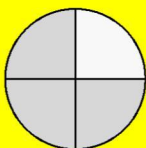


Brüche, Dreisatz, Prozent- und Zinsrechnen

Alexander Roux

$$\frac{3}{4}$$



3 Viertel

$$100 \% \rightarrow 2000 \text{ €}$$

$$9 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{9 \cdot 2000}{100} \text{ €} = 180 \text{ €}$$

$$360 \text{ Tage} \rightarrow 180 \text{ €}$$

$$1 \text{ Tag} \rightarrow \frac{180}{360} \text{ €} = 0,50 \text{ €}$$

$$116 \text{ Tage} \rightarrow 116 \cdot 0,50 \text{ €} = 58 \text{ €}$$

Brüche, Dreisatz, Prozent- und Zinsrechnen

Brüche, Dreisatz, Prozent- und Zinsrechnen

Alexander Roux

Impressum

Copyright: © 2023 Alexander Roux

Alle Rechte vorbehalten

www.a-roux.de

ISBN: 9798867947224

Selbstverlag, Alexander Roux

c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb: Kindle Direct Publishing

Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,

L-1855 Luxemburg

Vorwort

Dieses kleine Buch soll den Leser mit Brüchen, dem Dreisatz sowie der Prozent- und Zinsrechnung vertraut machen.

Die Themen bauen aufeinander auf. So kann ein Dreisatz besonders kurz mit einem geeigneten Bruch gelöst werden. Alle Aufgaben der Prozentrechnung sind mithilfe von Dreisätzen lösbar, es sind keine Formeln notwendig. Aus diesem Grunde wird der Dreisatz von europäischen Kaufleuten seit Jahrhunderten als *goldene Regel* bezeichnet. Das Zinsrechnen wiederum beruht im Wesentlichen auf dem Prozentrechnen und dem Dreisatz zur Einbeziehung des Zeitfaktors.

Das Bruchrechnen ist auch jenseits der kaufmännischen Anwendung von grundlegender Bedeutung für die abstrakte Mathematik, in der die Division stets als Bruch geschrieben wird.

Die Lektüre des Buches erfordert nur wenige Vorkenntnisse: die vier Grundrechenarten.

Am Ende jedes Kapitels befinden sich Übungsaufgaben zu allen behandelten Themen. Die Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben ist unverzichtbar, wenn man den Stoff lernen möchte.

Es gibt eine ständig steigende Tendenz in den Schulen des Westens, die Grundideen in der Mathematik durch eine Vielzahl von vermeintlich „praktischen“ oder „alltäglichen“ Beispielen zu verdunkeln.

Der vorliegende Text soll einen Beitrag dazu leisten, die wesentlichen Gedanken wieder deutlich erkennbar zu machen.

Dank der Hinweise von Herrn Gunnar Heiden konnten zahlreiche Druckfehler korrigiert werden.

Dr. A. Roux
Brühl, November 2023

Inhalt

Vorwort	5
Inhalt	7
1. Bruchrechnen	9
1.1 Einführung	9
1.2 Brüche	11
1.3 Addition und Subtraktion von Brüchen	23
1.4 Multiplikation und Division: einfache Sonderfälle...	28
1.5 Multiplikation von Brüchen	31
1.6 Division von Brüchen	36
1.7 Komplizierte Brüche	42
1.8 Stammbrüche	47
1.9 Der euklidische Algorithmus	52
Aufgaben	55
2. Der Dreisatz	67
2.1 Einführung	67
2.2 Zeitumrechnung	69
2.3 Gerader Dreisatz	75
2.4 Ungerader Dreisatz	81
2.5 Der einfache Dreisatz	86
2.6 Zusammengesetzter Dreisatz	91
Aufgaben	98
3. Prozentrechnen	107
3.1 Einführung	107
3.2 Berechnung des Prozentwertes	109
3.3 Berechnung des Prozentsatzes	110
3.4 Berechnung des Grundwertes	112
3.5 Vermehrter Grundwert	114
3.6 Verminderter Grundwert	115
Aufgaben	117
4. Zinsrechnen	127
4.1 Einführung	127
4.2 Jahreszinsen	128
4.3 Monatszinsen	131

4.4 Tageszinsen	134
4.5 Berechnung von Kapital, Zinssatz und Laufzeit	139
4.6 Zinseszins	142
4.7 Exponentielle Prozesse	151
Aufgaben	158
Lösungen	163
Anhang	184
Teilbarkeitsregeln	185
Zusammenfassung 1: Bruchrechnen	188
Zusammenfassung 2: Zeitumrechnung	190
Zusammenfassung 3: Dreisatz	192
Zusammenfassung 4: Prozentrechnen	195
Zusammenfassung 5: Zinsrechnen	201
Ausblick: Dreisatz und Gleichungen	211

