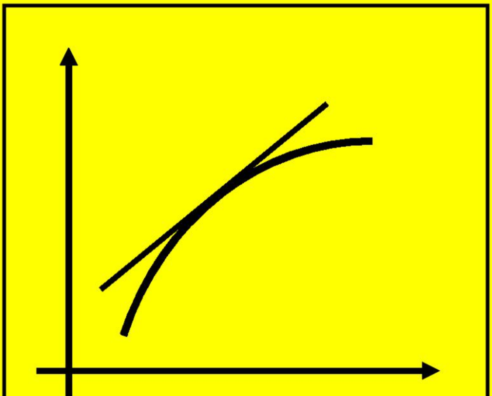
El pequeño libro de

cálculo diferencial

Alexander Roux



Cálculo diferencial

El pequeño libro de

cálculo diferencial

Alexander Roux

Impressum /Aviso legal

ISBN 979-8884036833

Selbstverlag / Edición de autor
c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Str. 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb / Impresión y distribución:
Kindle Direct Publishing
Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,
L-1855 Luxemburg

Prefacio

Muchos libros escolares sobre el tema tienen los siguientes defectos:

1. Un número excesivo de "aplicaciones" y "referencias a lo cotidiano" construidas artificialmente. Eso impide ver lo esencial.

2. Faltan temas que son realmente relevantes en la práctica. Por ejemplo, las series y el método de Newton no son tratados, ni siquiera se mencionan.

3. Un exceso de conceptos y formalismos técnicos que surgieron históricamente apenas siglos después del invento del cálculo. Un primer encuentro con el cálculo debería basarse en los orígenes, los cuales son mucho mas fáciles de entender.

4. La visualidad y estructura dejan mucho que desear. No hay un hilo conductor.

El pequeño libro de cálculo diferencial recalca las ideas fundamentales. Los detalles técnicos sofisticados como derivabilidad y dominios de funciones no son contemplados. En cambio, se ha intentado exponer los razonamientos lo más claro y visual posible. Después de una visión panorámica (introducción), el libro contiene tres partes estratégicas:

1. La explicación de la derivada
2. Calcular la derivada
3. Aplicaciones

Las técnicas de calcular son explicadas detalladamente y mostradas en muchos ejemplos, todos ellos escogidos cuidadosamente para enseñar un aspecto específico. Las aplicaciones importantes que se ven son máximos y mínimos, análisis de curvas, el método de Newton para resolver ecuaciones y la representación de funciones por series.

No se tratan temas avanzados como la continuidad, los teoremas del valor medio, la definición del valor límite y la descripción axiomática de los números reales. Por ese motivo, el título del libro lleva el adjetivo “pequeño”.

¿Cuáles conocimientos previos necesita el lector? El cálculo diferencial es la respuesta a la pregunta de como calcular la tangente a una curva. Por lo tanto, conviene tener conocimientos de sistemas de coordenadas, rectas, parábolas, términos algebraicos y, en algunas ocasiones, un poco de trigonometría.

Después de adquirir las bases del cálculo diferencial, el lector será capaz de aprender el cálculo integral, que en cierto modo es el inverso del cálculo diferencial.

El cálculo diferencial e integral son fundamentos para las matemáticas, la física y muchas otras ciencias. Extendiendo la frase célebre de Galilei, se podría decir que el libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje del cálculo.

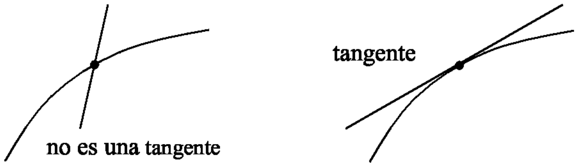
Dr. A. Roux

Brühl, marzo de 2024

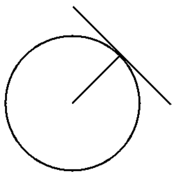
Contenido

1. Introducción y vista panorámica

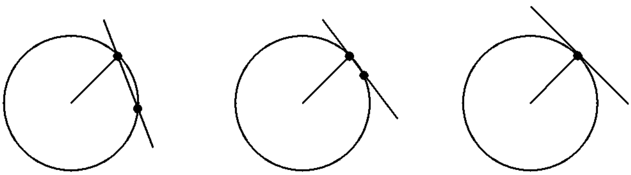
El cálculo diferencial es la respuesta a la pregunta de como encontrar la tangente a cualquier curva. Una tangente es una recta que se adapta especialmente bien a una curva y tiene la misma dirección:



En un círculo es fácil encontrar las tangentes, porque son perpendiculares a los radios:



La tangente también se puede conseguir considerando primero las secantes. Si se acercan los dos puntos de intersección de la secante con la curva, entonces las secantes se acercan a la tangente:



En curvas arbitrarias la situación es más difícil. El problema real consiste en decir qué es una curva arbitraria y como describirla aritméticamente. ¿Y cómo se describe una recta? Después de todo, una tangente es una recta.

Con el invento del sistema de coordenadas por Oresme, estaba disponible una descripción aritmética de curvas y, al revés, una visualización de relaciones aritméticas.
A Viéte le debemos la introducción de letras para la representación general de números. Después de esa hazaña, la descripción de curvas era suficientemente eficiente para imponerse.

Nicole Oresme
aprox. 1323-1382

Obispo de Lisieux.
Logros: fundador de las ciencias económicas, las leyes de la caída libre, raíces consideradas como potencias con exponente quebrado (1/2) y sistemas de coordenadas.

François Viète
1540-1603

Jurista, profesor privado, asesor del rey francés.
Logros: letras para representar números, desciframiento de un código secreto español.

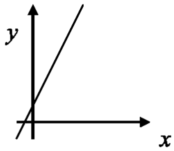
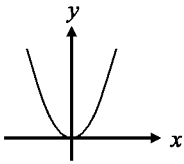
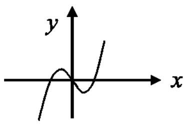
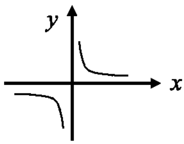
Cuando Descartes y Fermat (independientemente) volvieron a inventar el sistema de coordenadas, ya eran disponibles las cuentas con letras introducidas por Viète. Los sistemas de coordenadas podían desarrollar toda su fuerza.
Ahora cualquier curva es accesible: a cada curva le corresponde una ecuación. Esa ecuación es una fórmula que

da la altura y de la curva en cada posición x. A menudo también se denomina “ecuación de la función”.
La expresión “función” fue introducida a las matemáticas por Leibniz. Él escribió la frase “y depende de x“ en la forma “y es una función de x”, pero en latín.

 René Descartes 1596-1650	 Pierre de Fermat 1601-1665
Jurista y soldado. Logros: sistemas de coordenadas, fundador del racionalismo (filosofía).	Jurista en el parlamento de Toulouse. Logros: sistema de coordenadas, cálculo diferencial, cálculo de probabilidades (con Pascal), Teoría de números, principio de Fermat de la propagación de la luz: la luz toma el camino sobre el cual menos tiempo necesita.

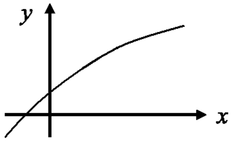
La tabla de la página siguiente resume algunas curvas con sus nombres y ecuaciones.

Ejemplos

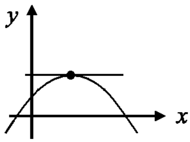
Nombre de la curva	Curva	Ecuación
Recta		$y = 2x + 1$
Parábola		$y = x^2$
Parábola cúbica		$y = x^3 - x$
Hipérbola		$y = \frac{1}{x}$

Si no se considera una curva concreta, sino una curva en general, entonces Leonardo Euler la escribe de la siguiente forma:

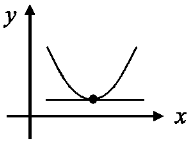
En general

Curva	Ecuación
	$y = f(x)$ Aquí $f(x)$ simboliza una expresión en x. (Euler, 1707-1783)

Fermat ha ido un paso más allá, desarrollando los conceptos básicos del cálculo diferencial en su trabajo *Métodos para determinar máximos y mínimos y tangentes a líneas curvas*.



tangente horizontal
en un valor máximo



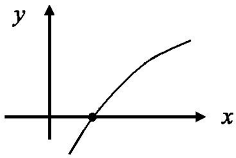
tangente horizontal
en un valor mínimo

Él ya calculó áreas cuyos bordes son de parábolas superiores e hipérbolas. Por lo tanto, Fermat es también un pionero del cálculo integral.

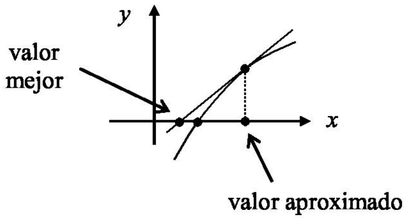
Newton y Leibniz extendieron el cálculo diferencial e integral sistemáticamente. La mayoría de los términos y símbolos usados actualmente en el cálculo diferencial e integral se remontan a Leibniz, quien le daba importancia especial a símbolos y términos matemáticos prácticos y fáciles de entender.

	
Isaac Newton 1643-1727	Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716

Con la ayuda de tangentes, Newton encontró un método de aproximación para resolver ecuaciones. Resolver una ecuación arbitraria $f(x)=0$ visualmente significa encontrar el lugar en el eje x por donde pasa la curva $y=f(x)$.



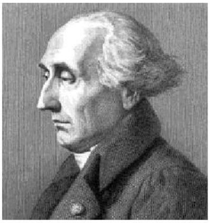
Considerando la tangente como buena aproximación a la curva, se obtienen valores aproximados mejorados para la solución:



La expresión “diferencial” fue acuñada por Leibniz. La pendiente de la secante resulta ser el cociente de las diferencias de las coordenadas y e de las coordenadas x. La pendiente de la tangente puede verse como el cociente de diferencias muy pequeñas, es decir, el *cociente diferencial* $\frac{dy}{dx}$. Siguiendo a Joseph-Louis Lagrange, la pendiente de la tangente también es denominada *derivada* y denotada por una raya como apóstrofo: la derivada de la función $y = f(x)$ es $y' = f'(x)$.

Euler aplicó las notaciones eficientes de Leibniz también en la física e introdujo las denotaciones abstractas para funciones como $f(x)$ que representa una expresión en x. Se lee $f(x)$ como "f de x".

Leonhard Euler
1707-1783



Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

Finalmente, Cauchy puso el cálculo diferencial e integral en la forma precisa e formal que hoy se acostumbra en las universidades. Este librito consiste esencialmente de tres partes.

En la primera parte se explica la derivada visualmente como la pendiente de la tangente.

En la segunda parte se sientan las bases para calcular la derivada de muchas funciones que surgen en la práctica.

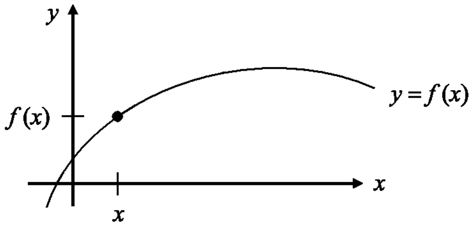
La tercera parte se dedica a las aplicaciones, en el centro de atención están los máximos y mínimos locales, el método de Newton para resolver ecuaciones mediante pasos repetitivos, y la representación de funciones por medio de series.
Estas aplicaciones se distinguen por basarse sobre todo en el significado visual de la derivada y por ser de gran utilidad práctica. Por ejemplo, una calculadora científica usa las series para calcular los valores de las funciones trigonométricas.

2. La derivada

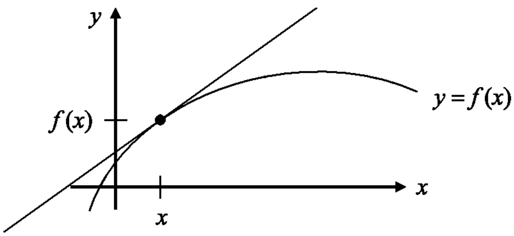
2.1 La derivada como pendiente de la tangente

Como fue explicado en la introducción, consideramos la siguiente situación:

Tenemos una curva arbitraria $y = f(x)$ y un punto x en el eje x. El lugar x determina el punto $(x; f(x))$ en la curva.

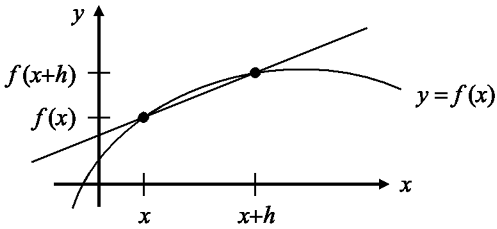


Buscamos la tangente a la curva que pasa por el punto $(x; f(x))$:



Ya que una recta está determinada completamente por un punto y la pendiente, solamente nos falta la pendiente de la tangente. El concepto central del cálculo diferencial es la *derivada*. Ella no es otra cosa que la pendiente de la tangente. La derivada se indica con un apóstrofo. Así la derivada de f en la posición x se escribe como $f'(x)$, que se lee como "f prima de x".

Ahora consideramos la secante en el siguiente dibujo:



Si h se acerca a cero, entonces los puntos x y $x+h$ se juntan cada vez más, y las secantes se acercan más y más a la tangente. En este sentido se refiere a la tangente (pendiente de la tangente) como el *valor límite* de las secantes (pendientes de las secantes; la pendiente de una recta se explica en el anexo 1: rectas, 4.2. y 4.3). Entonces:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \text{la derivada de } f \text{ en el lugar } x \\
&= \text{pendiente de la tangente de } f \text{ en el punto } x \\
&= \text{valor límite de las pendientes de las secantes} \\
&= \text{valor límite de } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

El símbolo “lim” es la abreviatura de palabra latina *limes* = límite. La notación “$h \to 0$” señala que h debe acercarse a cero.

El quebrado $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se llama *cociente de diferencias*. Aunque no es visualmente reconocible, el denominador h también es una diferencia: $h=(x+h)-x$.

Notas sobre las *diferenciales*

El cociente de diferencia de $y=f(x)$ contiene en el numerador una diferencia de valores de *y*, y en el denominador una diferencia de valores de *x*. Por eso tradicionalmente se abrevia mediante la letra griega mayúscula delta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora Δx y por lo tanto Δy son “arbitrariamente” pequeñas (“infinitesimales”), se escribe *dx* respectivamente *dy* por ellas. Estas pequeñas diferencias son denominadas *diferenciales*. La derivada puede escribirse entonces como *cociente diferencial*:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

Estos términos llevaron a las expresiones *cálculo diferencial* y *cálculo infinitesimal*. Este último incluye cálculo diferencial y cálculo integral.

2.2 Ejemplos

Ahora consideramos cuatro ejemplos:

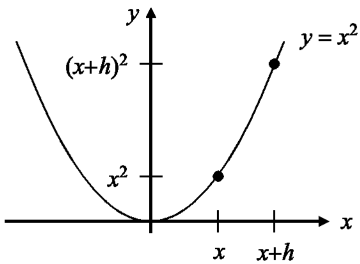
- parábola
- recta
- parábola cúbica
- constante

Ellos tienen el fin de familiarizar al lector con el manejo de cocientes de diferencias y valores límites sencillos.

Empezamos con la curva curvilínea más simple que existe en este mundo: la parábola.

Ejemplo 1: parábola
Calcular la derivada de $f(x) = x^2$.

Solución



Primero calculamos la pendiente de la secante. El resultado ya no es un quebrado, la h ya no esta en el denominador. Ahora se puede ver muy bien lo que pasa, cuando h se acerca a 0: simplemente se puede poner $h = 0$.

La pendiente de la secante es:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \frac{2xh}{h}+\frac{h^2}{h} \\ &= 2x+h\end{aligned}$$

Pendiente de la tangente:
La pendiente de la tangente resulta cuando h se acerca a cero ("$h \to 0$"). Aquí esto prácticamente significa que se puede poner $h = 0$:

$$2x+h \;\to\; 2x+0 \;=\; 2x$$

Entonces:

La derivada de $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$.

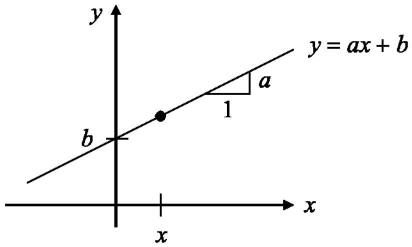
O más breve:

$$(x^2)' = 2x.$$

Ejemplo 2: recta
Calcular la derivada de $f(x)=ax+b$.

Solución (versión 1)

La tangente a una recta es exactamente esta misma recta, porque se ajusta mejor a esta recta.



Derivada:

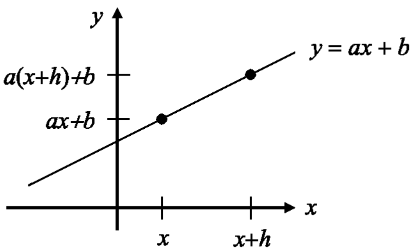
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \text{pendiente de la tangente} \\
&= \text{pendiente de la recta } y = ax+b \\
&= a
\end{aligned}
$$

La derivada de $f(x) = ax+b$ es entonces $f'(x) = a$.

O más breve: $(ax+b)' = a$.

<u>Solución (versión 2)</u>

Con la ayuda de un dibujo calculamos la pendiente de la secante y luego la pendiente de la tangente.



Pendiente de la secante:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} \\ &= \frac{ax+ah+b-ax-b}{h} \\ &= \frac{ah}{h} \\ &= a\end{aligned}$$

Pendiente de la tangente:

La pendiente de la tangente resulta, si h se acerca a cero ($h \to 0$). Aquí esto significa prácticamente que no hay que hacer nada, porque h ya no aparece. *Todas* las secantes tienen la misma pendiente a. Por lo tanto también la tangente:

$$a \to a$$

Entonces:

La derivada de $f(x) = ax+b$ es $f'(x) = a$.

O más breve:

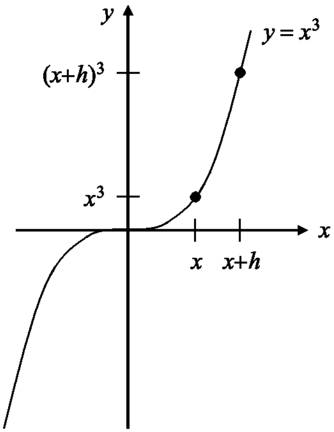
$$(ax+b)' = a\,.$$

Ejemplo 3: parábola cúbica

Calcular la derivada de $f(x) = x^3$.

Solución

Otra vez consideramos la gráfica de la función:



Pendiente de la secante:
Anteponemos un breve cálculo necesario:

$(x+h)^3 = (x+h)^2(x+h) = (x^2+2xh+h^2)(x+h) = x^3+3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \frac{3x^2h}{h} + \frac{3xh^2}{h} + \frac{h^3}{h} \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2
\end{aligned}$$

Ahora la expresión ya no contiene ningún quebrado.

