital no solamente se le suma anualmente los intereses, sino también una nueva cantidad $= b$ cada año, entonces el capital actual aumentará como sigue. En el presente se tiene a;

después de 1 año $\frac{21}{20}a + b$

después de 2 años $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a + \frac{21}{20}b + b$

después de 3 años $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

después de 4 años $\left(\frac{21}{20}\right)^4 a + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

después de *n* años $\left(\frac{21}{20}\right)^n a + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b + \cdots + \frac{21}{20}b + b.$

Este capital consta de dos partes, la primera $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a,$ la segunda consiste de la siguiente serie, escrita al revés:

$$b + \left(\frac{21}{20}\right)b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \cdots + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b,$$

la cual es una progresión geométrica, cuya razón es $= \frac{21}{20}.$

Si multiplicamos el último término $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$ por la razón $\frac{21}{20},$ obtenemos $\left(\frac{21}{20}\right)^n b,$ restado el primer término $b,$ queda $\left(\frac{21}{20}\right)^n b - b.$ Esto tiene que dividirse entre 1 menos que la razón, es decir, entre $\frac{1}{20};$ por lo tanto la suma de la progresión anterior es $20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b;$ en consecuencia, el capital buscado será:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n a + 20 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot (a + 20b) - 20b.$$

551.

Para calcular esto, hay que considerar y calcular el primer término, $\left(\frac{21}{20}\right)^n (a + 20b),$ por separado, lo cual se hace buscando su logaritmo, que es $n\log\frac{21}{20}+\log(a+20b)$. En la tabla se busca su número correspondiente, obteniendo el primer término; de él se resta $20b$, y se obtiene el capital buscado.

552.

Pregunta: alguien tiene invertido un capital de 1000 tál. al 5 %, al cual agrega anualmente, aparte de los intereses, 100 tál. ¿Cuál será el capital después de 25 años?

Entonces, aquí es $a=1000$; $b=100$; $n=25$; por eso el cálculo es como sigue:

$$\log\frac{21}{20} = 0{,}021189299$$

mult. por 25 da:

$$25\log\frac{21}{20} = 0{,}5297324750$$

$$\log(a+20b) = 3{,}4771212547$$

$$4{,}0068537297$$

Entonces la primera parte es 10159,1 tál., restando $20b=2000$, da que, después de 25 años, el capital tiene un valor de 8159,1 tál.

553.

Ya que el capital crece cada vez más y después de 25 años habrá aumentado a $8159\frac{1}{10}$ tál., también se puede preguntar, después de cuántos años habrá crecido a 1000000 tál.

Sea n ese número de años, y porque $a=1000$, $b=100$, entonces el capital después de n años será:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n(3000)-2000.$$

Eso tiene que ser 1000000 tál., de lo cual surge la ecuación:

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n - 2000 = 1000000.$$

Sumando 2000 en ambos lados, se obtiene

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 1002000.$$

Se divide en ambos lados entre 3000, y se tiene $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 334.$ Tomando los logaritmos, obtenemos $n\log\frac{21}{20} = \log 334.$ Aquí dividimos entre $\log\frac{21}{20},$ y resulta $n = \frac{\log 334}{\log\frac{21}{20}}.$ Pero ahora es $\log 334 = 2{,}5237465$ y $\log\frac{21}{20} = 0{,}0211893;$ entonces $n = \frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}.$ Se multiplica arriba y abajo por 10000000, y se obtiene $n = \frac{25237465}{211893},$ esto da 119 años 1 mes 7 días, y después de ese lapso el capital crecerá a 1000000 tál.

554.

Pero si en vez de agregarle cada año una cantidad al capital; se quita algo, por ejemplo para el sustento, cuyo monto sea $= b$, entonces el capital, invertido con 5 % de intereses, se desarrollará de la siguiente forma. El capital actual es a;

después de 1 año	$\frac{21}{20}a - b$
después de 2 años	$\left(\frac{21}{20}\right)^2 a - \frac{21}{20}b - b$
después de 3 años	$\left(\frac{21}{20}\right)^3 a - \left(\frac{21}{20}\right)^2 b - \frac{21}{20}b - b$
después de n años	$\left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b - \cdots - \frac{21}{20}b - b.$

555.

El capital se nos muestra en dos partes, una es $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$; y de este se resta la progresión, escrita al revés:

$$b+\left(\frac{21}{20}\right)b+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b+\cdots+\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b.$$

Su suma, encontrada anteriormente, es $=20\left(\frac{21}{20}\right)^n b-20b$, la cual se resta del primer término $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$, y resulta el capital buscado después de n años: $\left(\frac{21}{20}\right)^n (a-20b)+20b.$

556.

Esta fórmula se hubiera podido deducir inmediatamente de la anterior. Porque antes se sumaba b anualmente, y ahora se resta b anualmente. Entonces, en lugar de $+b$, solo hay que escribir $-b.$ Aquí hay que notar en particular que si $20b$ es mayor que a, entonces el primer término se vuelve negativo, y el capital disminuye más y más; esto se sobreentiendo, ya que si anualmente se quita del capital una cantidad mayor a los intereses, entonces el capital tiene que disminuir cada año, incluso desaparecer finalmente. Explicaremos esto mediante un ejemplo.