1. Bruchrechnen

1.1 Einführung

1. Was ist ein Bruch?

Die üblichen (natürlichen) Zahlen dienen der Beschreibung einer Anzahl von ganzen Gegenständen (Äpfeln, Metern, Stunden, Kuchen usw.). Brüche sind zahlenmäßige Darstellungen von *Teilen* eines Gegenstandes: ein halber Apfel, eine Viertelstunde, eine Dreiviertelstunde, ein Achtel Kuchen, eine angebrochene Stunde. Aus dem Gesagten ergeben sich schon zwei Einsichten. Erstens sind Brüche grundsätzlich als (eine neue Art von) *Zahlen* aufzufassen. In unserem dezimalen Zahlensystem sind das die Kommazahlen, beispielsweise ist ein Halb gleich 0,5, denn $2 \text{ mal } 0,5$ ist tatsächlich 1. Zweitens haben Brüche etwas mit dem Teilen (Dividieren) zu tun. In der mathematischen Formelsprache tauchen Divisionen stets als Brüche auf. Auch beim Lösen eines Dreisatzes ist es praktisch, den Lösungsausdruck kurz und knapp als Bruch zu schreiben.

2. Historisches zum Bruchrechnen

Bei den Ägyptern kommen 1750 v. Chr. im Papyrus von Ahmes Brüche vor, allerdings bloß mit dem Zähler 1. Um zum Beispiel drei Viertel auszudrücken, haben sie die Summe von ein Halb und ein Viertel geschrieben. Das Rechnen mit diesen Einheitsbrüchen (*Stammbrüchen*) war entsprechend umständlich und aufwendig.

Die Babylonier kannten um 1850 v. Chr. bereits Brüche im Rahmen ihres auf 60 beruhenden Zahlensystems. Sie benutzten Kommazahlen, allerdings ohne ein Komma zu schreiben.

Das Bruchrechnen im heutigen Sinne taucht vermutlich zuerst um 150 v. Chr. in Indien auf. Brahmagupta (598–670) und Bhaskara (1114–1185) schrieben bereits den Zähler oben und den Nenner unten, aber ohne Bruchstrich. Der Bruchstrich wurde von den Arabern etwa im Jahre 1200 hinzugefügt.

Das Bruchrechnen in der heutigen Form ist also erst etwa 2000 Jahre alt. Es scheint ein für die Menschen schwieriges Thema zu sein.

3. Überblick

Das Bruchrechnen handelt – wie der Name schon sagt – von Brüchen und davon, wie man mit ihnen rechnet. Wir betrachten also grundsätzlich zwei Themen:

1. Brüche
2. Rechnen mit Brüchen

Brüche

Brüche beschreiben zahlenmäßig einen Teil vom Ganzen. Sie können auch als Kommazahlen (sogenannte Dezimalbrüche) geschrieben werden. In mathematischen Rechenausdrücken erscheinen Divisionen stets als Brüche.

Brüche können gekürzt werden, um sie zu vereinfachen. Die Umkehrung des Kürzens ist das Erweitern von Brüchen. Will man Brüche addieren, so muss man sie meist zuerst erweitern, um Brüche mit gleichem Nenner zu erhalten. Solche *gleichnamigen* Brüche können mühelos addiert werden. (Wie 2 Äpfel + 1 Apfel = 3 Äpfel.) Das Kürzen und Erweitern verändert die Gestalt des Bruches, der Wert des Bruches bleibt aber erhalten.

Das Rechnen mit Brüchen

Das Rechnen mit Brüchen besteht in der Durchführung der vier Grundrechenarten bei Brüchen:

Addition	Subtraktion
Multiplikation	Division

Die Brüche sind wie gesagt eng mit der Division verknüpft. So wundert es nicht, dass die Multiplikation und Division (Punkt-

rechnungsarten) von Brüchen einfacher ist als die Addition und Subtraktion.

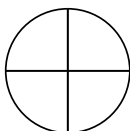
1.2 Brüche

Wir betrachten hier folgende Punkte:

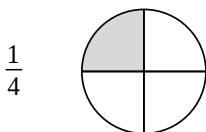
1. Bedeutung und Schreibweise von Brüchen
2. Erweitern und Kürzen von Brüchen
3. Bruch als Zahl (Kommazahl)
4. Reine und gemischte Brüche
5. Echte und unechte Brüche

1. Bedeutung und Schreibweise von Brüchen

Wir nehmen ein Ganzes und teilen es in beispielsweise 4 gleiche Stücke:



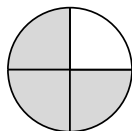
Hierbei haben wir das Ganze als Kreis dargestellt. Jedes dieser Stücke bezeichnet man als ein *Viertel* und schreibt es als



Eines der Viertel ist grau gezeichnet, um anzudeuten, dass wir **ein** Viertel betrachten.