Pendiente de la tangente:
La pendiente de la tangente resulta cuando h se acerca a cero $(h \to 0)$. Aquí de hecho esto significa que se puede poner $h = 0$:

$$3x^2 + 3xh + h^2 \;\to\; 3x^2 + 0 + 0 \;=\; 3x^2$$

Entonces:

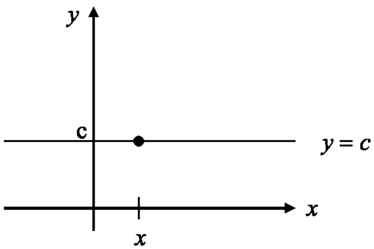
La derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.

O más breve:

$$(x^3)' = 3x^2 .$$

<u>Ejemplo 4: Función constante</u>
Calcular la derivada de $f(x) = c$.
(Esta función también puede verse como un caso especial del ejemplo 2: como una recta con la pendiente cero.)

<u>Solución (versión 1)</u>



Derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{pendiente de la tangente} \\ &= \text{pendiente de la recta } y = c \\ &= 0 \end{aligned}$$

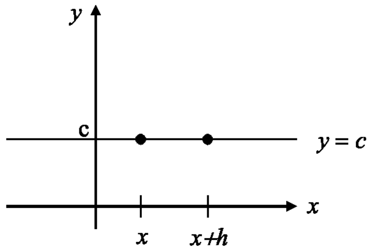
Entonces:

La derivada de $f(x)=c$ es $f'(x)=0$.

O más breve:

$$(c)'=0.$$

Solución (versión 2)



Pendiente de la secante:
Se debe notar que $f(x)$ y $f(x+h)$ ambas son c.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{c-c}{h}\\ &= \frac{0}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

La pendiente de la secante no depende de h.

Pendiente de la tangente:
La pendiente de la tangente resulta, cuando h se acerca a cero ($h \to 0$). Aquí de hecho esto significa que no se tiene que hacer nada, porque h ya no aparece. *Todas* las secan-

tes tienen la misma pendiente 0. Entonces también la tangente:

$$0 \rightarrow 0$$

Entonces:

La derivada de $f(x) = c$ es $f'(x) = 0$.

O más breve:

$$(c)' = 0 .$$

Ejercicios

Para la solución de los ejercicios, los dibujos son de gran ayuda.

1. Determine las derivadas de las siguientes funciones mediante el cociente de diferencias:

a) $f(x) = 3x + 1$
b) $f(x) = c$ (c es una constante)
c) $f(x) = x^3$

Establecer la ecuación de la tangente en $x = 1$.

2. Determine la ecuación de la tangente de la gráfica de $f(x) = x^2$ en $(2; 4)$. Donde corta la tangente el eje x?

3.
a) Use el cociente de diferencias para calcular la derivada de la función $f(x) = 4x^2 + 5x + 3$.
b) Use el resultado de la parte a), para calcular el vértice de la parábola $y = 4x^2 + 5x + 3$.
Nota: en el vértice de la parábola la tangente es horizontal.

4. Determine la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ mediante el cociente de diferencias. Cuáles son las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(0,5; 2)$, $(1; 1)$ y $(2; 0,5)$?

5. Considere la función $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$.
a) Calcule la derivada de la función.
b) Determine la ecuación de la tangente en $x = 4$.

c) Determine la ecuación de la secante, que corta la curva en $x = 4$ y $x = 4{,}5$.
d) Trace la curva, la tangente y la secante.

6. Considere la función $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 2$.

a) Calcule los ceros de $f(x)$, es decir los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x.
b) Calcule la derivada de la función.
c) Determine la ecuación de la tangente en $x = 1$.
d) Calcule el punto de intersección de la tangente con el eje x.
e) Trace la curva y la tangente.

7. Considere la función $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 3$.

a) Calcule los ceros de $f(x)$, es decir los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x.
b) Calcule la derivada de la función.
c) Establezca la ecuación de la tangente en $x = 1$.
d) Calcule el punto de intersección de la tangente con el eje x.
e) Trace la curva y la tangente.

8. Use la derivada, para calcular el vértice de las parábolas:

a) $y = 3x^2 + 18x + 30$
b) $y = 0{,}5x^2 + 2x + 1$
c) $y = 1{,}5x^2 - 9x + 12$

9. Determine la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ utilizando la pendiente de la secante (es decir, el cociente de diferencias). Cuál es la ecuación de la tangente en $x = 2$?

10. Determine la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ utilizando el cociente de diferencias. (Sugerencia: ampliar con $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$.)
Cuál es la ecuación de la tangente en $x = 4$?

3. Calcular la derivada

Muchas de las funciones que aparecen en la práctica se componen de unas pocas funciones básicas importantes. La composición se efectúa mediante las operaciones básicas y la sustitución, como muestran los siguientes ejemplos:

a) $f(x) = x^2 + 1$
resulta de la *adición* de x^2 y 1 (de una función potencia x^n y una función constante c).

b) $f(x) = 3x^2$
resulta de la *multiplicación* de 3 y x^2 (de una función constante c y una función potencia x^n).

c) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$
resulta de la *división* de 3 y $x^2 + 1$.

d) $f(x) = \operatorname{sen}(2x+1)$
resulta de la función $\operatorname{sen} x$ mediante la *sustitución* de x por $2x + 1$.

Para calcular la derivada tenemos que enfocar dos metas estratégicas:

1. **La derivada de las funciones básicas**
   (Constantes, rectas, x^n, e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$*)*

2. **Las reglas de derivación**
   (Regla de la suma, regla del factor, regla del producto, regla del cociente y regla de la cadena)

3.1 Derivadas básicas

Consideramos la derivada de las siguientes funciones.

- Función constante: $f(x)=c$
- Función de las rectas $f(x)=ax+b$
- Función potencia: $f(x)=x^n$
- Función exponencial: $f(x)=e^x$ $(e=2{,}718...)$
- Función seno: $f(x)=\operatorname{sen} x$
- Función coseno: $f(x)=\cos x$

La función constante

La derivada de la función constante $f(x)=c$ es $f'(x)=0$, como ya se había calculado en el ejemplo 4 del capítulo anterior.

La función de las rectas

La derivada de la función $f(x)=ax+b$ es $f'(x)=a$, como ya se había calculado en el ejemplo 2 del capítulo anterior. Un caso especial importante es: $(x)'=1$.

La función potencia

En los ejemplos 1 y 3 del capítulo anterior ya hemos determinado la derivada de x^2 y x^3.
También ya hemos considerado x^1, porque x^1 no es otra cosa que x y esta es un caso particular de $ax+b$ $(a=1$ y $b=0)$:

$$x^1 = x = 1 \cdot x + 0.$$

Según el ejemplo 2 del capítulo anterior, la derivada es entonces:

$$(x^1)' = (1 \cdot x + 0)' = 1.$$

El resultado 1, por cierto, también se puede escribir como potencia: $1 = x^0$.

Resumimos los resultados en una tabla:

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
x^1	$1x^0$
x^2	$2x^1$
x^3	$3x^2$

Se pueden reconocer dos bonitas regularidades:

1. Al derivar la potencia, el exponente se convierte en coeficiente.
2. Al derivar la potencia, el exponente disminuye en ***uno***.

En el lenguaje de las fórmulas, esto significa que:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

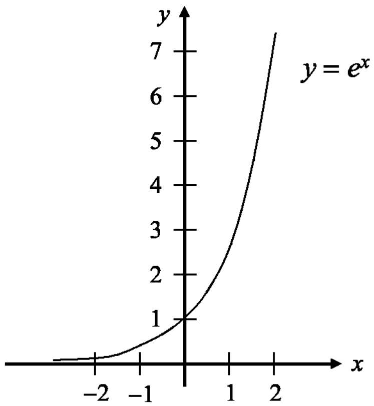
La regla del producto nos dará una demostración general y sencilla de este resultado.

La función exponencial

El número $e = 2{,}718...$ es conocido como el *número de Euler*. Ella es elegida de tal manera, que la derivada de e^x

tenga la forma más simple posible. Esto se explicará a continuación. Primero elaboramos una tabla de valores y con ella graficamos la función exponencial $y = e^x$:

x	e^x	
–2	0,14	$: e$
–1	0,37	
0	1	
1	2,72	$\cdot e$
2	7,39	



1 a la derecha: mult. por 2,718... (aprox. por 3)

Primero consideramos la curva de izquierda a derecha. En cada paso a la derecha, el valor de la función (la altura) se triplica aproximadamente. La curva crece rápidamente más y más (*crecimiento exponencial*).

Partiendo desde la posición 0, ahora consideramos la curva desde la derecha hacia la izquierda. En cada paso hacia la izquierda resulta aproximadamente un tercio del valor de la función (la altura). La curva se ajusta más y más al eje x.

Ahora nos dedicamos a la derivada de la función exponencial:

Pendiente de la secante:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}\\ &= \frac{e^{x}\cdot e^{h}-e^{x}}{h}\\ &= \frac{e^{x}\cdot (e^{h}-1)}{h}\\ &= e^{x}\cdot \frac{e^{h}-1}{h}\end{aligned}$$

Nota: $\frac{e^{h}-1}{h}$ no depende de x.

Pendiente de la tangente:

La pendiente de la tangente resulta, cuando h se acerca a cero $(h \to 0)$. A continuación se explica que la expresión $\frac{e^{h}-1}{h}$ se acercó a 1, cuando $h \to 0$. Si e tuviera un valor distinto a $2{,}718...$ (p.ej. 2), entonces la fracción se acercaría a otro valor, normalmente no entero.

La pendiente de la secante entonces se acerca a e^x:

$$e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \cdot 1 = e^x$$

Entonces:

La derivada de $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$.

O más breve:

$$(e^x)' = e^x$$

Explicaciones acerca de $\frac{e^h - 1}{h}$

Consideramos dos explicaciones para el comportamiento de $\frac{e^h - 1}{h}$ cuando $h \to 0$. Una explicación concreta (pero que se basa en la calculadora) y una abstracta que en cambio nos lleva a formulas para calcular el número e de Euler.

Primera explicación

El lector puede comprobar los valores de la siguiente tabla con la ayuda de la calculadora:

h	$\frac{e^h - 1}{h}$	$\frac{2^h - 1}{h}$
1	1,718 282	1,000 000
0,1	1,051 709	0,717 735
0,01	1,005 017	0,695 555
0,001	1,000 500	0,693 388
0,000 1	1,000 050	0,693 171
0,000 01	1,000 005	0,693 150

De la tabla se puede sacar que

- $\dfrac{e^h - 1}{h}$ se acerca al número entero 1,
- $\dfrac{2^h - 1}{h}$ se acerca al número no entero 0,6931...

cuando h se acerca a 0.

Segunda explicación
Como se hizo en la tabla, consideramos valores especiales cada vez más pequeños para *h*, es decir valores de la forma:

$$h = \frac{1}{2},\ h = \frac{1}{3},\ h = \frac{1}{4},\ h = \frac{1}{5},\ \ldots$$

Dicho de manera general, consideramos

$$h = \frac{1}{n},\ \text{donde}\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Cuando n es grande, h será pequeño.

Si los valores de h son pequeños, $\dfrac{e^h - 1}{h}$ debe ser aproximadamente 1:

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Ahora despejamos e y sustituimos $h = \dfrac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{e^h - 1}{h} &= 1 && |\,\text{por } h \\
e^h - 1 &= h && |\,+1 \\
e^h &= h + 1 && |\,\text{elevado a } \frac{1}{h} \\
e &= (1+h)^{1/h} && |\, h = \frac{1}{n},\ \frac{1}{h} = n \\
e &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n && |\,(n \text{ grande})
\end{aligned}$$

Esta es esencialmente la formula conocida:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

La siguiente tabla muestra, cómo se puede calcular el número de Euler e mediante esta fórmula:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2,594
100	2,705
1000	2,717
10 000	2,718
100 000	2,718

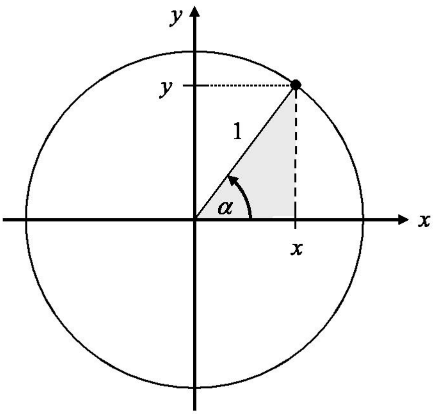
Obtenemos el valor aproximado $e \approx 2{,}718$.

La definición general de seno, coseno y tangente

La definición general se refiere a triángulos rectángulos. En ellos aparecen ángulos de hasta 90°. Para triángulos arbitrarios se aplican la ley del seno y la ley del coseno. Ya que aquí ocurren de hasta 180°, se tenían que extender las definiciones de seno y coseno. De las leyes de seno y coseno se pueden deducir los teoremas de adición para seno y coseno. Estos teoremas de adición dicen como se calculan seno y coseno de una suma de ángulos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

Suponemos que tienen validez para ángulos arbitrarios, entonces permiten la definición y cálculo de seno y coseno para ángulos grandes (y en definitiva cualquiera). Euler ha resumido esta situación realmente bastante complicada con una bonita y corta definición de seno y coseno:



$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= y \\ \cos\alpha &= x \end{aligned}}$$

Esas definiciones generales se basan en las definiciones en el triángulo rectángulo:

seno = cateto opuesto : hipotenusa,
coseno = cateto adyacente : hipotenusa.

En el triángulo rectángulo sombreado, la hipotenusa tiene de largo 1.
El teorema de Pitágoras dice que para el triángulo sombreado tenemos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Necesitamos esta relación al determinar la derivada de la tangente (tan).

En el triángulo sombreado también sugiere, como se puede generalizar la definición clásica

Tangente = cateto opuesto : cateto adyacente

mediante el círculo unitario anterior:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

o también:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

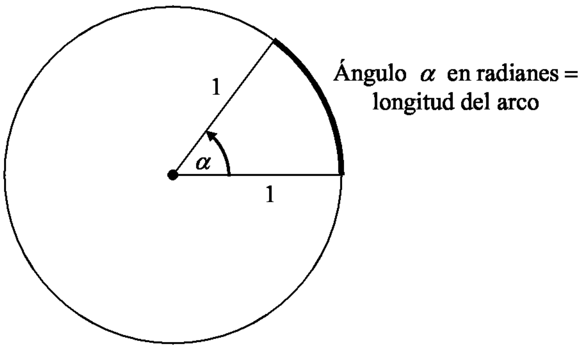
Ángulos en radianes

Cuando consideramos la función seno $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces x es el ángulo en *radianes*. Así por ejemplo el ángulo completo x, no es el número 360 (de 360°), sino el perímetro del círculo unitario:

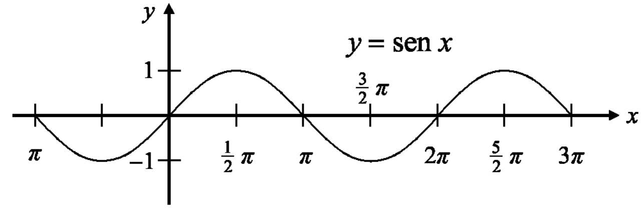
$$x = 2\pi = 6{,}283185...$$

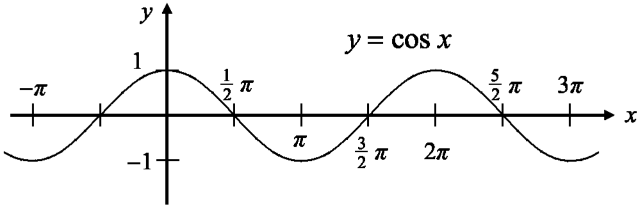
La siguiente tabla resume los ángulos más importantes en grados y radianes:

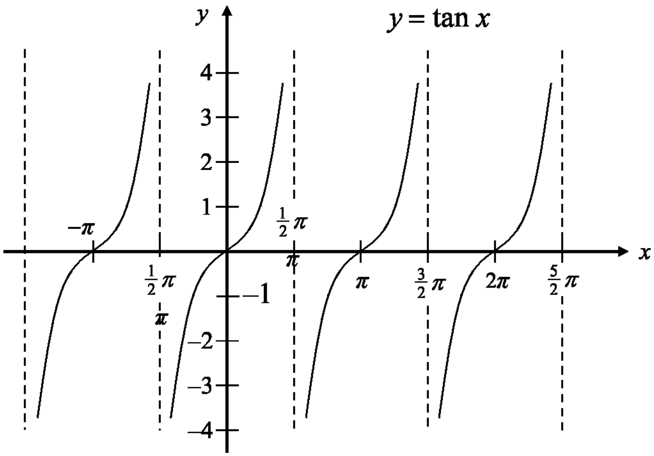
Ángulos en grados	Ángulos en radianes
360°	$2\pi = 6{,}283185...$
180°	$\pi = 3{,}141592...$
90°	$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079...$
60°	$\frac{\pi}{3} = 1{,}04719...$
45°	$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539...$
30°	$\frac{\pi}{6} = 0{,}52359..$
0°	0



Solo si se toman los ángulos en radianes, resultan derivadas sencillas(sin coeficientes en las funciones trigonométricas). Además, entonces las gráficas de las funciones seno y coseno toman la forma bonita que conocemos:


y = sen x
y
x
1
−1
π
½ π
π
3/2 π
2π
5/2 π
3π


y = cos x
y
x
1
−1
−π
½ π
π
3/2 π
2π
5/2 π
3π


y = tan x
y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−π
½ π
π
3/2 π
2π
5/2 π

La derivada de la función seno

Pendiente de la secante:

Usamos el teorema de adición para el seno:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Como en la función exponencial aislamos los términos que no dependen de x.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}\\
&= \frac{\operatorname{sen}x\cdot\cos h + \cos x\cdot\operatorname{sen}h - \operatorname{sen}x}{h}\\
&= \frac{\operatorname{sen}x\cdot(\cos h - 1) + \cos x\cdot\operatorname{sen}h}{h}\\
&= \frac{\operatorname{sen}x\cdot(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x\cdot\operatorname{sen}h}{h}\\
&= \operatorname{sen}x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\operatorname{sen}h}{h}
\end{aligned}$$

Pendiente de la tangente:

La pendiente de la tangente resulta, cuando h se acerca a cero $(h\to 0)$. La expresión $\dfrac{\cos h - 1}{h}$ se acerca a 0 y la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}h}{h}$ se acerca a 1. Esto se explica abajo con más detalle.

Por lo tanto

$$\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

tiende a

$$\operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Por lo tanto,

la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$.

O más breve:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

La derivada de la función coseno

Pendiente de la secante:

Usamos el teorema de adición para el coseno:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Como en el caso de la función seno, aislamos el término que no depende de x.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\
&= \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1)}{h} - \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}
\end{aligned}$$

Pendiente de la tangente:

La pendiente de la tangente resulta, cuando h se acerca a cero ($h \to 0$). La expresión $\frac{\cos h - 1}{h}$ se acerca a 0 y la expresión $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ se acerca a 1. Esto se explica abajo.