557.

Alguien tiene invertido un capital de 100000 tál. al 5 %. Cada año necesita 6000 tál. para su sustento, lo cual es más que los intereses de 100000 tál., que son 5000 tál. Por eso el capital disminuye más y más. Ahora la pregunta es, ¿en cuántos años desaparecerá el capital completamente?

Para este número de años ponemos n, y ya que $a=100000$ tál. y $b=6000$ tál., entonces el capital después de n años será

$$-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n+120000, \text{ o sea } 120000-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n.$$

El capital desaparece si $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ crece a 120000, o si $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n=120000.$ Divido entre 20000 da $\left(\frac{21}{20}\right)^n=6.$ Tomando logaritmos, sale $n\log\frac{21}{20}=\log 6.$ Dividimos entre $\log\frac{21}{20},$ y obtenemos

$$n=\frac{\log 6}{\log\frac{21}{20}}=\frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}, \text{ o sea } n=\frac{7781513}{211893},$$

en consecuencia, n = 36 años 8 meses 22 días; y después de este lapso desaparecerá el capital.

558.

Aquí todavía es necesario mostrar, que con los métodos expuestos también se pueden calcular los intereses por un lapso menor que un año entero. Para eso tambien sirve la fórmula encontrada arriba, que un capital a 5 % crece a $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ en n años; si ahora el tiempo es menor que un año, entonces n será un quebrado, y el cálculo se puede efectuar mediante logaritmos como antes. Si se busca el capital después de un día, se tiene que poner $n=\frac{1}{365}$; si se quiere saber el capital después de dos días, entonces será $n=\frac{2}{365}$, etc.

559.

Sea el capital $a=100000$ tál., a 5 %, ¿cuánto será en 8 días?

Aquí es $a = 100000$ y $n = \frac{8}{365}$; por lo tanto el capital será $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} 100000.$

El logaritmo de esto es

$$\log\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + \log 100000 = \frac{8}{365}\log\frac{21}{20} + \log 100000.$$

Pero ahora es	$\log\frac{21}{20} = 0{,}0211893$
esto multiplicado por $\frac{8}{365}$ da	$0{,}0004644$
sumar $\log 100000$, que es	$\underline{5{,}0000000}$
	$5{,}0004644$

Así obtenemos el logaritmo del capital = 5,0004644. Por lo tanto el capital mismo es 100107 tál., tal que en los primeros 8 días los intereses ya ascienden a 107 tál.

560.

Este tema también incluye la pregunta por el valor actual de una cantidad de dinero a pagar dentro de algunos años. Aquí consideramos que 20 tál. crecen a 21 tál. dentro de un año; entonces, al revés, 21 tál. a pagar dentro de un año, solo valen 20 tál. en el presente. Por lo tanto, si el capital a pagar dentro de un año es a, entonces su valor actual es de $\frac{20}{21}a.$ Entonces, un capital a, a pagar en cierto momento, se multiplica por $\frac{20}{21}$ para obtener el valor que tenía un año antes; dos años antes el valor será $\left(\frac{20}{21}\right)^2 a$; tres años será $\left(\frac{20}{21}\right)^3 a$, y en general, n años antes el valor será $\left(\frac{20}{21}\right)^n a$.

561.

Alguien disfruta durante 5 años una pensión anual de 100 tál., la cual quiere vender en base al 5 % de intereses. ¿Cuánto obtendrá?

Para los 100 tál. a pagar

en 1 año	recibe	95,239
en 2 años	"	90,704
en 3 años	"	86,385
en 4 años	"	82,272
en 5 años	"	78,355
Para todos los 5 años	recibe	432,955

Por lo tanto, por la pensión no se puede exigir más que 432,955 tál., o sea 432 tál. 22 groses 11 peniques.

562.

Pero si una pensión durara muchos años más, el cálculo efectuado de esta manera sería muy laborioso. De la siguiente forma se puede facilitar el cálculo.

La pensión anual sea $= a$, y se empieza a pagar desde ahora, y dura n años. Entonces su valor actual será:

$$a + \frac{20}{21}a + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a + \left(\frac{20}{21}\right)^3 a + \left(\frac{20}{21}\right)^4 a + \cdots + \left(\frac{20}{21}\right)^n a.$$

Esta es una progresión geométrica, cuya suma se tiene que encontrar. Entonces se multiplica el último término por la razón, se obtiene $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; de esto se resta el primer término, queda $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$; esto se tiene que dividir entre la razón menos uno, es decir entre $-\frac{1}{21}$, que es lo mismo que multiplicar por -21. Por lo tanto, la suma buscada será: $= -21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, o sea $21a - 21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$, donde el último término, el término a restar, se puede calcular fácilmente mediante logaritmos.

FIN DE LA PRIMERA PARTE
Y DE LA TERCERA SECCIÓN DE LAS RELACIONES
Y PROPORCIONES