Betrachten wir nun 3 Viertel, so schreibt man entsprechend:

$$\frac{3}{4}$$



Der oben stehende Zähler 3 gibt an, wie viele von den Vierteln gemeint sind. Er zählt also gewissermaßen die Viertel. Dies hat zur Bezeichnung **Zähler** geführt. Der unten stehende Nenner 4 signalisiert, dass es um Viertel geht (man hat das Ganze in 4 Stücke geteilt). Die 4 ist so etwas wie eine Einheit oder Benennung. Daher kommt die Bezeichnung **Nenner**. Der Bruch 3 Viertel hat so gesehen genau dieselbe Struktur wie 3 Meter, 3 Zentimeter oder 3 Äpfel. Diese Sichtweise ist beim Rechnen oft äußerst hilfreich.

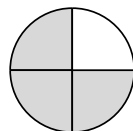
Wir fassen zusammen:

Bruch: $\frac{3}{4}$

Zähler

Nenner

3 Viertel (wie 3 Äpfel)

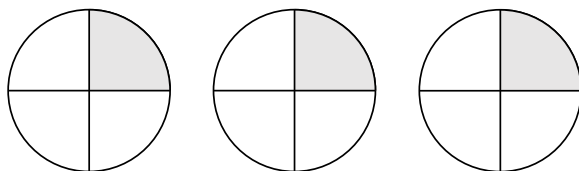


2. Bruch als Zahl (Kommazahl)

Wir rufen uns ins Gedächtnis, was das Dividieren ist. Teilt man beispielsweise 20 durch 4, so muss man 20 in 4 gleiche Teile zerlegen: $20 = 5 + 5 + 5 + 5$, und dann eines dieser Teile nehmen:

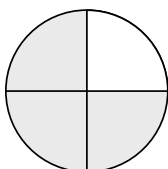
$$20 : 4 = 5.$$

Wir übertragen diese Gedanken auf die Division 3:4. Nun sind also 3 Ganze in 4 gleiche Teile zu zerlegen:



3 : 4

Genau diese drei schraffierten Teile tauchen auch im Bruch $\frac{3}{4}$ Viertel auf:



$\frac{3}{4}$

Die Division 3:4 entspricht also dem Bruch $\frac{3}{4}$ Viertel, und umgekehrt kann der Bruch als Divisionsergebnis und Kommazahl (sog. Dezimalbruch) aufgefasst werden:

Bruch als Zahl: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$

Rechnerische Begründung

Bevor wir einige Beispiel betrachten, geben wir eine rein rechnerische Begründung für die Gleichwertigkeit von Bruch und Divisionsergebnis. Dazu benutzen wir die bei Divisionen übliche

Probe. Mit ihr bestätigen wir, dass $\frac{3}{4}$ tatsächlich das Ergebnis der Division

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

ist. Dazu multiplizieren wir den Bruch (d. h., das mutmaßliche Ergebnis) mit dem Teiler 4, es müsste die Ausgangszahl 3 herauskommen. Wir rechnen also:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \cdot 4 &= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 && | \text{ denn } \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 3 \cdot \frac{4}{4} && | \text{ denn } 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4} \\ &= 3 \cdot 1 && | \text{ denn } \frac{4}{4} = 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Die Probe geht auf, also ist tatsächlich $\frac{3}{4}$ das Ergebnis der Division $3:4$.

Wir wissen nun, wie man einen Bruch in eine Kommazahl umwandelt: durch Dividieren.

Die nachstehenden Beispiele fassen zusammen, wie man Brüche in Kommazahlen umrechnet und umgekehrt.

Beispiel 1 (Bruch in Kommazahl)

Wandle $\frac{5}{8}$ in eine Kommazahl um.

Lösung

Wir deuten den Bruch als Division:

$$\frac{5}{8} = 5:8 = 0,625$$

Hierbei muss man eine schriftliche Division durchführen.

Beispiel 2 (Kommazahl in Bruch)

Wandle 0,75 in einen Bruch um.

Lösung (Komma wegmachen)

Multipliziere 0,75 mit 100, damit das Komma wegfällt. Man erhält 75. Um das Malnehmen wiedergutzumachen, muss man durch 100

teilen. Diese Division kann man aber als Bruch schreiben:

$$0,75 = \frac{0,75 \cdot 100}{100} = \frac{75}{100}$$

Also: $0,75 = \frac{75}{100}$

Beispiel 3 (Ganze Zahl in Bruch)

Wandle 3 in einen Bruch um.