Por lo tanto

$$\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

tiende a

$$\cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 = -\operatorname{sen} x.$$

Entonces:

la derivada $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

O más breve:

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Explicaciones sobre $\frac{\cos h - 1}{h}$ ***y*** $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$

Consideramos dos explicaciones para el comportamiento de $\frac{\cos h - 1}{h}$ y $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ cuando $h \to 0$. La primera es visual, pero un tanto vaga, ya que se basa en las curvas de seno y coseno. La segunda también es visual, pero un poco más precisa y extensa. En cambio, muestra las estimaciones típicas al determinar valores límites.

Primera explicación

La tangente a la curva del coseno en el punto $x = 0$ es horizontal, entonces tiene la pendiente 0. La derivada de la función coseno en el lugar $x = 0$ es entonces 0.

La pendiente de la secante ahí es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h}$$

$$= \frac{\cos h \ - 1}{h}$$

y tiende a 0.

La tangente a la curva del seno en el punto $x = 0$ tiene (supuestamente con exactitud) la pendiente 1, como se puede ver en la gráfica. La derivada de la función seno en la posición $x = 0$ es por lo tanto 1.

Ahí la pendiente de la secante es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(0+h)-\operatorname{sen} 0}{h}$$

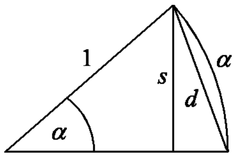
$$= \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

y tiende a 1.

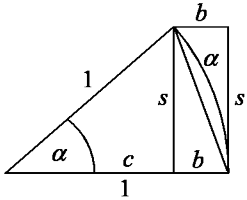
Segunda explicación

Usamos los siguientes dibujos para obtener dos relaciones entre el ángulo α y su seno, sen α.

Para ello consideramos un tramo que es más corto que el arco α, y un tramo que es más largo que α.



Dibujo 1



Dibujo 2

Primera relación: sen $\alpha \leq \alpha$

Del dibujo 1 se puede sacar, que:

a) sen $\alpha = s$

b) cateto $s \leq$ hipotenusa d

c) $d \leq \alpha$ (d siendo recta es la conexión más corta)

Resumido: sen $\alpha = s \leq d \leq \alpha$

Entonces: sen $\alpha \leq \alpha$

Segunda relación: $\alpha - \alpha^2 \leq$ seno α

Usaremos el teorema de Pitágoras, la ampliación (que nos da una fracción), binomios y la desigualdad sen $\alpha \leq \alpha$.

Tomando como base el dibujo 2 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\alpha &\le b+s \\
&= b+\operatorname{sen}\alpha \\
&= 1-c+\operatorname{sen}\alpha \\
&= 1-\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}+\operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1-\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}+\operatorname{sen}\alpha \\
&= \frac{\left(1-\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}\right)\left(1+\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}\right)}{1+\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}}+\operatorname{sen}\alpha \\
&= \frac{1^2-\left(\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}\right)^2}{1+\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}}+\operatorname{sen}\alpha \\
&= \frac{1-\left(1-(\operatorname{sen}\alpha)^2\right)}{1+\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}}+\operatorname{sen}\alpha \\
&= \frac{(\operatorname{sen}\alpha)^2}{1+\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}}+\operatorname{sen}\alpha \\
&\le \frac{\alpha^2}{1+0}+\operatorname{sen}\alpha \\
&= \alpha^2+\operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\alpha &\le \alpha^2+\operatorname{sen}\alpha \\
\alpha-\alpha^2 &\le \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

El comportamiento de $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$

La estimaciones desarrolladas nos proporcionan:

$$h - h^2 \leq \operatorname{sen} h \leq h$$

$$\frac{h - h^2}{h} \leq \frac{\operatorname{sen} h}{h} \leq \frac{h}{h}$$

$$1 - h \leq \frac{\operatorname{sen} h}{h} \leq 1$$

Ahora $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ está encerrado entre $1-h$ y 1. Ya que $1-h$ se acerca a 1 (cuando $h \to 0$), $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ también se tiene que acercar a 1.

El comportamiento de $\frac{\cos h - 1}{h}$

Consideramos por simplicidad sólo el caso de $h > 0$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\cos h - 1}{h} \right| &= \frac{1 - \cos h}{h} \\
&= \frac{(1 - \cos h) \cdot (1 + \cos h)}{h \cdot (1 + \cos h)} \\
&= \frac{1^2 - (\cos h)^2}{h \cdot (1 + \cos h)} \\
&= \frac{1 - (\cos h)^2}{h \cdot (1 + \cos h)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-(\cos h)^2}{h\cdot(1+\cos h)} \\
&\le \frac{(\operatorname{sen} h)^2}{h\cdot(1+0)} \\
&= \frac{(\operatorname{sen} h)^2}{h} \\
&\le \frac{h^2}{h} = h
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$0 \le \left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| \le h.$$

Por eso, $\dfrac{\cos h - 1}{h}$ tiene que acercarse a 0 cuando h tiende a 0.

Para evitar que el árbol no nos deje ver el bosque, concluimos esta sección bastante técnica con una tabla sinóptica en la página que sigue.

Sinopsis

Derivadas básicas

Función constante:	$(c)' = 0$
Función de las rectas:	$(ax+b)' = a$
Función potencia:	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Función exponencial:	$(e^x)' = e^x$
Función seno:	$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
Función coseno:	$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

3.2 Reglas de derivación

Consideramos las siguientes reglas de derivación (entre paréntesis hay dos ejemplos de funciones, a las que se pueden aplicar la regla mencionada):

- Regla de la suma $(x + \operatorname{sen} x,\ x^3 + x^2)$
- Regla del factor $(3 \operatorname{sen} x,\ 5x^2)$
- Regla del producto $(x \cdot \operatorname{sen} x,\ x^2 e^x)$
- Regla del cociente $(\frac{\cos x}{e^x},\ \frac{x}{1+x^2})$
- Regla de la cadena ($\operatorname{sen}(2x+1)$, $(\cos x)^3$)

Cada regla de derivación será formulada (en palabras y en el lenguaje de las fórmulas), luego siguen ejemplos de aplicación y finalmente una demostración de la regla.

<u>La Regla de la suma</u>

Se deriva una suma derivando cada sumando:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

La regla de la suma se aplica análogamente a *diferencias*, porque la diferencia se puede ver como suma:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)\,.$$

El factor -1 se conserva al derivar (Regla del factor).

Ejemplos

$(x + \operatorname{sen} x)' = (x)' + (\operatorname{sen} x)' = 1 + \cos x$

$(x^3 - x^2)' = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x$

$(x^2 + x + 3)' = (x^2)' + (x)' + (3)' = 2x + 1 + 0 = 2x + 1$

Demostración de la regla de la suma

Pendiente de la secante para la función $f(x) + g(x)$:

$$\frac{\big(f(x+h) + g(x+h)\big) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x) \; + \; g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\rightarrow f'(x) + g'(x)$$

La derivada de $f(x) + g(x)$ es entonces $f'(x) + g'(x)$.
Con esto la regla de la suma está demostrada.

La regla del factor

Factores *constantes* se conservan al derivar:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Ejemplos

$$(3\operatorname{sen} x)' = 3(\operatorname{sen} x)' = 3\cos x$$

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5\cdot 2x = 10x$$

$$\begin{aligned}(x^2+5x+3)' &= (x^2)'+(5x)'+(3)' \\ &= 2x+5(x)'+0 \\ &= 2x+5\cdot 1 \\ &= 2x+5\end{aligned}$$

Demostración de la regla del factor

Pendiente de la secante para la función $c\cdot f(x)$:

$$\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h} = c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow c\cdot f'(x)$$

La derivada de $c\cdot f(x)$ es entonces $c\cdot f'(x)$.
Con esto la regla del factor está demostrada.

La regla del producto

Se deriva un producto, derivando cada factor por separado y luego sumando los resultados.

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

La regla del producto también es valida para más de dos factores, p. ej. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}(x\operatorname{sen}x)' &= (x)'\operatorname{sen}x + x(\operatorname{sen}x)'\\ &= 1\cdot\operatorname{sen}x + x\cdot\cos x\\ &= \operatorname{sen}x + x\cos x\end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\begin{aligned}(x^2e^x)' &= (x^2)'e^x + x^2(e^x)'\\ &= 2xe^x + x^2e^x\\ &= (2x+x^2)e^x\end{aligned}$$

Ejemplo 3

$$\begin{aligned}(xe^x\operatorname{sen}x)' &= (x)'e^x\operatorname{sen}x + x(e^x)'\operatorname{sen}x + xe^x(\operatorname{sen}x)'\\ &= (x)'e^x\operatorname{sen}x + x(e^x)'\operatorname{sen}x + xe^x(\operatorname{sen}x)'\\ &= 1e^x\operatorname{sen}x + xe^x\operatorname{sen}x + xe^x\cos x\\ &= (\operatorname{sen}x + x\operatorname{sen}x + x\cos x)e^x\\ &= [(1+x)\operatorname{sen}x + x\cos x]e^x\end{aligned}$$

Ejemplo 4

$$\begin{aligned}(x^3)' &= (x\cdot x\cdot x)'\\ &= (x)'\cdot x\cdot x + x\cdot(x)'\cdot x + x\cdot x\cdot(x)'\\ &= 1\cdot x\cdot x + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1\\ &= x^2 + x^2 + x^2\\ &= 3x^2\end{aligned}$$

Nota: Este ejemplo enseña, que la derivada de x^n también se puede sacar de la regla del producto.

Demostración de la regla del producto

El truco en las transformaciones que siguen es introducir un término mixto $f(x)\cdot g(x+h)$.

Pendiente de la secante para la función $f(x)\cdot g(x)$:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\;+\;f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\rightarrow\; f'(x)\cdot g(x)\;+\;f(x)g'(x)$$

La derivada de $f(x)\cdot g(x)$ es entonces:

$$f'(x)\cdot g(x)\;+\;f(x)g'(x).$$

Con esto, la regla del producto está demostrada.

La regla del cociente

La derivada de un cociente es también un cociente. El denominador se eleva al cuadrado. La expresión en el numerador es como en la regla del producto, pero con signo negativo:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejemplo 1

$$\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot e^x - \cos x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-(\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{e^x}$$

Ejemplo 2

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot (0+2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Ejemplo 3

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2} \\
&= \begin{cases} \dfrac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \dfrac{(\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x \\[2ex] \dfrac{1}{(\cos x)^2} \quad \text{(porque } \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1\text{)} \end{cases} \\
&= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Nota: $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ y $\tan^2 x$ son la notación abreviada para $(\operatorname{sen} x)^2, (\cos x)^2$ y $(\tan x)^2$.

Demostración de la regla del cociente

Reescribimos el cociente (como los babilonios hace 4000 años):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

y aplicamos la regla del producto. Para ello antes tenemos que calcular la derivada de $\dfrac{1}{g(x)}$:

Pendiente de la secante para la función $\dfrac{1}{g(x)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} &= \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\
&= \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}-\frac{g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}\right)\\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}\\
&= \frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}\\
&= -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\\
&\to -g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x)} \quad = \quad -\frac{g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

La derivada de $\dfrac{1}{g(x)}$ es entonces $-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$.

Ahora calculamos la derivada de $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ con la ayuda de la regla del producto:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Con esto la regla del cociente está demostrada.

Por cierto, la regla del cociente se puede obtener también mediante el planteamiento

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x) = f(x).$$

Para ello se derivan ambos lados (regla del producto) y se despeja $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ en la ecuación que resulta.

La regla de la cadena

La regla de la cadena es la regla de derivación más difícil. Así que comenzamos con algunos ejemplos. De ellos se aclara la situación en la que se aplica la regla de la cadena. Además, los ejemplos dicen lo que es la regla de la cadena.

Ejemplo 1
Calculamos la derivada de la función e^{3x}.
La función e^{3x} es como la función e^x, *pero* x *es reemplazada por* $3x$.

Derivamos mediante la regla del producto
($e^{3x} = e^x \cdot e^x \cdot e^x$):

$$\begin{aligned}(e^{3x})' &= (e^x)' \cdot e^x \cdot e^x + e^x \cdot (e^x)' \cdot e^x + e^x \cdot e^x \cdot (e^x)' \\ &= e^x \cdot e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x \cdot e^x \\ &= 3 \cdot e^x \cdot e^x \cdot e^x \\ &= 3 \cdot e^{3x}\end{aligned}$$

Entonces: $(e^{3x})' = 3 \cdot e^{3x}$

Ejemplo 2
Calculamos la derivada de la función $\operatorname{sen}(2x)$.
La función $\operatorname{sen}(2x)$ es como la función $\operatorname{sen} x$, *pero* x *es reemplazada por* $2x$.

Calculamos la derivada con la ayuda del teorema de adición y las reglas del factor y del producto:

$$(\operatorname{sen}(2x))' = (\operatorname{sen}(x+x))'$$

$$
\begin{aligned}
&= (\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x)' \\
&= (2 \operatorname{sen} x \cos x)' \\
&= 2 \cdot [(\operatorname{sen} x)' \cos x \ + \ \operatorname{sen} x (\cos x)'] \\
&= 2 \cdot [\cos x \cos x \ + \ \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)] \\
&= 2 \cdot [\cos x \cos x \ - \ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x] \\
&= 2 \cdot \cos(x + x) \\
&= 2 \cdot \cos(2x)
\end{aligned}
$$

Entonces: $(\operatorname{sen}(2x))' = 2 \cdot \cos(2x)$

Ejemplo 3

Calculamos la derivada de la función $(g(x))^3$.

La función $(g(x))^3$ es como la función x^3, *pero x es reemplazada por* $g(x)$.

Calculamos la derivada con la ayuda de la regla del producto:

$$
\begin{aligned}
[(g(x))^3]' &= [g(x) \cdot g(x) \cdot g(x)]' \\
&= g'(x) \cdot g(x) \cdot g(x) \ + \ g(x) \cdot g'(x) \cdot g(x) \\
&\quad + \ g(x) \cdot g(x) \cdot g'(x) \\
&= 3 \cdot g(x) \cdot g(x) \cdot g'(x) \\
&= 3 \cdot (g(x))^2 \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Entonces: $[(g(x))^3]' = 3 \cdot (g(x))^2 \cdot g'(x)$

Los ejemplos presentados nos enseñan la regla de la cadena.

Resumen

Función y derivada			*Estructura de la función*	
Función	**Derivada**		**f(x)**	**x sustituida por**
e^{3x}	$e^{3x} \cdot 3$		e^x	$3x$
$\operatorname{sen}(2x)$	$\cos(2x) \cdot 2$		$\operatorname{sen} x$	$2x$
$g(x)^3$	$3g(x)^2 \cdot g'(x)$		x^3	$g(x)$

Conclusión

Para derivar una función donde x es sustituida por $g(x)$, primero se puede proceder como si todavía estuviera x. Pero después todavía hay que multiplicar por la derivada del término de sustitución, es decir $g'(x)$. Expresado en el lenguaje general de las fórmulas, esta regla dice:

Función y derivada			*Estructura de la función*	
Función	**Derivada**			**x sustituida por**
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$		$f(x)$	$g(x)$

Los eslabones de una cadena pasan por otros eslabones, de la misma manera $g(x)$ entra a $f(x)$. Esto originó el término *regla de la cadena*. A menudo la derivada $f'(g(x))$ se denomina derivada e*xterior* y $g'(x)$ derivada *interior*.

Regla de la cadena:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ahora consideramos varios ejemplos de cómo calcular la derivada con ayuda de la regla de la cadena. Es de crucial importancia que se capte claramente la estructura de la función.

Ejemplo 4

$((x^2+1)^{10})' = ?$

Estructura de la función: x^{10}, pero x es sustituida por x^2+1.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ((x^2+1)^{10})' &= 10(x^2+1)^9 \cdot (x^2+1)' \\ &= 10(x^2+1)^9 \cdot 2x \\ &= 20x(x^2+1)^9 \end{aligned}$$

Entonces:

$((x^2+1)^{10})' = 20x(x^2+1)^9$

Ejemplo 5

$(\operatorname{sen}(x^3))' = ?$

Estructura de la función: $\operatorname{sen} x$, pero x es sustituida por x^3.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}(x^3))' &= \cos(x^3)\cdot (x^3)' \\ &= \cos(x^3)\cdot 3x^2 \\ &= 3x^2\cos(x^3) \end{aligned}$$

Entonces:

$(\operatorname{sen}(x^3))' = 3x^2\cos(x^3)$

Ejemplo 6

$(\cos^2(5x-3))' = ?$

Estructura de la función: x^2, pero x sustituida por $\cos(5x-3)$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\cos^2(5x-3))' &= [(\cos(5x-3))^2]' \\
&= 2\cdot(\cos(5x-3))^{2-1}\cdot(\cos(5x-3))' \\
&= 2\cdot\cos(5x-3)\cdot(\cos(5x-3))'
\end{aligned}$$

La derivada de $\cos(5x-3)$ requiere otra vez la aplicación de la regla de la cadena:

Estructura de la función: $\cos x$, pero x sustituida por $5x-3$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\cos(5x-3))' &= (-\operatorname{sen}(5x-3))\cdot(5x-3)' \\
&= (-\operatorname{sen}(5x-3))\cdot 5 \\
&= -5\operatorname{sen}(5x-3)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\cos^2(5x-3))' &= 2\cdot(\cos(5x-3))\cdot(\cos(5x-3))' \\
&= 2\cdot(\cos(5x-3))\cdot(-5\operatorname{sen}(5x-3)) \\
&= -10\cos(5x-3)\operatorname{sen}(5x-3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$(\cos^2(5x-3))' = -10\cos(5x-3)\operatorname{sen}(5x-3)$

La demostración de la regla de la cadena

Pendiente de la secante de la función $f(g(x))$ después de ampliar con $g(x+h)-g(x)$:

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} =$$

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

El cociente de diferencias

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}$$

no es otra cosa que la pendiente de la secante de f que corta la curva en las posiciones $g(x+h)$ y $g(x)$.

Si h se acerca a 0, entonces $g(x+h)$ se acerca al lugar $g(x)$. La secante se convierte en tangente de f en la posición $g(x)$:

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \to f'(g(x))$$

Ya que

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to g'(x),$$

resulta en conjunto

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \to f'(g(x))\cdot g'(x)$$

La derivada de $f(g(x))$ es entonces $f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Con ello queda demostrada la regla de la cadena.

La derivada de algunas funciones importantes

Usamos las funciones básicas y las reglas de derivación para calcular la derivada de las siguientes funciones:

- el logaritmo natural $\ln x$,
- la función exponencial general a^x,
- la arcotangente $\arctan x$,
- el arcoseno $\operatorname{arcsen} x$,
- el arcocoseno $\arccos x$.