Lösung 1 (Idee: Eintel)

Da $3:1 = 3$ ist, kann man 3 als drei Eintel schreiben:

$$3 = \frac{3}{1}$$

Lösung 2 (Malnehmen und Teilen)

Nehmen wir zum Beispiel an, dass wir die 3 in einen Bruch mit dem Nenner 5 umwandeln wollen. Wir nehmen die 3 mit 5 mal (das ergibt 15) und teilen dann wieder durch 5, um alles wiedergutzumachen. Die Division schreiben wir als Bruch:

$$3 = (3 \cdot 5) : 5 = 15 : 5 = \frac{15}{5}$$

Also: $3 = \frac{15}{5}$

Lösung 3 (Betrachte ein Ganzes)

Nehmen wir zum Beispiel wieder an, dass wir die 3 in einen Bruch mit dem Nenner 5 umwandeln wollen.

Offenbar ist

$$1 \text{ Ganzes} = 5 \text{ Fünftel}$$

Dann sind 3 Ganze dreimal so viele Fünftel:

$$3 \text{ Ganze} = 3 \cdot 5 \text{ Fünftel} = 15 \text{ Fünftel}$$

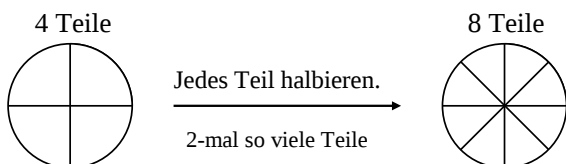
Kürzer geschrieben:

$$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \frac{5}{5} = \frac{15}{5}$$

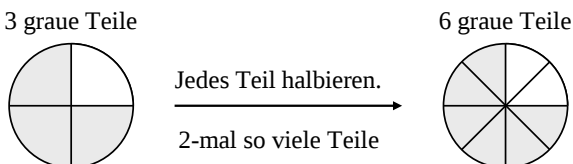
Also: $3 = \frac{15}{5}$

3. Erweitern und Kürzen von Brüchen

Wir hatten ein Ganzes in 4 Stücke geteilt. Jedes dieser Stücke kann nochmal geteilt werden, etwa in 2 gleiche Stücke. Dann verdoppelt sich die Anzahl der Stücke:



Das trifft natürlich auch auf die grauen Teile zu:



Drei Viertel von einem Ganzen ist also genauso viel wie sechs Achtel. Eine derartige Umformung eines Bruches nennt man *Erweiterung*:

Das **Erweitern** eines Bruches besteht darin, dass man Zähler und Nenner **mit ein und derselben Zahl** multipliziert. Der Wert (die Bedeutung) des Bruches ändert sich dabei nicht:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}.$$

Wir haben den Bruch mit 2 erweitert. Selbstverständlich kann man ihn auch mit jeder anderen Zahl erweitern, beispielsweise mit 5:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}.$$

Das Erweitern werden wir benutzen, um Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen.

Das **Kürzen** eines Bruches ist die Umkehrung des Erweiterns. Man braucht nur die Zeile

$$\frac{3}{4} = \frac{3:2}{4:2} = \frac{6}{8}.$$

von rechts nach links zu lesen. Aus der Multiplikation mit 2 wird dann die Division durch 2.

Das **Kürzen** eines Bruches besteht also darin, dass man Zähler und Nenner **durch ein und dieselbe Zahl** dividiert. Der Wert (die Bedeutung) des Bruches ändert sich dabei nicht:

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}.$$

Das Ziel des Kürzens ist die Verkleinerung von Zähler und Nenner. Dazu muss man eine (ganze) Zahl finden, die sowohl in den Zähler als auch in den Nenner passt, ohne Rest. Eine solche Zahl bezeichnet man als gemeinsamen Teiler. Bei überschaubaren Zahlen prüft man, ob die Primzahlen 2, 3, 5, 7, usw. als Teiler in Frage kommen. Dabei sind die Teilbarkeitsregeln (s. Anhang) nützlich. Bei größeren Zahlen empfiehlt sich die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers mithilfe des euklidischen Algorithmus, der in Kapitel 1.9 erläutert wird.

Beispiele:

$$\text{a) } \frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \frac{72}{102} = \frac{72:2}{102:2} = \frac{36}{51} = \frac{36:3}{51:3} = \frac{12}{17}$$

$$c) \frac{252}{315} = \frac{252:3}{315:3} = \frac{84}{105} = \frac{84:3}{105:3} = \frac{28}{35} = \frac{28:7}{35:7} = \frac{4}{5}$$

$$d) 0,75 = \frac{0,75 \cdot 100}{100} = \frac{75}{100} = \frac{75:25}{100:25} = \frac{3}{4}$$

Anmerkungen 1:

Bei der Kurzlösung von Dreisätzen werden wir Brüche kennenlernen, die im Zähler und Nenner Produkte von Zahlen enthalten. Durch vorangehendes Kürzen kann die Berechnung eines solchen Bruches manchmal sehr vereinfacht werden. Beispiele:

$$a) \frac{3 \cdot 15}{5} = \frac{3 \cdot (15:5)}{5:5} = \frac{3 \cdot 3}{1} = \frac{9}{1} = 9 \quad \text{oder kurz:}$$

$$\frac{3 \cdot 15}{5} = \frac{3 \cdot \cancel{15}^3}{\cancel{5}_1} = \frac{3 \cdot 3}{1} = \frac{9}{1} = 9$$

$$b) \frac{21 \cdot 25}{7 \cdot 35} = \frac{\cancel{21}^3 \cdot \cancel{25}^5}{\cancel{7}_1 \cdot \cancel{35}_7} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 7} = \frac{15}{7}$$