La derivada del logaritmo natural

El logaritmo natural del número positivo x es el exponente, con el cual x se puede escribir como potencia del número de Euler:

$$x = e^?$$

$?$ = logaritmo natural de x, abreviado $\ln x$

Esta definición se puede resumir en esta relación aparentemente opaca:

$$x = e^{\ln x}.$$

Tomamos la derivada de ambos lados, aplicamos la regla de la cadena y despejamos $(\ln x)'$:

$$\begin{aligned}(x)' &= (e^{\ln x})' \\ 1 &= e^{\ln x} \cdot (\ln x)' \\ 1 &= x \cdot (\ln x)' \\ \frac{1}{x} &= (\ln x)'\end{aligned}$$

Entonces:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Observaciones:
La función exponencial da la potencia e^x para cualquier exponente x. Al revés, la función logaritmo $\ln x$ da el exponente que corresponde al valor x de una potencia. El logaritmo es la *función inversa* de la función exponencial. En lo que sigue consideraremos y derivaremos funciones inversas de otras funciones (tan, sen, cos).

La derivada de la función exponencial general

Transformaremos la potencia a^x en una potencia con base e. Para eso escribimos la base dada a como potencia de e:

$$a = e^{\ln a}$$

Sustituimos eso en la potencia a^x:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

Entonces

$$a^x = e^{(\ln a)x}$$

Ahora podemos calcular la derivada de a^x mediante la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (e^{(\ln a)x})' \\ &= e^{(\ln a)x}\cdot[(\ln a)x]' \\ &= e^{(\ln a)x}\cdot(\ln a) \\ &= a^x\cdot(\ln a) \\ &= (\ln a)\cdot a^x\end{aligned}$$

Entonces

$$(a^x)' = (\ln a)\cdot a^x$$

Nota
Con este resultado y la ecuación de definición del logaritmo, $a^{\log_a x} = x$, se puede calcular ahora la derivada del logaritmo general $\log_a x$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

La derivada de la función arcotangente

La palabra latina "arcus" significa "arco" y aquí en nuestro contexto se lee simplemente como "ángulo". (Ya que estamos tomando los ángulos en radianes, es decir, como longitud del *arco* correspondiente en el círculo unitario.)

La función tangente convierte un ángulo en un valor de tangente. Al revés para cada valor de tangente, la arcotangente nos da el ángulo correspondiente (entre $-90°$ y $90°$, y tomando radianes, esto significa, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$):

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{ángulo}} \arrow[r, shift left, "\tan"] & \boxed{\text{valor de tangente}} \arrow[l, shift left, "\arctan"] \end{tikzcd}$$

Por eso

$$\tan(\arctan x) = x$$

es el valor de tangente original.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{arcotan } x} \arrow[r, shift left, "\tan"] & \boxed{x} \arrow[l, shift left, "\arctan"] \end{tikzcd}$$

La aparentemente opaca ecuación $\tan(\arctan x) = x$ nos permite calcular la derivada de $\arctan x$. Derivamos ambos lados, usando la regla de la cadena y el resultado anterior $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$. Luego despejamos $(\arctan x)'$:

$$\begin{aligned} (\tan(\arctan x))' &= (x)' \\ (1 + (\tan(\arctan x))^2) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\ (1 + x^2) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

La derivada de $\arctan x$ es entonces:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

La derivada de la función arcoseno

Procedemos como en el caso de la arcotangente. La función seno hace de un ángulo un valor de seno. Al revés, para cada valor de seno, el arcsen nos da el ángulo correspondiente (entre $-90°$ y $90°$, y tomando radianes, esto significa, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$; ver gráfica en p. 42):

$$\boxed{\text{ángulo}} \;\underset{\text{arcsen}}{\overset{\text{sen}}{\rightleftarrows}}\; \boxed{\text{valor del seno}}$$

Es por eso que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$$

es de nuevo el valor de seno original.

$$\boxed{\operatorname{arcsen} x} \;\underset{\text{arcsen}}{\overset{\text{sen}}{\rightleftarrows}}\; \boxed{x}$$

Usamos el teorema de Pitágoras disfrazado trigonométricamente que mencionamos arriba (en la página 41):

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

así podemos expresar el coseno por medio del seno.
Despejando $\cos\alpha$, primero se obtiene

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}\,.$$

El signo negativo está descartado porque aquí, como ya se ha dicho, α esta entre –90° y 90°. Ahí el coseno nunca es negativo. Entonces en esta región:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}\,.$$

Ahora podemos calcular la derivada de $\operatorname{arcsen} x$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) &= x \\
(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))' &= (x)' \\
(\cos(\operatorname{arcsen} x))\cdot(\operatorname{arcsen} x)' &= 1 \\
\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2}\cdot(\operatorname{arcsen} x)' &= 1 \\
\sqrt{1-x^2}\cdot(\operatorname{arcsen} x)' &= 1 \\
(\operatorname{arcsen} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

La derivada de la función arcocoseno

Con el método utilizado para para calcular la derivada del arcoseno, también se obtiene la derivada del arcocoseno:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nota
Er arcocoseno tiene valores de 0 a π, es decir, de 0° a 180° (ver la gráfica en p. 42).

Ejercicios

Derivadas básicas

1. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = x^4$
c) $f(x) = x^{25}$
d) $f(x) = x^5$
e) $f(x) = x^{13}$

2. Derive las siguientes funciones de **potencia**:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ (Sugerencia: $\sqrt{x} = x^{1/2}$)

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (Sugerencia: $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$)

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3. Determine las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^{13}}}$

d) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Regla de la suma y regla del factor

1. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x - 3$
b) $f(x) = -8x^2 + 5x + 17$
c) $f(x) = 7x^8 - 3x^5 + 2x^3 - 5x + 8$
d) $f(x) = 1 - 0{,}5x + 3{,}5x^2 - 6x^3$
e) $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 3x + 5$
f) $f(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$
g) $f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
h) $f(x) = 3x^{17} - 4x^9 + 8x^3$
i) $f(x) = \pi x^3 - 2x + 1 + \dfrac{5}{x^2}$
j) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

2. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$
b) $f(x) = 7x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 5x + 13$
c) $f(x) = (3x+5)^2$
d) $f(x) = 8x^3 + 10\sqrt{x}$
e) $f(x) = x + \sqrt{x}$
f) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Regla del producto

1. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \operatorname{sen} x$
b) $f(x) = x \cos x$
c) $f(x) = x e^x$

d) $f(x) = x^3 e^x$
e) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

2. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
b) $f(x) = x^5 \cos x$
c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \qquad [\ = (\operatorname{sen} x)^2\ ]$
d) $f(x) = \cos^2 x \qquad [\ = (\cos x)^2\ ]$
e) $f(x) = e^x e^x$

3. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = 2\, e^x \operatorname{sen} x$
c) $f(x) = (x^2 + 3x + 4)(\operatorname{sen} x + \cos x)$
d) $f(x) = (3x + 5\, e^x)(4\operatorname{sen} x - 3\cos x)$
e) $f(x) = (1+2\cos^2 x)(1-x^2)$

4. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 e^x \operatorname{sen} x$
b) $f(x) = x\ e^x \cos x$
c) $f(x) = x^2 e^x \operatorname{sen} x + x^3 \cos x$
d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^4$
e) $f(x) = (1+x^2)^5$
f) $f(x) = (1+\cos x)^{10}$

Regla del cociente

1. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x+2}{5x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^4}$

f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

g) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$

Regla de la cadena

1. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(3x+5)$

b) $f(x) = \cos(7x+4)$

c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = \cos e^x$

e) $f(x) = (3x+5)^{100}$

f) $f(x) = \cos(7x^5 + 8x^3 + 5x + 13)$

g) $f(x) = e^{4x}$

h) $f(x) = \operatorname{sen} e^x$

i) $f(x) = \operatorname{sen}^{13} x$

j) $f(x) = e^{\cos x}$

k) $f(x) = e^{-x}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

2. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{4x}\cos(7x+3)$
b) $f(x) = \cos^9(x^2+1)$
c) $f(x) = \text{sen}^{20}(x^3+1)$
d) $f(x) = e^{x\,\text{sen}(2x)}$
e) $f(x) = (7x^2+3)^{20}$
f) $f(x) = (3x+5)^{30}$
g) $f(x) = x\cos(x^2e^{3x})$
h) $f(x) = (2-7x)^{30}$

Reglas de derivación mixtas

1. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^x$ [Sugerencia: $2 = e^{\ln 2}$]
b) $f(x) = a^x$ (donde $a > 0$)
c) $f(x) = x^x$ [Sugerencia: $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\cdot\ln x}$]
d) $f(x) = \ln(\text{sen}\, x)$
e) $f(x) = \ln(\cos x)$
f) $f(x) = \cot x$ [Sugerencia: $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$]
g) $f(x) = \ln(1+x^2)$
h) $f(x) = x(\ln x - 1)$
i) $f(x) = \ln(1-x)$
j) $f(x) = \ln(\tan x)$

4. Aplicaciones

Consideramos los siguientes temas:

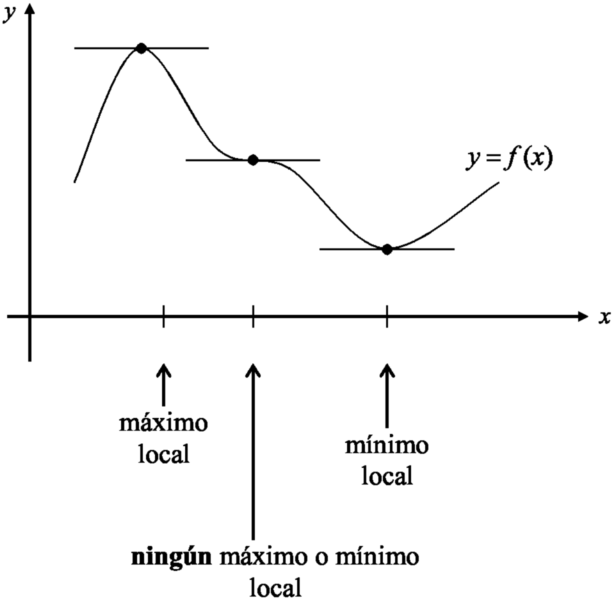
4.1 Máximos y mínimos locales
4.2 Máximos y mínimos locales verdaderos
4.3 Punto de inflexión
4.4 Análisis de curvas
4.5 Método de Newton
4.6 Series

4.1 Máximos y mínimos locales

El Monte Everest es la elevación más alta de la superficie de la tierra. Por lo tanto representa un máximo *global*. El Mont Blanc es el monte más alto en su región. Él no es un máximo global, sino *local*; a veces también se habla de un máximo *relativo*.
Igualmente un mínimo puede ser global o local (relativo).

El concepto "extremo" resume los conceptos "máximo" y "mínimo".

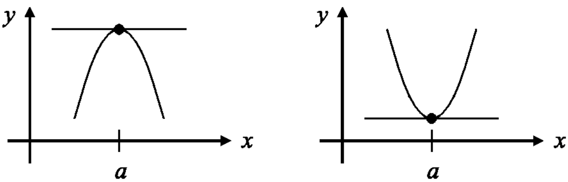
El dibujo siguiente muestra que la tangente en un máximo o mínimo local siempre es horizontal. La pendiente de la tangente ahí es entonces cero, es decir, la derivada es cero. Pero la curva también muestra que tangentes horizontales pueden surgir aunque no haya un máximo o mínimo local.



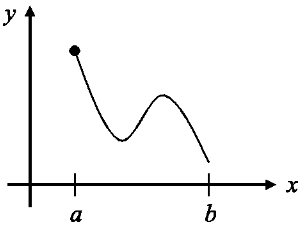
Resumimos:

Si f tiene un máximo o mínimo local en a entonces

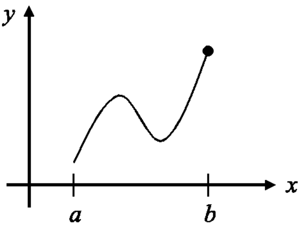
$$f'(a) = 0.$$



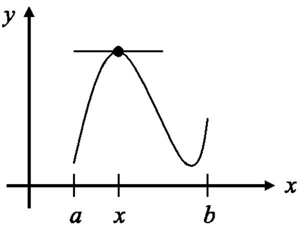
En la práctica muchas funciones se limitan a los valores de x en ciertas *regiones*, por ejemplo a números reales de 0 hasta 10 (breve: $0 \leq x \leq 10$). Nos hacemos una idea visual sobre valores máximos (valores de y) en tales situaciones. Los razonamientos se pueden transferir sin problemas a valores mínimos. Obviamente solo se dan los tres siguientes casos:



máximo
en el *borde* izquierdo
(en a)



máximo
en el *borde* derecho
(en b)



máximo en el *interior*
(en x),
tangente *horizontal*

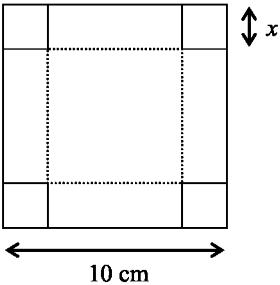
Por lo tanto, para encontrar el máximo hay que tomar en consideración los siguientes candidatos:

1. Puntos del borde de la región.
2. Lugares de x, donde la derivada es cero: $f'(x) = 0$.

De estos pocos candidatos solo queda calcular los valores de la función y encontrar el valor máximo de ellos.

Ejemplo

De un pedazo cuadrático de cartón (de 10 cm de largo) se hace una caja recortando cuadrados iguales en los vértices. ¿Cuál longitud tienen que tener los cuadrados recortados para que la caja tenga el volumen más grande?



Solución

1. El volumen de la caja (dependiendo de x):

$$f(x) = (10 - 2x)^2\, x \qquad (0 \le x \le 5)$$

2. Calcular $f(x)$ en *los bordes de la región* de 0 y 5:

$$f(0) = (...)^2 \cdot 0 = 0$$
$$f(5) = (10 - 2\cdot 5)^2 \cdot 5 = 0^2 \cdot 5 = 0$$

3. Determinar todos los lugares x con tangente *horizontal*:

a) Desarrollar el término de la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= (10-2x)^2 x \\ &= (100-40x+4x^2)x \\ &= 100x-40x^2+4x^3 \\ f(x) &= 4x^3-40x^2+100x \end{aligned}$$

b) Calcular la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3-40x^2+100x)' \\ f'(x) &= 12x^2-80x+100 \end{aligned}$$

c) Calcular todos los lugares, donde la derivada sea cero

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 12x^2-80x+100 &= 0 \\ x^2-\tfrac{20}{3}x+\tfrac{25}{3} &= 0 \\ x &= \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\left(\tfrac{10}{3}\right)^2-\tfrac{25}{3}} \qquad \text{(fórmula } p\text{-}q\text{)} \\ &= \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\tfrac{100-75}{9}} \\ &= \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\tfrac{25}{9}} \\ &= \tfrac{10}{3} \pm \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Resultan las dos soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{10}{3}+\tfrac{5}{3} = \tfrac{15}{3} = 5 \\ x_2 &= \tfrac{10}{3}-\tfrac{5}{3} = \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

d) Los valores de la función en los lugares con tangente horizontal:

$$\begin{aligned} f(x) &= (10-2x)^2 x \\ f(\tfrac{5}{3}) &= (10-2\cdot\tfrac{5}{3})^2\cdot\tfrac{5}{3} \\ &= (\tfrac{20}{3})^2\cdot\tfrac{5}{3} \\ &= \tfrac{2000}{27} \approx 74{,}074 \\ f(5) &= 0 \qquad \text{(punto en el borde, ver arriba)} \end{aligned}$$

4. Determinar el máximo (Comparación)

Todos los candidatos encontrados son:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(\tfrac{5}{3}) &= \tfrac{2000}{27} \approx 74{,}074 \\ f(5) &= 0 \end{aligned}$$

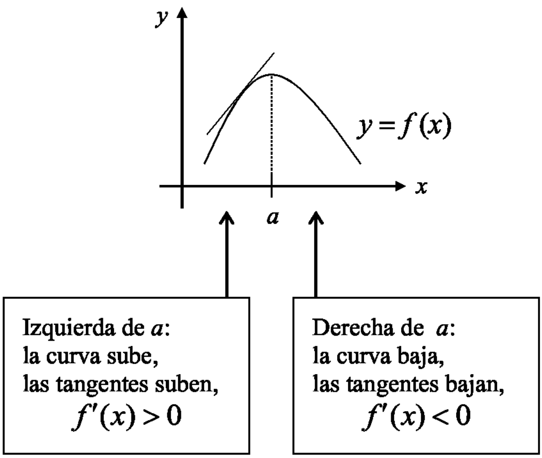
$f(\tfrac{5}{3}) = \tfrac{2000}{27} \approx 74{,}074$ es el más grande de los tres valores.

Por lo tanto,
si se recortan cuadrados de $\tfrac{5}{3}$ cm, resulta la caja con el mayor volumen, que es aproximadamente $74{,}074$ cm^3.

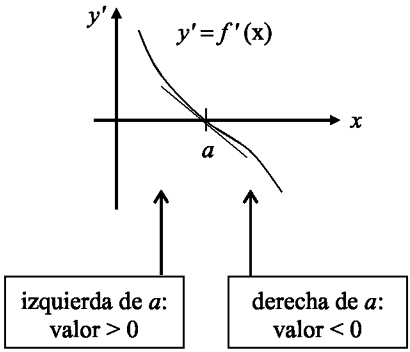
4.2 Máximos y mínimos locales verdaderos

Si f tiene un máximo o mínimo local en a, entonces la tangente en a es horizontal: $f'(a)=0$. Si se han calculado todos los lugares a con $f'(a)=0$ (es decir con tangente horizontal), entonces no se sabe en cuales de esos lugares la curva tiene verdaderamente máximos o mínimos locales.

Para ello desarrollaremos ahora un criterio sencillo. Primero consideramos un máximo local de una función f:



Ahora también graficamos las pendientes de las tangentes $y' = f'(x)$ en un sistema de coordenadas:



La tangente a f' en a baja.
La derivada de f' en a es negativa.

$$f''(a) < 0$$

Podemos poner esos razonamientos en un orden lógico como sigue.

1. Asumimos que la derivada de la función f en el punto a es cero y que la segunda derivada en a es negativa:

$$f'(a) = 0$$
$$f''(a) < 0.$$

2. Estas suposiciones significan visualmente que
   - la curva de la derivada corta el eje x en el punto a,
   - la tangente de la curva de las derivadas en a está bajando.

3. Entonces la derivada de la función toma valores positivos a la izquierda de a, y valores negativos a la derecha de a.

4. La función original es por lo tanto creciente a la izquierda de a y descendente a la derecha de a (como sus tangentes).

5. Entonces f en a tiene un máximo local.

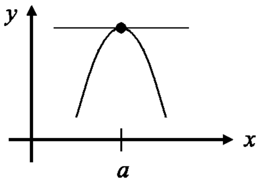
Un razonamiento semejante proporciona el resultado correspondiente para mínimos locales.

Resumimos los resultados en el siguiente criterio.

Si

$$f'(a)=0 \quad \text{y}$$
$$f''(a)<0,$$

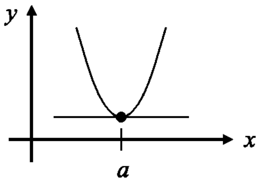
entonces f tiene un máximo local en a.



Si

$$f'(a)=0 \quad \text{y}$$
$$f''(a)>0,$$

entonces f tiene un mínimo local en a.



Ahora consideramos tres ejemplos. El primer ejemplo es la parábola estándar $y=x^2$, que, como es conocido, sólo tiene un mínimo (local y global), su vértice. Ella también puede servir como apoyo para recordar que un *mínimo* local está vinculado con la segunda derivada *positiva.*

Ejemplo 1

Tenemos: la parábola $y = x^2$

Buscar: todos los lugares donde haya un mínimo o máximo local.

Solución

1. Calcular la primera y la segunda derivada

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

2. Encontrar todos los lugares x con $f'(x) = 0$ (tangente horizontal)

$$f'(x) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Sólo existe un lugar con tangente horizontal, que es $x = 0$. Este lugar tiene que ser examinado mediante la segunda derivada.

3. Examinar la segunda derivada

$$f''(x) = 2$$

$$f''(0) = 2 > 0$$

Por lo tanto en $x = 0$ hay un *mínimo* local.

Ejemplo 2

Tenemos: la parábola $y=-x^2+2x+1$

Buscar: todos los lugares donde haya un mínimo o máximo local

Solución

1. Calcular la primera y la segunda derivada

$$f(x) = -x^2+2x+1$$

$$f'(x) = -2x+2$$

$$f''(x) = -2$$

2. Encontrar todos los lugares x con $f'(x)=0$ (tangente horizontal)

$$f'(x) = 0$$

$$-2x+2 = 0$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

Sólo existe un lugar con tangente horizontal, que es $x=0$. Este lugar tiene que ser examinado mediante la segunda derivada.

3. Examinar la segunda derivada

$$f''(x) = -2$$

$$f''(1) = -2<0$$

Por lo tanto en $x = 1$ hay un *máximo* local. Por cierto, ahí está el vértice de la parábola.

Ejemplo 3

Tenemos: la parábola cúbica $y = x^3 - 3x$

Buscar: todos los lugares donde haya un mínimo o máximo local

Solución

1. Calcular la primera y la segunda derivada

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

2. Encontrar todos los lugares x con $f'(x) = 0$ (tangente horizontal)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Existen dos lugares con tangentes horizontales que son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Estos lugares ahora tienen que ser examinados con la segunda derivada.

3. Examinar la segunda derivada

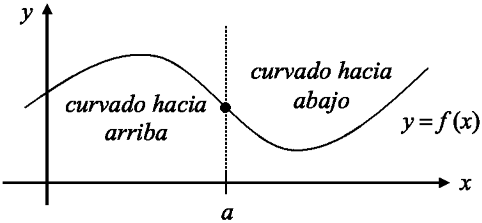
$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \\ f''(1) &= 6\cdot 1 = 6 > 0 \\ f''(-1) &= 6\cdot(-1) = -6 < 0 \end{aligned}$$

Entonces hay un mínimo local en $x_1 = 1$, y en $x_2 = -1$ hay un máximo local.

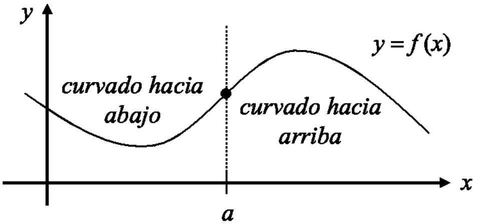
Esta parábola cúbica será considerada más en detalle en el marco del análisis de curvas y también será dibujada.

4.3 Puntos de inflexión

En un punto de inflexión a cambia el sentido de la curvatura de la función.



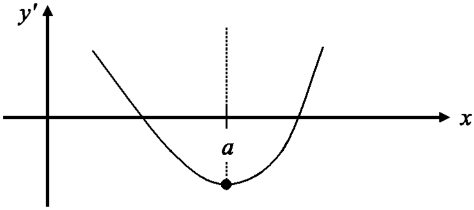
o también



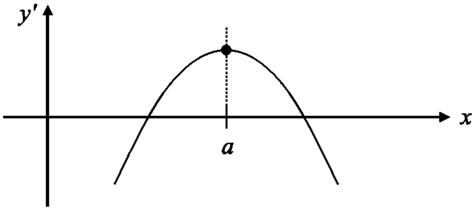
Ahora desarrollamos un criterio sencillo para encontrar los puntos de inflexión.
Para ello observamos cómo se desenvuelven las pendientes en los dibujos de arriba (viendo de izquierda a derecha):

- Si la curva esta curvada hacia arriba, entonces disminuyen las pendientes.
- Si la curva esta curvada hacia abajo, entonces aumentan las pendientes.

Las curvas de las derivadas correspondientes tienen entonces más o menos la siguiente forma:



y



respectivamente.

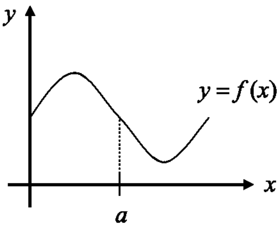
La función de la derivada f' tiene por lo tanto un mínimo o máximo local en a, que es el punto de inflexión de f. Aplicando nuestros criterios a f', podemos constatar dos cosas:

1) Si $f''(a)=0$ y $f'''(a)>0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a.
2) Si $f''(a)=0$ y $f'''(a)<0$,entonces f tiene un punto de inflexión en a.

Las condiciones que $f'''(a)>0$ o $f'''(a)<0$, pueden resumirse en $f'''(a)\neq 0$.

Así resulta el siguiente criterio para la presencia de un punto de inflexión.

> **Si**
> $$f''(a)=0 \text{ y } f'''(a)\neq 0,$$
> entonces
> f tiene un punto de inflexión en a.



Ejemplo

Tenemos: la parábola cúbica $y = x^3 - 3x$

Buscar: todos los lugares donde haya un punto de inflexión

Solución

1. Calcular la primera, segunda y tercera derivada:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

2. Encontrar todos los lugares de x con $f''(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
6x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Sólo existe un lugar, $x = 0$, en el cual podría estar presente un punto de inflexión. Ahora hay que examinar ese lugar mediante la tercera derivada.

3. Examinar la tercera derivada

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= 6 \\
f'''(0) &= 6 \neq 0
\end{aligned}
$$

Entonces, de hecho hay un punto de inflexión en $x = 0$.

Esta parábola cúbica será considerada más en detalle en el marco del análisis de curvas y también será dibujada.

4.4 Análisis de curvas

Con la ayuda de las derivadas se pueden determinar los máximos y mínimos locales, y los puntos de inflexión. Con ello se abarcan los aspectos esenciales de una curva y se puede elaborar una dibujo de alta calidad.
Un *análisis de curvas* consiste en examinar una función calculando principalmente los máximos y mínimos locales, y los puntos de inflexión. Muchas veces también se incluye la búsqueda de los puntos de intersección con los ejes, y se examina el comportamiento para valores grandes de x (es decir, "en el infinito").

Consideramos un ejemplo:

Ejemplo
Analizar y graficar la función $y = x^3 - 3x$.

Solución

1. Calcular el punto de intersección con el eje y

Sustituimos $x = 0$:

$$y = x^3 - 3x$$

$$y = 0^3 - 3 \cdot 0$$

$$y = 0$$

El punto de intersección con el eje y es por lo tanto (0; 0).

2. Los puntos de intersección con el eje x (ceros)

Sustituimos $y = 0$:

$$
\begin{aligned}
y &= x^3 - 3x \\
0 &= x^3 - 3x \\
0 &= x(x^2 - 3)
\end{aligned}
$$

Uno de los factores tiene que ser 0: $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x^2 - 3 &= 0 \\
x^2 &= 3 \\
x_2 &= \sqrt{3} \\
x_3 &= -\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Los ceros por lo tanto son $(0; 0)$, $(\sqrt{3}\,; 0)$ y $(-\sqrt{3}\,; 0)$.

3. Calcular las derivadas

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x \\
f'(x) &= 3x^2 - 3 \\
f''(x) &= 6x \\
f'''(x) &= 6
\end{aligned}
$$

4. Determinar máximos y mínimos locales

Resolver la ecuación $f'(x) = 0$ y examinar las soluciones con la ayuda de la segunda derivada:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Examinar:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \\ f''(1) &= 6 \cdot 1 = 6 > 0 \\ f''(-1) &= 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \end{aligned}$$

Calcular las coordenadas y:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 = -2 \\ f(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2 \end{aligned}$$

Entonces f tiene un máximo local en $(-1; 2)$ y un mínimo local en $(1; -2)$.

5. Determinar los puntos de inflexión

Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$ y examinamos la solución mediante la tercera derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Examinar la tercera derivada:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 6 \\ f'''(0) &= 6 \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto en $x = 0$ de hecho hay un punto de inflexión.

6. Comportamiento para valores grandes de x

Transformamos el término de la función para hacer visible el comportamiento del término para valores grandes de x. Factorizamos la potencia mayor de x:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ &= x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Ahora la fracción $\frac{3}{x^2}$ se va desapareciendo, si el valor de x se vuelve grande. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \\ &\approx x^3 \cdot (1 - 0) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

Sí x es positiva y con valor grande ("$x \to \infty$"), entonces

$$f(x) \approx x^3$$

también es positiva y con valor grande.

Sí x es negativa y de valor grande ("$x \to -\infty$"), entonces

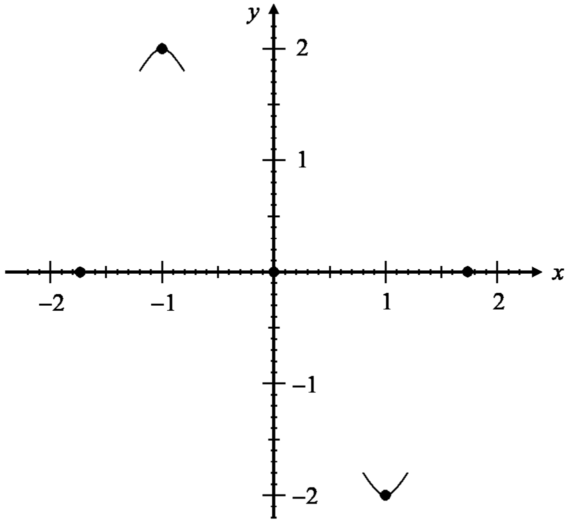
$$f(x) \approx x^3$$

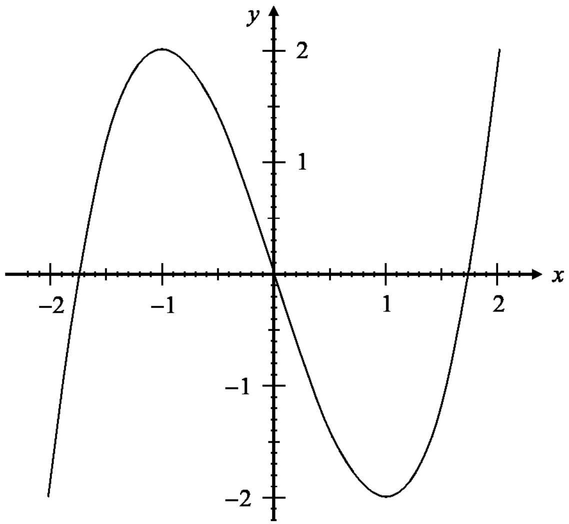
también es negativa y de valor grande.

Para el comportamiento expuesto se escribe brevemente:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

6. Dibujos





En el primer dibujo (preliminar) se anotaron las magnitudes calculadas. El máximo local es representado por un montecito pequeño, y el mínimo local por un valle pequeño.

De ello resulta la curva en el segundo dibujo conectando los puntos y pedazos de curvas dados.

4.5 El método de Newton

Ecuaciones sencillas como $2x+3=9$ pueden ser transformadas para despejar x, obteniendo la solución. Ecuaciones cuadráticas como $x^2+6x=16$ pueden resolverse completando el cuadrado y sacando la raíz, lo cual ya podían los babilonios antiguos hace 4000 años. No fue hasta el siglo XVI [16] que los italianos Tartaglia, Cardano y del Ferro encontraron fórmulas para resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado, como

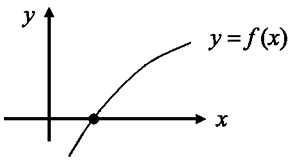
$$x^3-3x+1=0 \quad \text{y} \quad x^4-5x^3+7x^2+3x-1=0\,.$$

En el siglo XIX [19], Ruffini, Abel y Galois entendieron la imposibilidad de encontrar fórmulas correspondientes para resolver ecuaciones de quinto grado o superiores. Pero con la ayuda de los métodos aproximativos como el de Newton es posible calcular las soluciones de tales y muchas otras ecuaciones con cualquier precisión deseada. Por cierto, nuestros métodos de calcular raíces también son métodos aproximativos solamente.

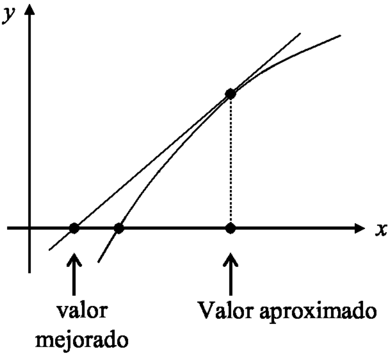
Poniendo todas las partes en un lado, cualquier ecuación siempre se podrá llevar a la forma

$$f(x)=0$$

Visualmente, resolver esta ecuación $f(x)=0$ significa encontrar los puntos de intersección de la curva $y=f(x)$ con el eje x.



Usando *tangentes*, Newton encontró un método aproximativo para resolver ecuaciones. El siguiente dibujo contiene la idea básica del método de Newton:



El procedimiento de este método es el siguiente.

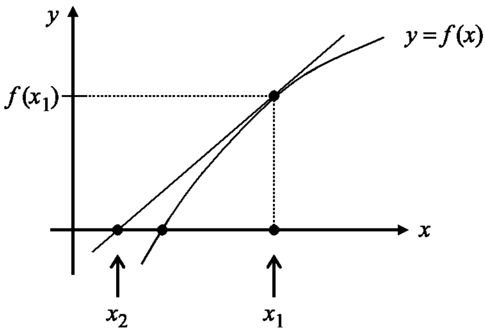
1. El punto de partida es un valor aproximado de la solución.
2. En este lugar se considera que la tangente es una buena aproximación a la curva. Se calcula el punto de intersección de la *tangente* con el eje *x*, y se obtiene un valor mejorado que está más cerca de la solución.
3. Se puede repetir el punto 2 con el valor mejorado. Así se obtienen aproximaciones cada vez mejores.

Primero desarrollamos la fórmula general para calcular el valor mejorado. Para calcular una solución con la exactitud deseada, esta fórmula se aplica varias veces; por eso se habla de una *fórmula de Iteración.* Este método de iteración de Newton será aplicado en dos ejemplos.

Fórmula para calcular el valor mejorado

Tenemos: 1) la ecuación general $f(x)=0$

2) el valor aproximado x_1 de la solución



Buscar: el valor mejorado x_2.

Solución

1. Determinar la ecuación de la tangente (recta):

La tangente tiene la pendiente $a = f'(x_1)$ y pasa por el punto $(x_1; y_1) = (x_1; f(x_1))$.

La ecuación de la tangente es por lo tanto (forma punto-pendiente):

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

2. La intersección de la tangente con el eje *x*:

Ponemos $y = 0$ y despejamos *x:*

$$
\begin{aligned}
y &= f'(x_1)\cdot(x - x_1) + f(x_1) \\
0 &= f'(x_1)\cdot(x - x_1) + f(x_1) \\
-f(x_1) &= f'(x_1)\cdot(x - x_1) \\
-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= x - x_1 \\
x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= x
\end{aligned}
$$

Entonces:

Del valor aproximado x_1 de una solución de $f(x) = 0$ resulta un valor mejorado x_2 mediante:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Con la función de mejoramiento (función de iteración)

$$\boxed{F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

tenemos entonces:

$$\boxed{x_2 = F(x_1)}$$

Ejemplo 1

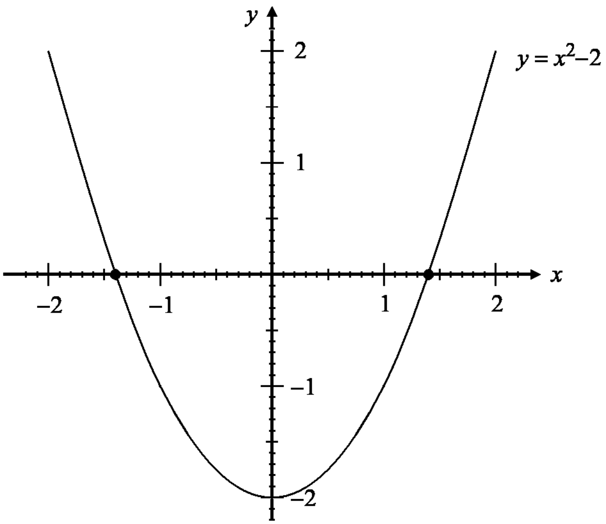
Resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.

Solución

Observaciones preliminares

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ son obviamente $x = \pm\sqrt{2}$. Resolviendo esta ecuación calculamos la raíz cuadrada de 2. El método de Newton en este caso coincide con el método de Herón (aprox. 10-75 d.C.), el cual ya era conocido por los babilonios antiguos alrededor del año 1800 a.C.

A. Visualización mediante la gráfica de $y = x^2 - 2$



La curva de esta función cuadrática es una parábola, su vértice y aspecto pueden ser encontrados por un análisis de curvas.

En el dibujo se puede ver que la ecuación tiene dos soluciones con los valores estimados de $-1{,}5$ y $1{,}5$.
Nosotros sólo consideramos la solución correspondiente al valor aproximado $1{,}5$ y calculamos valores mejores para él. Le dejamos al lector que calcule la otra solución.

B. Determinar la función de iteración

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= x-\frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x-\frac{x^2-2}{2x} \\ &= x-\frac{x^2}{2x}+\frac{2}{2x} \\ &= x-\frac{x}{2}+\frac{2}{2x} \\ &= \frac{x}{2}+\frac{2}{2x} \\ F(x) &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

C. calcular los valores aproximados mejorados

Valor inicial: $x_1 = 1{,}5$
Mejoramiento 1:

$$x_2 = F(x_1) = \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}5+\frac{2}{1{,}5}\right) \approx 1{,}4166667$$

Mejoramiento 2:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}416...7 + \frac{2}{1{,}416...7}\right) \approx 1{,}4142157$$

Mejoramiento 3:

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{2}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}414...7 + \frac{2}{1{,}414...7}\right) \approx 1{,}4142136$$

Mejoramiento 4:

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{2}{x_4}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}414...6 + \frac{2}{1{,}414...6}\right) \approx 1{,}4142136$$

En el último paso no se dio **ningún mejoramiento** (en las ocho cifras decimales contempladas).