Anmerkungen 2:

Wir haben oben das Erweitern von Brüchen anschaulich anhand eines Beispiels begründet. Man kann dies folgendermaßen auch rein **rechnerisch** tun:

Wir betrachten den mit 5 erweiterten Bruch $\frac{3}{4}$, also den Bruch

$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = (3 \cdot 5) : (4 \cdot 5).$$

Um zu zeigen, dass tatsächlich

$$(3 \cdot 5) : (4 \cdot 5) = \frac{3}{4}$$

Ist, machen wir die Probe. Wir multiplizieren $\frac{3}{4}$ mit dem Teiler $4 \cdot 5$ und prüfen, ob die Ausgangszahl $3 \cdot 5$ herauskommt:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 5 &= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 3 \cdot \frac{4}{4} \cdot 5 \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 5 \\ &= 3 \cdot 5\end{aligned}$$

Die Probe geht also auf, womit bewiesen ist, dass

$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}.$$

4. Reine und gemischte Brüche

Die Adjektive *rein* und *gemischt* beziehen sich lediglich auf die **Schreibweise** von Brüchen.

So besteht ein **reiner** Bruch aus Zähler, Bruchstrich und Nenner. Beispiele sind:

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}$$

Ein **gemischter** Bruch besteht aus einer glatten (ganzen) Zahl und einem Bruch, zum Beispiel 5 Ganze und 3 Viertel:

$$5\frac{3}{4}$$

Es ist zu beachten, dass hier die 5 **neben** den drei Vierteln steht, aber **keine** Multiplikation gemeint ist. Das ist sonst anders in der Mathematik. Mathematisch aufgeschlüsselt meint der gemischte Bruch eine **Summe**:

$$5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4}$$

5. Echte und unechte Brüche

Ein Bruch im ursprünglichen Sinne ist Teil eines Ganzen – ein gebrochenes Ganzes eben. Brüche, die weniger als ein Ganzes sind, nennt man daher zurecht **echte Brüche**. Beispiele:

$$\frac{3}{4} \quad (\text{weniger als } \frac{4}{4} = 1 \text{ Ganzes})$$

$$\frac{1}{2} \quad (\text{weniger als } \frac{2}{2} = 1 \text{ Ganzes})$$

$$\frac{5}{8} \quad (\text{weniger als } \frac{8}{8} = 1 \text{ Ganzes})$$

Ein unechter Bruch ist ein Bruch der nicht echt ist, also nicht weniger als ein Ganzes ist. Es gibt zwei Möglichkeiten: Der unechte Bruch kann ein Ganzes sein, oder er kann mehr als ein Ganzes sein. Beide Fälle kann man so zusammenfassen: Ein **unechter** Bruch ist **mindestens** ein Ganzes. Beispiele:

$$\frac{4}{4} \quad (1 \text{ Ganzes})$$

$$\frac{3}{2} \quad (\text{mehr als } \frac{2}{2} = 1 \text{ Ganzes})$$

$$1\frac{3}{8} \quad (\text{enthält 1, ist also mehr als 1 Ganzes})$$

Umwandlung: gemischter Bruch $\rightarrow$ reiner Bruch

Man kann einen gemischten Bruch stets in einen reinen Bruch umwandeln. Das wird bei der Multiplikation und Division von gemischten Brüchen gebraucht.

Beispiel

$$3\frac{2}{5} = ?$$

Lösung 1 (ausführlich)

$$\begin{array}{l|l} 3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} & \begin{array}{l} 1 \text{ Ganzes} = 5 \text{ Fünftel} \\ 3 \text{ Ganze} = 3 \cdot 5 \text{ Fünftel} = 15 \text{ Fünftel} \end{array} \\ = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} & | 15 \text{ Äpfel} + 2 \text{ Äpfel} = 17 \text{ Äpfel} \end{array}$$

$$= \frac{17}{5}$$

Der entscheidende Punkt ist, dass man die Ganzen in einen Bruch umwandelt, und zwar mit dem vorgegebenen Nenner.

Lösung 2 (kurz)

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Die Ganzen werden mit dem Nenner multipliziert, dann der Zähler addiert. Dies ergibt den Zähler des reinen Bruchs. Der Nenner bleibt unverändert. Dieses Verfahren kann aus dem ausführlichen ersten Lösungsweg abgelesen werden.