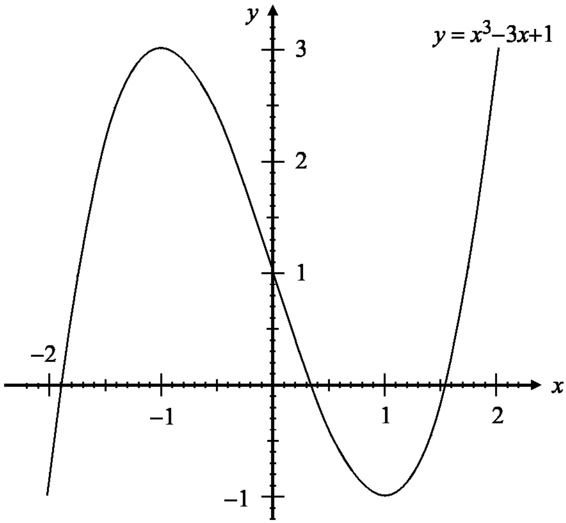
Conclusión
La solución buscada es $x = 1{,}4142136$ (con una exactitud de ocho cifras decimales).

Ejemplo 2
Resuelva la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Solución

A. Visualización mediante la gráfica de $y = x^3 - 3x + 1$

Un análisis de curvas muestra que la curva tiene el aspecto siguiente:



La ecuación tiene por lo tanto tres soluciones con los valores estimados $-1{,}9$, $0{,}3$ y $1{,}5$.
Calcularemos valores mejorados sólo para la solución aproximada de $1{,}5$. Le dejamos al lector como ejercicio calcular las otras dos soluciones.

B. Determinar la función de iteración

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x + 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ F(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3} \\ &= \frac{3x^3 - 3x}{3x^2 - 3} - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3} \\ F(x) &= \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 3} \end{aligned}$$

C. Calcular valores aproximados mejorados

Valor inicial: $x_1 = 1{,}5$

Mejoramiento 1:

$$x_2 = F(x_1) = \frac{2x_1^{\,3} - 1}{3x_1^{\,2} - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}5^3 - 1}{3 \cdot 1{,}5^2 - 3} \approx 1{,}5333333$$

Mejoramiento 2:

$$x_3 = F(x_2) = \frac{2x_2^{\,3} - 1}{3x_2^{\,2} - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}533\ldots^3 - 1}{3 \cdot 1{,}533\ldots^2 - 3} \approx 1{,}5320906$$

Mejoramiento 3:

$$x_4 = F(x_3) = \frac{2x_3^{\,3} - 1}{3x_3^{\,2} - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}532\ldots^3 - 1}{3 \cdot 1{,}532\ldots^2 - 3} \approx 1{,}5320889$$

Mejoramiento 4:

$$x_5 = F(x_4) = \frac{2x_4^{\,3} - 1}{3x_4^{\,2} - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}532\ldots^3 - 1}{3 \cdot 1{,}532\ldots^2 - 3} \approx 1{,}5320889$$

En el último paso no se dio **ningún mejoramiento** (en las ocho cifras decimales contempladas).

Conclusión

La solución de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ cercana a 1,5 es $x = 1{,}5320889$ (con una exactitud de ocho cifras decimales).

4.6 Series

Consideramos los siguientes temas:

1. series geométricas
2. la serie de arcotangente
3. series de logaritmos
4. la serie exponencial
5. las series de Maclaurin y Taylor
6. las series de seno y coseno
7. calculamos π
8. estimaciones de los restos

1. Series geométricas

A veces las divisiones efectuadas por escrito no terminan, sino continúan infinitamente.
Por ejemplo,

$$1 : 3 \; = \; 0{,}333...$$

El *resultado exacto de la división* contiene un *número infinito* de treses después de la coma. Desglosada, la notación "0,333..." significa nada menos que

$$0{,}333\ldots \;=\; \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots$$

Esta es una suma de un número infinito de magnitudes (que disminuyen más y más).
Visto así, ya en la infancia la mayoría de nosotros hemos conocido sumas de un número infinito de magnitudes, quizás no del conscientes.

La expresión

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots$$

es un ejemplo de una *serie geométrica (infinita)*. La palabra *serie* simplemente significa *suma*. Aquí el adjetivo *geométrica* indica la regla especial de como se forman los sumandos. De cada sumando surge su sucesor multiplicando por un número fijo, en el ejemplo, este factor es $\frac{1}{10}$:

$$\begin{tikzcd} \frac{3}{10} \arrow[rr, bend left, "\cdot\frac{1}{10}"] & + & \frac{3}{100} \arrow[rr, bend left, "\cdot\frac{1}{10}"] & + & \frac{3}{1000} \arrow[rr, bend left, "\cdot\frac{1}{10}"] & + & \frac{3}{10.000} & +\ldots \end{tikzcd}$$

Se dice que $\frac{1}{10}$ es el *cociente o razón* de la serie, ya que puede ser considerado el cociente de dos sumandos consecutivos.

En general una serie geométrica tiene el siguiente aspecto:

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots$$

Aquí a es el primer sumando y q es el cociente de la serie. La q abrevia la palabra latina *quotiens*, que simplemente significa *cociente*. La s abrevia la palabra suma.

Ahora calculamos el valor s de la serie geométrica general. Para ello multiplicamos la ecuación de arriba por q y restamos esta ecuación de la original. En eso se cancelan una infinidad de sumandos y se obtiene una expresión simple para s:

$$\begin{aligned}
s &= a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots \\
sq &= \phantom{a +{}} aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots \\
s - sq &= a \\
s(1-q) &= a \\
s &= \frac{a}{1-q}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \qquad (-1 < q < 1)$$

En eso hay que observar que la serie no da un resultado razonable, si $q \geq 1$ o $q \leq -1$. Para mostrarlo siguen dos ejemplos.

Para $a = 1$ y $q = 1$ resulta la serie:

$$1+1+1+1+1+\ldots$$

La suma crece sin límites y no da ningún número.

Para $a = 1$ y $q = -1$ resulta la serie:

$$1-1+1-1+1-1+-\ldots$$

La suma brinca entre 0 y 1:

$$\begin{aligned} 1 - 1 &= 0 \\ 1 - 1 + 1 &= 1 \\ 1 - 1 + 1 - 1 &= 0 \\ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 &= 1 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Si la fórmula para el valor de la serie geométrica se lee al revés, resulta:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots \qquad (-1 < q < 1)$$

Esta notable fórmula expresa la *división* (del lado izquierdo) usando solo sumas y multiplicaciones.

2. La serie de arcotangente

La derivada de la función arcotangente

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

puede ser considerada como una serie geométrica con $a=1$ y $q=-x^2$:

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{1-(-x^2)} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + - \dots \end{aligned}$$

Esta *serie de potencias* puede, por su parte, ser considerada como la derivada de una serie de potencias:

$$(c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots)' = 1-x^2+x^4-x^6+-\ldots$$

Por eso:

$$\arctan x = c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots$$

Como $\arctan 0 = 0$, tiene que ser $c=0$. Así obtenemos la serie de arcotangente:

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots,$$

que es válida para $-1 \le x \le 1$.

Esta serie puede ser usada para calcular arcotangente de *x*. Para $x = 1$, resulta (ya que $\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = 1$) una representación de $\frac{\pi}{4}$ como serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\ldots$$

Si tomamos la aproximación

$$\frac{\pi}{4} \approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11},$$

entonces el error R (residuo, resto) respecto al valor verdadero es:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+-\dots \\
&= \frac{1}{13}+\left(-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}\right)+\left(-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}\right)+\dots \\
&\leq \frac{1}{13}
\end{aligned}
$$

La desigualdad es válida porque los valores de los paréntesis son negativos.

Ahora obtenemos los siguientes valores concretos para π:

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+R \\
&= 0{,}74401154\ldots+R \\
\pi &= 2{,}97604617\ldots+4R
\end{aligned}
$$

Aquí el error es $4R \leq \frac{4}{13} = 0{,}30769230\ \ldots$

Ya que R es positiva, π tiene que estar entre

2,976... y 2,976...+ 0,307... = 3,283...

Si tomamos el valor medio, obtenemos

$$\pi \approx 3{,}13$$

con un error máximo de 0,154.

3. Series de logaritmos

La derivada de la función $\ln(1-x)$ es según la regla de la cadena

$$(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$$

y puede ser considerada como serie geométrica con $a=-1$ y $q=x$:

$$(\ln(1-x))' = -1-x-x^2-x^3-x^4-\ldots$$

Por su parte, esta *serie de potencias* también puede ser considerada como derivada de una serie de potencias:

$$(c-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots)' = -1-x-x^2-x^3-\ldots$$

Por ello:

$$\ln(1-x) = c-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots$$

Ya que $\ln(1-0)=0$, tiene que ser $c=0$. Así obtenemos la siguiente serie del logaritmo

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots,$$

la cual es válida para $-1 \leq x < 1$.

Esta serie puede ser utilizada para calcular $\ln(1-x)$.

Si en la serie se sustituye x por $-x$, se obtiene:

$$\ln(1+x) \;=\; x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\dots \qquad (-1<x\leq 1).$$

Restando las dos series, se puede obtener una serie más práctica:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \;=\; 2\cdot\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right) \quad (-1<x<1)$$

Para mostrar la aplicación de esta serie calculamos $\ln 2$. Primero determinamos x tal que $\frac{1+x}{1-x}=2$. Multiplicamos la ecuación por $1-x$ y luego despejamos x:

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x}&=2\\ 1+x&=2-2x\\ 3x&=1\\ x&=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\ln 2 \;=\; 2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\dots\right)$$

Tomamos la aproximación con los tres primeros términos:

$$\ln 2 \;\approx\; 2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\right) \;=\; 0{,}69300\dots.$$

Entonces el resto R es

$$R = 2\cdot\left(\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \ldots\right)$$

Sustituyendo los coeficientes de todas las potencias por el mayor coeficiente, que es $\frac{1}{7}$, agrandamos el resto y obtenemos una serie geométrica:

$$\begin{aligned}
R &= 2\cdot\left(\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \ldots\right) \\
&\leq 2\cdot\left(\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^9 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \ldots\right) \\
&= \frac{2}{7}\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \ldots\right) \\
&= \frac{2}{7}\cdot\frac{(1/3)^7}{1-(1/3)^2} \\
&= \frac{9}{28}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{28}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{6804} \leq 0{,}00015
\end{aligned}$$

Entonces, $\ln 2$ está en la región entre

0,69300 y 0,69315

Por lo tanto, obtenemos un valor de $\ln 2$ con tres cifras exactas después de la coma:

$$\ln 2 = 0{,}693\ldots$$

Conociendo el valor de $\ln 2$, se puede pueden reducir los logaritmos de números grandes a logaritmos de números entre 1 y 2. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\ln 100 &= \ln\left(64 \cdot \frac{100}{64}\right) \\
&= \ln 64 + \ln \frac{100}{64} \\
&= \ln 2^6 + \ln \frac{25}{16} \\
&= 6 \cdot \ln 2 + \ln \frac{25}{16}
\end{aligned}$$

La idea aquí es aproximar el número por una potencia de 2.

4. La serie exponencial

Hemos visto que la división, el arcotangente y el logaritmo pueden ser representados por series de potencias. Esto sugiere que también la función exponencial se puede escribirse como serie de potencia:

$$e^x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

Sólo queda calcular los coeficientes $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$

Para calcular c_0, arriba sustituimos $x = 0$:

$$\begin{aligned}
e^0 &= c_0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots \\
1 &= c_0 \\
c_0 &= 1
\end{aligned}$$

Para calcular c_1, derivamos y luego sustituimos $x=0$:

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots)' \\
e^x &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots \\
e^0 &= c_1 \\
c_1 &= 1
\end{aligned}
$$

Para calcular c_2, derivamos otra vez y ponemos $x=0$:

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= (c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots)' \\
e^x &= 2c_2 + 2\cdot3\cdot c_3x + 3\cdot4\cdot c_4x^2 + \ldots \\
e^0 &= 2c_2 \\
c_2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Para calcular c_3, derivamos otra vez y de nuevo sustituimos $x=0$:

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= (2c_2 + 2\cdot3\cdot c_3x + 3\cdot4\cdot c_4x^2 + \ldots)' \\
e^x &= 2\cdot3\cdot c_3 + 2\cdot3\cdot4\cdot c_4x + \ldots \\
e^0 &= 2\cdot3\cdot c_3 \\
c_3 &= \frac{1}{2\cdot3}
\end{aligned}
$$

Para calcular c_4, derivamos una vez más y sustituimos nuevamente $x=0$:

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= (2\cdot3\cdot c_3 + 2\cdot3\cdot4\cdot c_4x + \ldots)' \\
e^x &= 2\cdot3\cdot4\cdot c_4 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} e^x &= 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}c_4 \ +\ldots \\ e^0 &= 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}c_4 \\ c_4 &= \frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4} \end{aligned}$$

La continuación del procedimiento obviamente da el resultado general:

$$c_n = \frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}n}.$$

El número

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

es llamado *n factorial*. Además, se definen $0!=1$ y $1!=1$.

Con esta abreviación la serie exponencial dice:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Para $x = 1$, resulta una representación del número de Euler e por medio de una serie:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

En la aproximación

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!},$$

el error R (residuo) respecto al valor verdadero es:

$$R = \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \ldots$$

Agrandando, esta serie se puede convertir en una serie geométrica con el cociente (razón) $q = \frac{1}{7}$. Así obtenemos la siguiente estimación para el residuo R:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \ldots \\
&< \frac{1}{6!} + \frac{1}{6! \cdot 7} + \frac{1}{6! \cdot 7 \cdot 7} + \frac{1}{6! \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} + \ldots \\
&= \frac{1}{6!}\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 7 \cdot 7} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} \\
&= \frac{1}{6!} \cdot \frac{7}{6} = 0{,}0016\ldots
\end{aligned}$$

Ahora obtenemos el siguiente resultado concreto de e:

$$\begin{aligned}
e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \\
e &\approx 2{,}71666\ldots
\end{aligned}$$

Aquí el residuo es $R \leq 0{,}0016\ldots$

5. Las series de Maclaurin y Taylor

El método para determinar la serie exponencial puede ser transferido a una función general. Escribimos $f(x)$ como serie de potencias:

$$f(x) \;=\; c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

Si ponemos $x = 0$ obtenemos $c_0 = f(0)$. Derivando y sustituyendo $x = 0$ seguidamente, obtenemos todos los coeficientes:

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ldots$$

Dicho en forma general, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Por tanto, la representación de $f(x)$ como serie es:

$$\boxed{f(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots}$$

Ella es conocida por el nombre de *serie de Maclaurin*. Para que la serie dé resultados, muchas veces hay que limitar x a valores pequeños, es decir, cerca de cero. En este sentido, la serie de Maclaurin describe la función **alrededor de cero**.

Para describir la función alrededor de otro punto a, modificamos un poco el planteamiento, y escribimos

$$f(a+x) \;=\; c_0 \;+\; c_1 x \;+\; c_2 x^2 \;+\; c_3 x^3 \;+\; c_4 x^4 \;+\ldots$$

Si x es pequeña, la serie da resultados y, además, $a+x$ está cerca de a.

Poniendo $x=0$, obtenemos $c_0 = f(a)$. Si derivamos y sustituimos $x=0$ seguidamente, obtenemos todos los coeficientes:

$$c_0 = f(a), \;\; c_1 = f'(a), \;\; c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \;\; c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots$$

Dicho en forma general, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Sustituimos esto en el planteamiento de arriba:

$$\boxed{f(a+x) \;=\; f(a) \;+\; f'(a)x \;+\; \frac{f''(a)}{2!}x^2 \;+\; \frac{f'''(a)}{3!}x^3 \;+\ldots}$$

Esta es la *serie de Taylor*. Ella describe la función **alrededor de cualquier punto** $\boldsymbol{a}$.

6. Las series de seno y coseno

Aplicamos la serie de Maclaurin para las funciones seno y coseno.

Empezamos con el seno. Sus derivadas son las siguientes.

$f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$, entonces $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$, entonces $f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$, entonces $f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(4)}(0) = 0$
etc.

La cuarta derivada nuevamente es la función seno; por lo tanto el bloque de estos cuatro resultados se repite una y otra vez. La serie de sen x es entonces:

$$\operatorname{sen} x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

De la misma manera se llega a la serie del coseno:

$$\cos x \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Estas series se pueden utilizar para calcular valores de seno y coseno. La estimación del residuo puede ser realizada como en el caso de la serie arcotangente. El signo cambiante (alterno) en estas series hace que la magnitud del residuo a lo máximo tenga el valor del primer término omitido de la serie.

Otro aspecto importante es, que la representación con series, solo contienen las cuatro operaciones básicas, y así también pueden ser aplicadas en regiones extendidas de números como, por ejemplo, la de los números complejos (anexo 3). Para la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ tenemos $i^2 = -1$. Con la ayuda de las series exponencial, de seno y de coseno se puede obtener fácilmente la famosa *fórmula mágica* de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Desde el punto de vista de los números complejos, la función exponencial está vinculada estrechamente con las funciones seno y coseno.

La fórmula mágica de Euler se expone con más detalle en el anexo 4. Una breve introducción a los números complejos se da en el anexo 3.

7. Calculamos π

El seno de $30° = \frac{\pi}{6}$ es 0,5. Podemos usar esto para calcular $\frac{\pi}{6}$ como solución de la ecuación

$$\operatorname{sen} x = 0{,}5$$

Aplicamos el método de Newton para resolver esta ecuación. Los valores necesarios de seno y coseno serán calculados con las series correspondientes.

La ecuación a resolver es

$$f(x) = \operatorname{sen} x - 0{,}5 = 0$$

La función de iteración asociada es

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$F(x) = x - \frac{\operatorname{sen} x - 0{,}5}{\cos x}$$

Calculamos $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ mediante las fórmulas aproximadas:

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!}$$

Todos los valores de x que surgirán en nuestras cuentas son positivos y menores que 0,55. Por lo tanto resultan las siguientes estimaciones de los residuos R.

Para la aproximación del seno tenemos

$$0 \leq R \leq \frac{x^{11}}{11!} \leq \frac{0,55^{11}}{11!} = 0,000.000.000.0349...,$$

y para la aproximación del coseno

$$0 \leq R \leq \frac{x^{12}}{12!} \leq \frac{0,55^{12}}{12!} = 0,000.000.000.00159...$$

Ya que $\frac{\pi}{6} \approx 0,5$, tomamos el valor inicial $x_1 = 0,5$ y obtenemos (con 10 cifras después de la coma):

$$x_1 = 0,5$$
$$x_2 = F(0,5) = 0,5234444738$$
$$x_3 = F(0,5234444738) = 0,5235987687$$
$$x_4 = F(0,5235987687) = 0,5235987756$$
$$x_5 = F(0,5235987756) = 0,5235987756$$

Entonces es

$$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}523.598.7756$$

y así

$$\pi \approx 3{,}1415926536\,.$$

8. Estimaciones de los restos

Resumimos y generalizamos las estimaciones de los restos de las series que hemos visto. Básicamente son los dos casos que siguen.

Caso 1.
El método que se aplicó en la serie exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

La idea consiste en **agrandar** el resto para obtener una **serie geométrica**. Esto funciona también para las series geométricas y del logaritmo.

Consideramos el ejemplo de la serie exponencial. En la aproximación

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

tenemos el resto

$$R = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Sus términos están relacionados de la siguiente manera:

$$\frac{x^4}{4!} \xrightarrow{\cdot\frac{x}{5}} \frac{x^5}{5!} \xrightarrow{\cdot\frac{x}{6}} \frac{x^6}{6!} \xrightarrow{\cdot\frac{x}{7}} +\frac{x^7}{7!}+\dots$$

Los factores van disminuyendo, $\frac{x}{5} \geq \frac{x}{6} \geq \frac{x}{7} \geq \dots$ Si sustituimos todos los factores por el más grande, que es $\frac{x}{5}$, el resto se agranda y se convierte una serie geométrica con el cociente $q = \frac{x}{5}$:

$$\begin{aligned} R &= \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}+\dots \\ &\leq \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4!}\cdot\frac{x}{5} + \frac{x^4}{4!}\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \frac{x^4}{4!}\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^3 +\dots \\ &= \frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente estimación para el resto:

$$R \leq \frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}}$$

Caso 2.
El método que se aplicó en la series de arcotangente, seno y coseno:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$$

Los términos en estas series tienen signos alternantes, sus valores disminuyen y tienden a 0:

$$\begin{aligned} &s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots \\ &a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \\ &a_n \to 0 \end{aligned}$$

Entonces el valor (absoluto, es decir, tomado positivo) del resto es menor que el primer término omitido en la aproximación, por ejemplo:

$$\begin{aligned} &s \approx a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ &R = a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + - \ldots \leq a_5 \end{aligned}$$

porque

$$\begin{aligned} R &= a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + - \ldots \\ &= a_5 + \underbrace{(-a_6 + a_7)}_{\text{negativo}} + \underbrace{(-a_8 + a_9)}_{\text{negativo}} + - \ldots \\ &\leq a_5 \end{aligned}$$

El caso 2 se debe a Leibniz.

Ejercicios

Extremos locales y puntos de inflexión

1. Encuentre los extremos locales y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Grafique las funciones.

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $g(x) = -x^2 + 1$

2. Encuentre los extremos locales y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Calcule además las intersecciones con los ejes y trace la función.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$

b) $g(x) = -0{,}25x^2 + x$

3. Encuentre los extremos locales y puntos de inflexión de la siguiente función $f(x) = x^3 - 6x$. Calcule además las intersecciones con los ejes y trace la función.

4. Encuentre los extremos locales y puntos de inflexión de la siguiente función $f(x) = x^3 + x^2$. Calcule también las intersecciones con los ejes y dibuje la función.

5. Encuentre los extremos locales y puntos de inflexión de la siguiente función $f(x) = x^4 - 3x^2$. Calcule además las intersecciones con los ejes y grafique la función.

Problemas de valores extremos

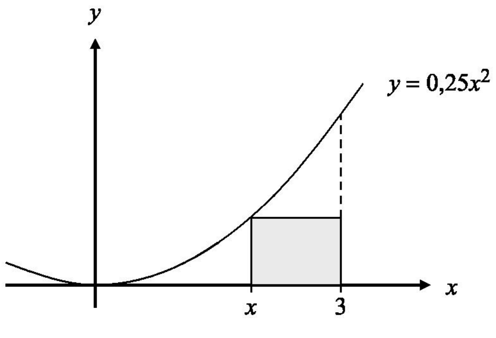
1. Con un pedazo de cartón rectangular ($a = 30$ cm, $b = 20$ cm) hay que construir una caja con el mayor

volumen posible.

2. Determine los valores máximos y mínimos de $f(x)$ en las regiones señaladas (*intervalos cerrados*). En que puntos se toman estos valores?

a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2;\quad 2 \le x \le 6$
b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2;\quad 1 \le x \le 3$
c) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 1;\quad -1 \le x \le 2$
d) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 1;\quad 1 \le x \le 3$
e) $f(x) = x + 2\cos x;\quad 0 \le x \le \pi$

3. ¿Que valor de x se tiene que elegir para que el rectángulo señalado tenga un área máxima?



4. Al segmento de la parábola $y = 6 - 0{,}25x^2$, que está arriba del eje x, se le debe inscribir un rectángulo que tenga a) perímetro máximo, b) área máxima. La base del rectángulo tiene que estar en el eje x.

5. ¿Cuál punto en la recta $y = -x + 2$ tiene la distancia mínima del punto $(2{,}5;\ 4)$?

6. Descomponga el número 24 en dos sumandos, tal que su producto sea lo más grande posible.

7. Dentro de todos los rectángulos con un perímetro de 72 cm, ¿cuál tiene el área más grande? Calcule sus lados.

8. Descomponga el número 24 en dos sumandos, tal que la suma de sus cuadrados sea lo menor posible.

Método de Newton

1. Resuelva la ecuación: $x^3 = -x + 1$.

2. Resuelva la ecuación: $x = \cos x$

3. Resuelva la ecuación: $2 + \cos x = e^x$.

4. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$ en el rango de 0 a 2π.

Series

1. Calcule valores aproximados de $1{:}0{,}98$ y $1{:}1{,}06$ utilizando las series geométricas que siguen:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ y}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots$$

2. Para valores pequeños de x e y, el producto xy es aún más pequeño y resulta la siguiente fórmula de aproximación:

$$(1+x)\cdot(1+y) \approx 1+x+y\,.$$

Concluya de esto:

$$(1+x)^2 \approx 1+2x \quad \text{y} \quad \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}\,.$$

Calcule valores aproximados de $1{,}07^2$ y $\sqrt{1{,}03}$.

3. Calcule el logaritmo $\ln 1{,}5$ con cuatro cifras decimales después de la coma.

4. Calcule $e^{0{,}2}$ con cuatro cifras decimales después de la coma.

5. Calcule $\operatorname{sen} 0{,}1$ y $\cos 0{,}1$ con cuatro cifras decimales después de la coma. ¿Qué es el ángulo $0{,}1$ en grados?

6. El seno hiperbólico senh y el coseno hiperbólico cosh se definen por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

a) Encuentre series de potencias para $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.
b) Verifique que $(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$.

Soluciones

La derivada

1.

a) $f'(x) = 3,\ y = 3x + 1$

b) $f'(x) = 0,\ y = \mathrm{c}$

c) $f'(x) = 3x^2,\ y = 3x - 2$

2. $y = 4x - 4,\ x = 1$

3.

a) $f'(x) = 8x + 5$

b) $8x + 5 = 0$ (tangente horizontal),
Vértice: (–0,625; 1,4375).

4. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ y = -4x + 4,\ y = -x + 2,\ y = -0{,}25x + 1$

5.

a) $f'(x) = x - 2$

b) $y = 2x - 7$

c) $y = 2{,}25x - 8$

6.

a) $(\sqrt{2}\,;\,0), (-\sqrt{2}\,;\,0)$

b) $f'(x) = 2x$

c) $y = 2x - 3$

d) $x = 1{,}5$

7.

a) $(\sqrt{3}\,;0), (-\sqrt{3}\,;0)$

b) $f'(x) = 2x$

c) $y = 2x - 4$

d) $x = 2$

8. a) $(-3; 3)$ b) $(-2; -1)$ c) $(3; -1{,}5)$

9. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, $y = -0{,}25x + 0{,}75$

10. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y = 0{,}25x + 1$

Derivadas básicas

1.

a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = 4x^3$

c) $f'(x) = 25x^{24}$

d) $f'(x) = 5x^4$

e) $f'(x) = 13x^{12}$

2.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6}$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ $\quad [= -\dfrac{1}{2(\sqrt{x}\,)^3} = -\dfrac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\,]$

3.

a) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $f'(x) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{13}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^{15}}}$ o también $f'(x) = -6{,}5x^{-7{,}5}$

d) $f'(x) = \dfrac{83}{30}\cdot x\cdot\sqrt[30]{x^{23}}$ o también $f'(x) = \dfrac{83}{30}\cdot\sqrt[30]{x^{53}}$

Reglas de derivación

Regla de la suma y del factor

1.

a) $f'(x) = 4$

b) $f'(x) = -16x + 5$

c) $f'(x) = 56x^7 - 15x^4 + 6x^2 - 5$

d) $f'(x) = -\,0{,}5 + 7x - 18x^2$

e) $f'(x) = 12x^2 + 14x - 3$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$

g) $f'(x) = 1\ + x\ + x^2$

h) $f'(x) = 51x^{16} - 36x^8 + 24x^2$

i) $f'(x) = 3\pi x^2 - 2 - \dfrac{10}{x^3}$

j) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$

2.

a) $f'(x) = 6x + 5$

b) $f'(x) = 35x^4 + 24x^3 + 24x^2 - 6x + 5$

c) $f'(x) = 18x + 30$

d) $f'(x) = 24x^2 + \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 3x^2 - 3$

Regla del producto

1.

a) $f'(x) = \text{sen}(x) + x\cos(x)$

b) $f'(x) = \cos(x) - x\,\text{sen}(x)$

c) $f'(x) = (1+x)\,e^x$

d) $f'(x) = (3x^2 + x^3)\cdot e^x$

e) $f'(x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$

2.

a) $f'(x) = 2x\,\text{sen}(x) + x^2\cos(x)$

b) $f'(x) = 5x^4\cos(x) - x^5\,\text{sen}(x)$

c) $f'(x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$

d) $f'(x) = -2\ \text{sen}(x)\cos(x)$

e) $f'(x) = 2e^{2x}$

3.

a) $f'(x) = 2e^{2x}$

b) $f'(x) = 2e^{x}(\text{sen}\,x + \cos x)$

c) $f'(x) = (x^2+5x+7)\cos x - (x^2+x+1)\,\text{sen}\,x$

d) $f'(x) = (12+9x+35\,e^{x})\,\text{sen}\,x + (-9+12x+5\,e^{x})\cos x$

e) $f'(x) = 4(x^2-1)\cos x \cdot \text{sen}\,x - 2x\,(1+2\cos^2 x)$

4.

a) $f'(x) = e^{x}\left((2x+x^2)\,\text{sen}\,x + x^2\cos x \right)$

b) $f'(x) = e^{x}\left((1+x)\cos x - x\,\text{sen}\,x \right)$

c) $f'(x) = e^{x}\left((2x+x^2)\,\text{sen}\,x + x^2\cos x \right) + 3x^2\cos x - x^3\text{sen}\,x$

d) $f'(x) = 4(\text{sen}\,x)^3\cos x$

e) $f'(x) = 10x(1+x^2)^4$

f) $f'(x) = -10\,(1+\cos x)^9\,\text{sen}\,x$

Regla del cociente

1.

a) $f'(x) = -\dfrac{2}{5x^2}$

b) $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

c) $f'(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-2x - 4x^3 + 2x^5}{(1 + x^4)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{e^x}$

Regla de la cadena

1.

a) $f'(x) = 3\cos(3x+5)$

b) $f'(x) = -7\operatorname{sen}(7x+4)$

c) $f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$

d) $f'(x) = -\ e^x \operatorname{sen}\ e^x$

e) $f'(x) = 300(3x+5)^{99}$

f) $f'(x) = -(35x^4 + 24x^2 + 5) \operatorname{sen}(7x^5 + 8x^3 + 5x + 13)$

g) $f'(x) = 4e^{4x}$

h) $f'(x) = e^x \cos(e^x)$

i) $f'(x) = 13 \cos x \operatorname{sen}^{12} x$

j) $f'(x) = -e^{\cos x} \operatorname{sen} x$

k) $f'(x) = -\ e^{-x}$

l) $f'(x) = -\dfrac{x}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3}$

2.

a) $f'(x) = e^{4x}$ ($4\cos(7x+3) - 7\text{sen}(7x+3)$)

b) $f'(x) = -18x\ \text{sen}(x^2+1)\ \cos^8(x^2+1)$

c) $f'(x) = 60x^2\ \cos(x^3+1)\ \text{sen}^{19}(x^3+1)$

d) $f'(x) = e^{x\,\text{sen}(2x)}$ ($\text{sen}(2x) + 2x\ \cos(2x)$)

e) $f'(x) = 280x\ (7x^2+3)^{19}$

f) $f'(x) = 90(3x+5)^{29}$

g) $f'(x) = \cos\ (x^2e^{3x}) - (2x^2+3x^3)\ e^{3x}\ \text{sen}(x^2e^{3x})$

h) $f'(x) = -210\ (2-7x)^{29}$

Reglas de derivación mixtas

1.

a) $f'(x) = (\ln 2)\ 2^x$

b) $f'(x) = (\ln a)\ a^x$

c) $f'(x) = (1+\ln x)\ x^x$

d) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \cot x$

e) $f'(x) = -\tan x$

f) $f'(x) = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 \text{x}}$

g) $f'(x) = \dfrac{2\text{x}}{1+\text{x}^2}$

h) $f'(x) = \ln x$

i) $f'(x) = \dfrac{1}{\text{x}-1}$

j) $f'(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x \cdot \cos x}$

Aplicaciones

Extremos locales y puntos de inflexión

1.
a) Ningún máximo local, mínimo local: (0; –1), ningún punto de inflexión.
b) Máximo local (0; 1), ningún mínimo local, ningún punto de inflexión.

2.
a) Ningún máximo local, mínimo local: (–1; –2), ningún punto de inflexión, intersección con los ejes: (1; 0), (–3; 0), (0; –1,5)
b) Máximo local (2; 1), ningún mínimo local, ningún punto de inflexión, intersección con los ejes: (0; 0), (4; 0)

3.
Máximo local (–1,41; 5,66), mínimo local (1,41; –5,66), punto de inflexión: (0; 0), intersección con los ejes: (0; 0), (2,45; 0), y (–2,45; 0)

4.
Máximo local: (–0,67; 0,15), mínimo local: (0; 0), punto de inflexión: (–0,33; 0,07), intersección con los ejes: (0; 0), (–1; 0)

5.
Máximo local: (0; 0),
mínimos locales: (–1,22;–2,25) y (1,22;–2,25),
puntos de inflexión: (0,71; –1,25), (–0,71; –1,25),
intersección con los ejes: (0; 0), (1,73; 0), (–1,73; 0)

Problemas de valores extremos

1. Altura: 3,92 cm; volumen: 1056,31 cm^3

2.
a) Mín.: $f(2) = -8$, máx.: $f(6) = 216$
b) mín.: $f(2) = -8$, máx.: $f(3) = 0$
c) mín.: $f(-1) = -25$, máx.: $f(2) = 29$
d) mín.: $f(0{,}5) = 2$, máx.: $f(3) = 127$
e) mín.: $f(0) = 2$, máx.: $f(\pi/6) \approx 2{,}25565$

3. x = 2, $f(x) = 0{,}25x^2(3 - x)$

4.
a) Base: 8, altura: 2, $f(x) = 2\left[(6 - 0{,}25x^2) + 2x\right]$
b) Base: 5,6569, altura: 4, $f(x) = (6 - 0{,}25x^2) \cdot 2x$

5. Punto: (0,25; 1,75), $f(x) = (x - 2{,}5)^2 + (-x + 2 - 4)^2$

6. 12+12 = 24, $f(x) = x \cdot (24 - x)$

7. Cuadrado con a = 18 cm, $f(x) = \dfrac{72 - 2x}{2} \cdot x$

8. 12+12 = 24, $f(x) = x^2 + (24 - x)^2$

Método de Newton

1.	2.	3.	4.
1,00000000000	1,00000000000	1,00000000000	1,00000000000
0,75000000000	0,75036386784	0,95000228052	0,78204190154
0,68604651163	0,73911289091	0,94881541247	0,78539817600
0,68233958260	0,73908513339	0,94881475558	0,78539816340
0,68232780395	0,73908513322	**0,94881475558**	**0,78539816340**
0,68232780383	**0,73908513322**		
0,68232780383			3,00000000000
			4,33248811798
			3,90319977158
			3,92699530669
			3,92699081699
			3,92699081699

Series

1. $1:0{,}98 = \dfrac{1}{1-0{,}02} \approx 1+0{,}02 = 1{,}02$

   $1:1{,}06 = \dfrac{1}{1+0{,}06} \approx 1-0{,}06 = 0{,}94$

2. $1{,}07^2 = (1+0{,}07)^2 \approx 1+2\cdot 0{,}07 = 1{,}14$

   $\sqrt{1{,}03} = \sqrt{1+0{,}03} \approx 1+\dfrac{0{,}03}{2} = 1{,}015$

3. $\ln 1{,}5 = \ln\dfrac{1+0{,}2}{1-0{,}2} \approx 2(x + x^3/3 + x^5/5) \approx 0{,}4055$

   Aquí 0,2 es la solución de $\dfrac{1+x}{1-x} = 1{,}5$.

4. $e^{0{,}2} \approx 1 + 0{,}2 + (0{,}2)^2/2 + (0{,}2)^3/6 + (0{,}2)^4/24$

   $e^{0{,}2} \approx 1{,}2214$

5. sen 0,1 ≈ 0,1 – $(0,1)^3/6$ ≈ 0,0998
   cos 0,1 ≈ 1 – $(0,1)^2/2$ ≈ 0,9950
   0,1 ≈ 5,7°.

6. Las series de seno respectivamente de coseno, pero todos los signos positivos:

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

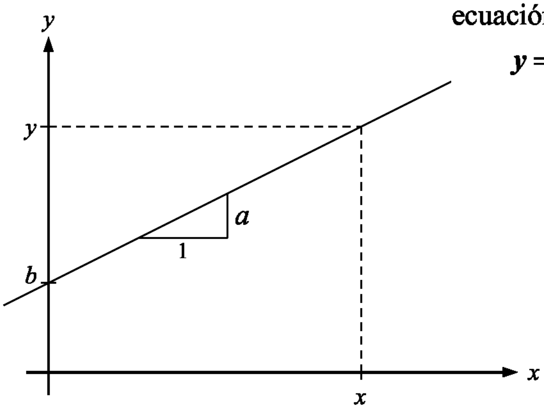
Nota
Los resultados inexactos se ponen *redondeados*.

Anexo 1. Rectas

Aquí consideramos las rectas, planteando lo más importante para el cálculo diferencial. Primero planteamos los resultados, después los demostramos.