Umwandlung: unechter reiner Bruch → gemischter Bruch

Wenn man einen unechten reinen Bruch in einen gemischten Bruch umwandeln möchte, muss man herausfinden, wie viele Ganze hinein passen, und was übrig bleibt.

Betrachten wir zum Beispiel den unechten reinen Bruch

$$\frac{11}{4}.$$

Nun ist ein Ganzes $\frac{4}{4}$. Die Frage ist daher, wie oft

$$\frac{4}{4} \text{ in } \frac{11}{4}.$$

passt. Die Einheit *Viertel* spielt keine Rolle, wir müssen nur finden, wie oft

$$4 \text{ in } 11.$$

passt. Dies ist eine Divisionsaufgabe, nämlich:

$$11:4 = ?$$

Das Ergebnis ist offenbar:

$$11:4 = 2 \text{ Rest } 3$$

Also sind 2 Ganze in $\frac{11}{4}$ enthalten, und es bleiben 3 (Viertel) übrig:

$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

Fazit: Die Umwandlung eines unechten reinen Bruches in einen gemischten Bruch erfolgt durch eine einfache **Division mit Rest**.

Beispiel

$$\frac{39}{5} = 7\frac{4}{5} \quad (39 : 5 = 7 \text{ Rest } 4)$$

1.3 Addition und Subtraktion von Brüchen

Die Addition von Brüchen mit **gleichem** Nenner ist einfach und gut verständlich, wenn man bedenkt, dass der Nenner die Rolle einer Einheit spielt. So ist:

$$2 \text{ Äpfel} + 3 \text{ Äpfel} = 5 \text{ Äpfel}$$

und entsprechend auch:

$$2 \text{ Siebtel} + 3 \text{ Siebtel} = 5 \text{ Siebtel}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

Möchte man Brüche mit **ungleichen** Nennern addieren, so kann man die Brüche derart erweitern, dass sie gleiche Nenner haben. Grundgedanke für die geeignete Erweiterung ist folgender:

Jedem Nenner fehlt was der andere Nenner hat. Fügt man nun jedem Nenner den Nenner des anderen Bruches hinzu, so werden beide Nenner gleich. Betrachte beispielsweise die Brüche:

$$\frac{2}{5} \text{ und } \frac{3}{7}$$

Der erste Bruch hat die 5 im Nenner, ihm fehlt die 7; diese muss also hinzugefügt werden. Der zweite Bruch hat die 7 im Nenner, ihm fehlt die 5, die also hinzugefügt werden muss. Um den Wert der Brüche nicht zu verändern, muss die Ergänzung stets auch im Zähler vorgenommen werden (Erweitern von Brüchen). Unsere Brüche sind daher wie folgt zu erweitern:

$$\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} \text{ und } \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5}$$

Berechnet man die Produkte, werden unsere Brüche folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{14}{35} \text{ und } \frac{15}{35}$$

Die Nenner sind nun gleich und einer Addition steht nichts mehr im Weg.

Anmerkungen

1. Der geschilderte Grundgedanke wird auch beim Additionsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme angewendet.
2. Das Gesagte wird auch bei der Subtraktion von Brüchen angewendet.

Wir betrachten nun jeweils drei Beispiele zur Addition und Subtraktion von Brüchen. Die folgenden Aspekte werden dabei abgedeckt:

- gleicher Nenner
- verschiedene Nenner
- gemischte Brüche

Der sicherste und strategisch klarste Weg bei der Addition und Subtraktion von gemischten Brüchen ist die Umwandlung in *reine* Brüche.

Beispiel 1 (gleiche Nenner)

$$\frac{5}{11} + \frac{2}{11} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned}\frac{5}{11} + \frac{2}{11} &= 5 \text{ Elftel} + 2 \text{ Elftel} && (5 \text{ Äpfel} + 2 \text{ Äpfel} = 7 \text{ Äpfel}) \\ &= 7 \text{ Elftel} \\ &= \frac{7}{11}\end{aligned}$$

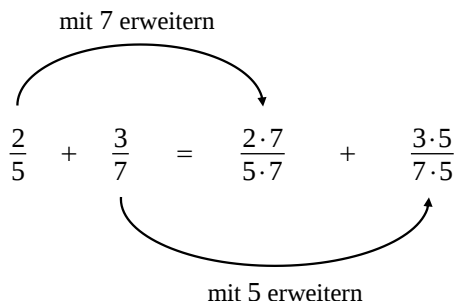
Also: $\frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$

Beispiel 2 (ungleiche Nenner)

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = ?$$

Lösung

Wir müssen beide Brüche auf einen gleichen Nenner bringen. Dem ersten Bruch fehlt die 7 im Nenner, daher wird er mit 7 erweitert. Dem zweiten Bruch fehlt die 5 im Nenner, deswegen wird er mit 5 erweitert:


$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5}$$

Daher:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} + \frac{3}{7} &= \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} \\ &= \frac{14}{35} + \frac{15}{35} \quad (14 \text{ Äpfel} + 15 \text{ Äpfel} = 29 \text{ Äpfel}) \\ &= \frac{29}{35}\end{aligned}$$

Also: $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{29}{35}$

Beispiel 3 (gemischte Brüche)

$$4\frac{3}{7} + 1\frac{2}{5} = ?$$

Lösung 1 (gemischte Brüche in reine umwandeln)

$$\begin{aligned}
4\frac{3}{7} + 1\frac{2}{5} &= \frac{31}{7} + \frac{7}{5} && \text{(in reine Brüche umgewandelt)} \\
&= \frac{31 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 7} \\
&= \frac{155}{35} + \frac{49}{35} && (155 \text{ Äpfel} + 49 \text{ Äpfel} = 204 \text{ Äpfel}) \\
&= \frac{204}{35} && (204 : 35 = 5 \text{ Rest } 29) \\
&= 5\frac{29}{35}
\end{aligned}$$

Also: $4\frac{3}{7} + 1\frac{2}{5} = 5\frac{29}{35}$

Lösung 2 (Ganze getrennt verrechnen)

Dieser Ansatz ist nicht auf die Multiplikation und Division übertragbar, anders als der universelle Ansatz des ersten Lösungsweges. Wegen seiner allgemein anwendbaren Strategie empfiehlt sich eher der erste Lösungsweg.

$$\begin{aligned}
4\frac{3}{7} + 1\frac{2}{5} &= 4 + \frac{3}{7} + 1 + \frac{2}{5} && \text{(gemischte Brüche als Summe)} \\
&= 4 + 1 + \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \\
&= 5 + \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \\
&= 5 + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} && \text{(gemeinsamer Nenner)} \\
&= 5 + \frac{15}{35} + \frac{14}{35} && (15 \text{ Äpfel} + 14 \text{ Äpfel} = 29 \text{ Äpfel}) \\
&= 5 + \frac{29}{35} \\
&= 5\frac{29}{35}
\end{aligned}$$

$$\text{Also: } 4\frac{3}{7} + 1\frac{2}{5} = 5\frac{29}{35}$$

Nun folgen drei Beispiele zur Subtraktion von Brüchen. Die Subtraktion von Brüchen erfolgt völlig analog zur Addition. Auch hier ist der Grundgedanke, einen gemeinsamen Nenner zu finden.

Beispiel 1 (gleiche Nenner, Subtraktion)

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} - \frac{1}{5} &= 3 \text{ Fünftel} - 1 \text{ Fünftel} && (3 \text{ Äpfel} - 1 \text{ Äpfel} = 2 \text{ Äpfel}) \\ &= 2 \text{ Fünftel} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Beispiel 2 (ungleiche Nenner, Subtraktion)

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{9} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} - \frac{2}{9} &= \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 9} - \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 5} \\ &= \frac{27}{45} - \frac{10}{45} && (27 \text{ Äpfel} - 10 \text{ Äpfel} = 17 \text{ Äpfel}) \\ &= \frac{17}{45}\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \frac{3}{5} - \frac{2}{9} = \frac{17}{45}$$

Beispiel 3 (gemischte Brüche, Subtraktion)

$$5\frac{4}{7} - 1\frac{2}{3} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned} 5\frac{4}{7} - 1\frac{2}{3} &= \frac{39}{7} - \frac{5}{3} && \text{(in reine Brüche umgewandelt)} \\ &= \frac{39 \cdot 3}{7 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 7} \\ &= \frac{117}{21} - \frac{35}{21} && (117 \text{ Äpfel} - 35 \text{ Äpfel} = 82 \text{ Äpfel}) \\ &= \frac{82}{21} && (82 : 21 = 3 \text{ Rest } 19) \\ &= 3\frac{19}{21} \end{aligned}$$

Also: $5\frac{4}{7} - 1\frac{2}{3} = 3\frac{19}{21}$

1.4 Multiplikation und Division von Brüchen: einfache Sonderfälle

Wir betrachten hier zwei einfach zu verstehende Sonderfälle bei der Multiplikation und Division von Brüchen:

- Multiplikation: ganze Zahl mal Bruch
- Division: Bruch durch ganze Zahl

In beiden Fällen reicht gesunder Menschenverstand zur Lösung, wenn man den Nenner als Benennung oder Einheit (wie Apfel oder Meter) auffasst. Bei der Division kann ein Hindernis auftreten, das man allerdings durch Erweitern des Bruches überwinden kann. Die folgenden drei Beispiele erläutern das Gesagte:

Beispiel 1 (Zahl mal Bruch)

Berechne $5 \cdot \frac{3}{16}$.