1. La ecuación de una recta

La ecuación de una recta nos da la coordenada y (altura) de cualquier punto en la recta si conocemos su posición x.



ecuación de la recta:

$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

Los números a (coeficiente de x) y b (constante sin x) tienen el siguiente significado geométrico:

a = ***pendiente*** de la recta
(1 paso a la derecha y a pasos hacia arriba, o hacia abajo, si a es negativa.)

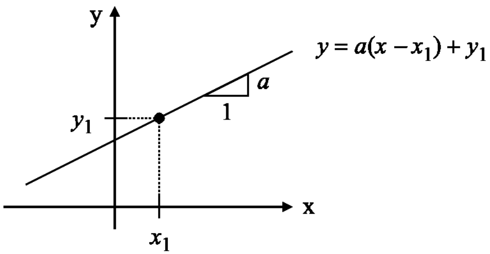
b = intersección de la recta con el eje y.

2. La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta

La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta es la respuesta al problema del punto-pendiente:

Tenemos: un punto $(x_1; y_1)$ en una recta, la pendiente a de la recta
Buscamos: la ecuación de la recta

Solución:



La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta es

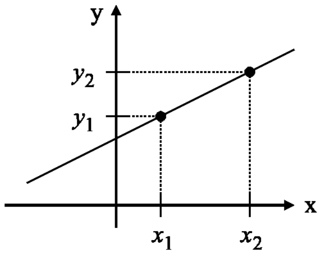
$$y = a(x - x_1) + y_1$$

3. La ecuación punto-punto de la recta

La ecuación punto-punto de una recta es la respuesta al problema punto-punto:

Tenemos: $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ en una recta
Buscamos: la ecuación de la recta

Solución:



La ecuación punto-punto de la recta es

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Aquí la pendiente de la recta está dada por:

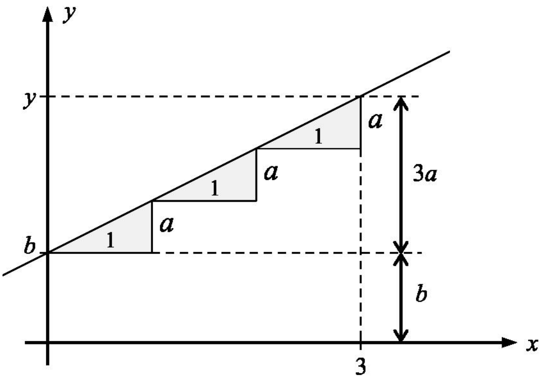
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4. Deducción la ecuación de una recta

Consideramos dos deducciones. La primera es intuitiva y visual, pero no del todo general. La segunda es geométrica y general, se basa en triángulos semejantes (ángulos iguales).

Primera deducción

El argumento procede cuando x es un número natural. Para mejor entendimiento, escogemos $x = 3$. Tenemos que encontrar la y correspondiente, es decir, la altura de la recta en la posición $x = 3$.



En la gráfica vemos que

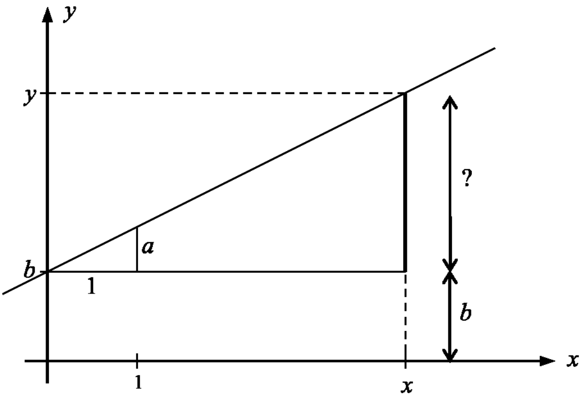
$$\begin{aligned} y &= \text{altura de la recta} \\ &= 3 \text{ veces la altura de los triangulitos } + b \\ &= 3a + b \end{aligned}$$

Eso hace entender la ecuación de la recta cuando x es un número natural:

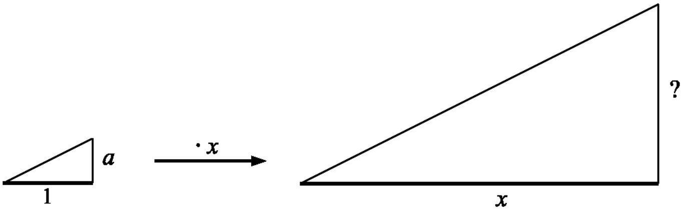
$$\begin{aligned} y &= \text{altura de la recta} \\ &= x \text{ veces la altura de los triangulitos } + b \\ &= ax + b \end{aligned}$$

Segunda deducción

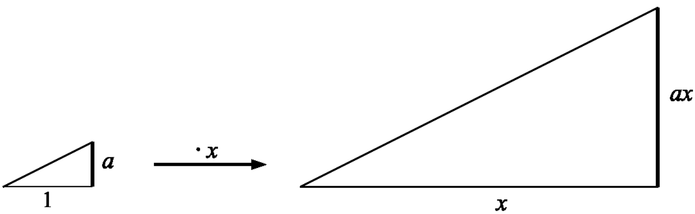
En lugar de triangulitos consideramos un solo triángulo grande. La semejanza de los triángulos involucrados nos da la altura de la recta en cualquier posición x, es decir, la ecuación de la recta.



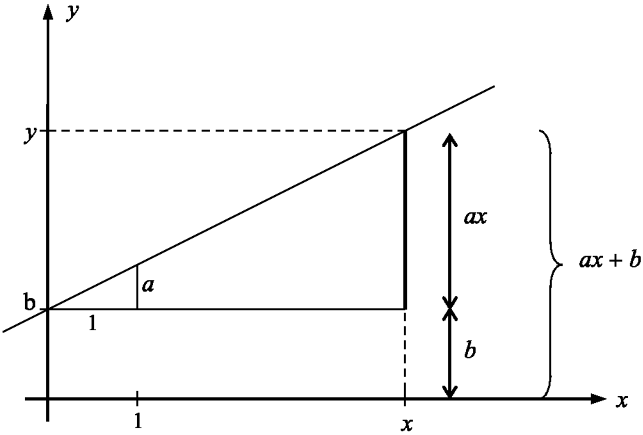
El triángulo pequeño tiene los mismo ángulos que el triángulo grande. Por lo tanto, los dos triángulos son semejantes, y así el triángulo grande resulta del pequeño mediante un factor de aumento. Comparando las bases de los triángulos $(1, x)$, vemos que el factor de aumento es x.



Entonces la altura del triángulo grande es ax:



Ahora e fácil ver que la altura y de la recta es $ax + b$:



Concluimos que la ecuación de la recta es $y = ax + b$.

5. Deducción de la ecuación punto-pendiente de la recta

La forma general de la ecuación de una recta es

$$y = ax + b.$$

La pendiente a está dada, hay que calcular b.
Para ello sustituimos las coordenadas del punto dado de la recta $(x_1; y_1)$ en la ecuación de la recta:

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Despejando b resulta:

$$b = y_1 - ax_1.$$

Sustituimos este resultado en la ecuación de la recta, ordenamos y factorizamos a:

$$\begin{aligned} y &= ax+b \\ y &= ax+y_1-ax_1 \\ y &= ax-ax_1+y_1 \\ y &= a(x-x_1)+y_1 \end{aligned}$$

Este resultado también se puede deducir geométricamente usando un triángulo grande.

6. Deducción algebraica de la ecuación punto-punto de la recta

En vista de la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, solo nos falta la pendiente, para ello sustituimos las coordenadas de los dos puntos dados en la ecuación general de la recta:

$$\begin{aligned} & y &= ax+b \\ (x_1;y_1): \quad & y_1 &= ax_1+b \\ (x_2;y_2): \quad & y_2 &= ax_2+b \end{aligned}$$

Restamos las dos ecuaciones (se cancela b):

$$y_2-y_1 = ax_2-ax_1$$

Factorizamos a y luego despejamos a:

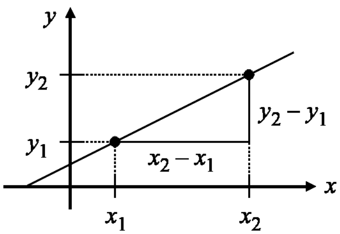
$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= ax_2 - ax_1 \\ y_2 - y_1 &= a(x_2 - x_1) \\ a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

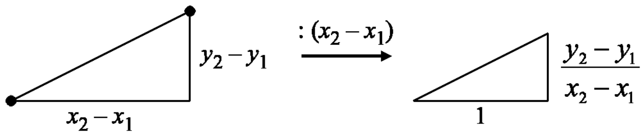
Sustituimos el resultado en la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_1) + y_1 \\ y &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \end{aligned}$$

7. Deducción geométrica de la pendiente en el problema punto-punto

Con dos puntos dados se puede formar un triángulo que contiene información sobre la pendiente de la recta. Una simple división hace que la base del triángulo tenga la longitud 1. Entonces la altura del triángulo es la pendiente de la recta:





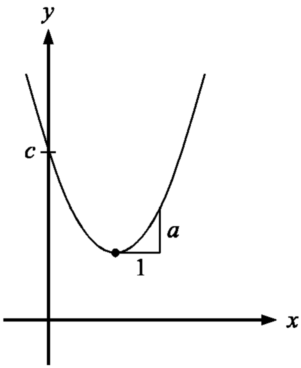
Por lo tanto la pendiente a de la recta es

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Anexo 2. Parábolas en sinopsis

Forma general de la ecuación de una parábola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

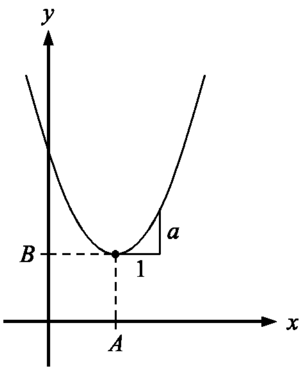


↓ completar el cuadrado

↑ desarrollar el cuadrado

La ecuación de una parábola si se conoce su **vértice**:

$$y = a(x - A)^2 + B$$



Anexo 3. Números complejos

Números complejos

Algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución, por ejemplo, la ecuación sencilla

$$x^2 = -1.$$

Ninguno de los números comunes (*reales*) podría ser una solución, ya que multiplicándolo por sí mismo siempre daría un número positivo o cero.
Ampliamos nuestro concepto de número, agregándole un número nuevo i que sea una solución de la ecuación planteada arriba, es decir:

$$i^2 = -1.$$

Ese número i es conocido como la *unidad imaginaria*. Se puede interpretar i como la raíz de -1:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Hablando geométricamente, pasamos de la *recta numérica* a un *plano*. La unidad imaginaria corresponde a un punto ubicado en el plano, pero fuera de la recta numérica.

Ejecutando las cuatro operaciones básicas con números reales y la unidad imaginaria i, resultan expresiones de la forma

$$a + bi,$$

por ejemplo, $2+3i$, $-4+5i$, $1{,}5+3{,}8i$, etc.
Estas magnitudes compuestas de números reales y de la unidad imaginaria se llaman *números complejos*.

En el ámbito de esos números complejos se puede sacar la raíz de un número negativo, por ejemplo:

$$\sqrt{-9} = 3i, \text{ porque } (3i)^2 = 9i^2 = -9 .$$

Si se incluyen los números complejos, la fórmula de solución de ecuaciones cuadráticas siempre da soluciones. Así la ecuación

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

tiene las soluciones

$$x_1 = -2 + i \quad \text{y} \quad x_2 = -2 - i .$$

Porque

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad | \text{sustituir } p = 4, \; q = 5$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \qquad | \text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

Las operaciones básicas con números complejos

Los números complejos se tratan como si fueran expresiones con números y letras. Solamente hay que tomar en cuenta que, además, se tiene $i^2 = -1$.

Consideramos ejemplos de operaciones básicas con números complejos:

Adición
$(2+3i) + (5+9i) = 7+12i$

Sustracción
$(2+9i) - (6+3i) = -4+6i$

Multiplicación

$$
\begin{aligned}
(2+3i)\cdot(5+4i) &= 2\cdot 5 + 2\cdot 4i + 3i\cdot 5 + 3i\cdot 4i \\
&= 10 + 8i + 15i + 12i^2 \qquad | \, i^2 = -1 \\
&= 10 + 23i - 12 \\
&= -2 + 23i
\end{aligned}
$$

División

$$
\begin{aligned}
\frac{3+7i}{1+2i} &= \frac{(3+7i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} \qquad | \, \text{suma por diferencia} \\
&= \frac{17+i}{1-4i^2} \qquad | \, i^2 = -1 \\
&= \frac{17+i}{1+4} \\
&= \frac{17+i}{5} \\
&= \frac{17}{5} + \frac{1}{5} i
\end{aligned}
$$

Aquí se utilizó el truco común para deshacerse de la i en el denominador $1+2i$: el numerador y el denominador se multiplican por $1-2i$. Entonces se aplica la regla general de que, el producto de una suma y la diferencia correspondiente es la diferencia de los ***cuadrados***:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 .$$

Los cuadrados hacen desaparecer la unidad imaginaria i, resultando un número real. En nuestro caso, obtenemos el siguiente nuevo denominador:

$$\begin{aligned}(1+2i)\cdot(1-2i) &= 1^2-(2i)^2\\ &= 1-4i^2\\ &= 1-4\cdot(-1)\\ &= 1+4\\ &= 5\end{aligned}$$

Sobre la historia de los números complejos

Rafael Bombelli (1526-1572), en su libro *Algebra*, fue el primero en plantear los números complejos e incluirlos como soluciones de ecuaciones.
El adjetivo en "número *imaginario*" fue introducido por René Descartes (1596-1650) en su famoso tratado *La Géométrie*.
La expresión *número complejo* fue ideada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855).
La denominación *i* para la *unidad imaginaria* se debe a Leonhard Euler (1708-1783).

Aplicaciones de los números complejos

A fines del siglo XIX, el ingeniero electricista Charles Steinmetz (1865-1923) introdujo resistencias complejas en circuitos de corriente alterna, logrando una gran simplificación de los cálculos pertinentes.

La mecánica cuántica desarrollada en los años 1920 utiliza números complejos. En una inscripción en la tumba de Erwin Schrödinger (1878-1961) está escrita la famosa *ecuación de Schrödinger*:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi\ .$$

Ella empieza con la unidad imaginaria *i*.

Anexo 4. La fórmula mágica de Euler

La fórmula mágica de Euler

Las series de potencias sólo contienen las cuatro operaciones básicas. Por lo tanto, también se pueden aplicar para números complejos (que se explican en el anexo 3). Tomando números complejos en la función exponencial, Leonhard Euler dio con la famosa *fórmula mágica*:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la *unidad imaginaria*, que es un número más allá de los números reales y satisface la ecuación $i^2 = -1$.

La fórmula mágica vincula la función exponencial con seno y coseno, funciones que a primera vista no parecen estar relacionadas.
La fórmula mágica permite reducir muchas relaciones trigonométricas a simples reglas de potencias.

Deducción de la formula mágica

Las potencias de i son:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1, \text{ etc.}$$

Vemos que para exponente pares (es decir, de la forma $2n$), las potencias son ± 1, y para exponentes impares (es decir, de la forma $2n + 1$), las potencias son alternando $\pm i$. (En ambos casos los signos se alternan.) De hecho,

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n = \pm 1$$
$$i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n \cdot i = \pm i$$

Ahora calculamos e^{ix}:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\
&= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \dots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right) \\
&= \cos x + i \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Es decir, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

El caso de que $x = \pi$ (180°) es llamativo y famoso por relacionar cinco constantes matemáticas importantes:

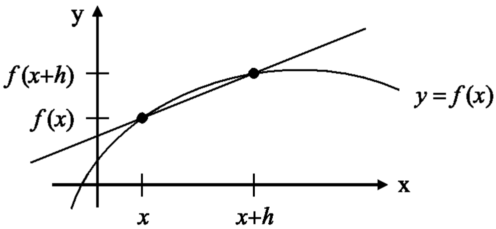
$$\begin{aligned}
e^{i\pi} &= \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi \\
&= -1 + 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Es decir,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Anexo 5. Cálculo diferencial en sinopsis

I. Concepto de derivada



La **derivada** en el lugar x es

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \text{pendiente de la tangente a } f \text{ en el lugar } x \\
&= \text{valor límite de las pendientes de las secantes} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

En la **notación de Leibniz** la derivada es

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

II. Calcular la derivada

Derivadas básicas

$$(c)' = 0$$

$$(ax+b)' = a$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Reglas de derivación

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{(Regla de la suma)}$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \qquad \text{(Regla del factor)}$$

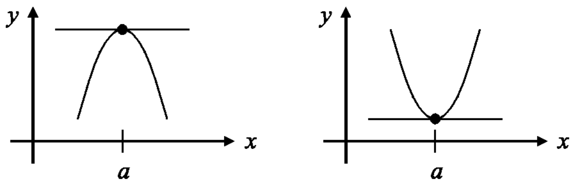
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \text{(Regla del producto)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad \text{(Regla del cociente)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{(Regla de la cadena)}$$

III. Aplicaciones 1

Máximos y mínimos locales



1. Si f tiene un máximo o mínimo local en a entonces es:

$$f'(a) = 0 .$$

2. Si

$$f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) < 0,$$

entonces f tiene un *máximo local* en a.

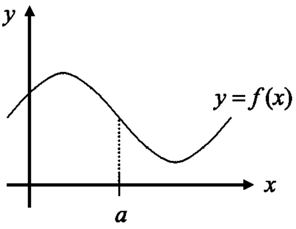
3. Si

$$f'(a) = 0 \quad \text{y} \quad f''(a) > 0,$$

entonces f tiene un *mínimo local* en a.

III. Aplicaciones 2

Puntos de inflexión

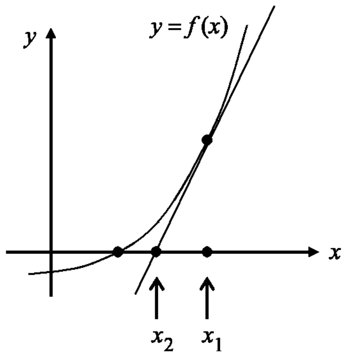


Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$,
entonces f tiene un *punto de inflexión* en a.

Método de Newton

Del valor aproximado x_1 de una solución de $f(x) = 0$ resulta un valor mejor x_2, mediante:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



III. Aplicaciones 3: Series

Serie geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots \qquad (-1 < x < 1)$$

Serie de arcotangente:

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\dots \qquad (-1 < x < 1)$$

Serie de logaritmo:

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\dots \qquad (-1 < x < 1)$$

Serie exponencial:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots \qquad (-1 < x < 1)$$

Serie del seno:

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots \qquad (-1 < x < 1)$$

Serie del coseno:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\dots \qquad (-1 < x < 1)$$

Serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

III. Aplicaciones 3: Series (continuación)

Serie de Taylor:

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \dots$$

O también en la forma:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$