Lösung 1 (gesunder Menschenverstand)

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{3}{16} &= 5 \text{ mal } 3 \text{ Sechzehntel} && (5 \text{ mal } 3 \text{ Äpfel}) \\ &= 15 \text{ Sechzehntel} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Also: $5 \cdot \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$

Dieser erste Lösungsweg zeigt, dass letztlich lediglich die Zahl mit dem Zähler des Bruches multipliziert wird. Diese Regel ist dem Praktiker geläufig und wird im zweiten Lösungsweg benutzt:

Lösung 2 (Zahl zum Zähler schlagen)

$$5 \cdot \frac{3}{16} = \frac{5 \cdot 3}{16} = \frac{15}{16}$$

Also: $5 \cdot \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$

Beispiel 2 (Bruch durch Zahl)

Berechne $\frac{6}{25} : 3$.

Lösung (gesunder Menschenverstand)

$$\begin{aligned} \frac{6}{25} : 3 &= 6 \text{ Fünfundzwanzigstel durch } 3 && (6 \text{ Äpfel durch } 3) \\ &= 2 \text{ Fünfundzwanzigstel} \\ &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \frac{6}{25} : 3 = \frac{2}{25}$$

Im vorangehenden Beispiel wird letztlich der Zähler durch den Teiler geteilt. Dies ist möglich, weil der Zähler des Bruches teilbar durch den Teiler ist. Wenn das nicht der Fall wäre, könnte man den so Bruch erweitern, dass der Zähler teilbar durch den Teiler wird. Davon handelt das nächste Beispiel:

Beispiel 3 (Bruch durch Zahl)

Berechne $\frac{7}{25} : 3$.

Lösung 1 (Bruch erweitern)

$$\begin{aligned}\frac{7}{25} : 3 &= \frac{7 \cdot 3}{25 \cdot 3} : 3 && \text{(mit dem Teiler 3 erweitert)} \\ &= \frac{7}{25 \cdot 3} && \text{(der Zähler } 7 \cdot 3 \text{ wurde durch 3 geteilt)} \\ &= \frac{7}{75}\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \frac{7}{25} : 3 = \frac{7}{75}$$

Der Lösungsweg zeigt, dass letztlich nur die Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliziert wird. Diese Regel ist dem Praktiker geläufig und wird im zweiten Lösungsweg benutzt:

Lösung 2 (Teiler zum Nenner schlagen)

$$\frac{7}{25} : 3 = \frac{7}{25 \cdot 3} = \frac{7}{75}$$

$$\text{Also: } \frac{7}{25} : 3 = \frac{7}{75}$$

1.5 Multiplikation von Brüchen

Wir möchten nun zwei Brüche multiplizieren, beispielsweise

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = ?$$

Anhand dieser Aufgabe werden wir die Regel für die Multiplikation von Brüchen herleiten und somit nachvollziehbar machen. Wir betrachten zwei verschiedene Herleitungen: eine (kürzere) rechnerische und eine geometrische.

Rechnerische Herleitung

Wir haben in Kapitel 1.2.2 (S. 14) gesehen, dass einfach der Zähler herauskommt, wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multipliziert, zum Beispiel ist:

$$\frac{4}{5} \cdot 5 = 4.$$

Dies können wir benutzen, um das Produkt

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

zu vereinfachen, indem wir es zuerst mit 5 multiplizieren. Später müssen wir dies wieder rückgängig machen und durch 5 dividieren.

Also:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 5 &= \frac{2}{3} \cdot 4 && | 4 \text{ mit dem Zähler multiplizieren} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{3} \end{aligned}$$

Nun teilen wir durch 5, multiplizieren 5 einfach mit dem Nenner:

$$\frac{2 \cdot 4}{3} : 5 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}.$$

Insgesamt haben wir das Ergebnis

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5},$$

aus dem man die allgemeine Regel ablesen kann:

Man multipliziert Brüche, indem man jeweils die Zähler und die Nenner multipliziert (Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner).

Eine alternative Rechnung

Betrachtet man $\frac{2}{3}$ als Zahl, so kann man sie einfach mit dem Zähler von $\frac{4}{5}$ multiplizieren:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 4}{5}$$

Nun multiplizieren wir 4 mit dem Zähler:

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot 4}{5} = \frac{\frac{2 \cdot 4}{3}}{5}$$

Nun schreiben wir den Bruch als Division und können die 5 mit dem Nenner multiplizieren:

$$\frac{\frac{2 \cdot 4}{3}}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3} : 5 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

Insgesamt ergibt sich also wieder

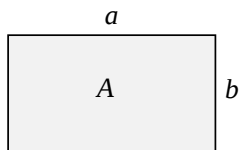
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}.$$

Geometrische Herleitung

Diese Herleitung beruht auf dem Flächeninhalt eines Rechtecks. Zur Auffrischung notieren wir die Formel für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit der Länge a und der Breite b :

$$A = a \cdot b$$

Flächeninhalt eines Rechtecks = Länge mal Breite

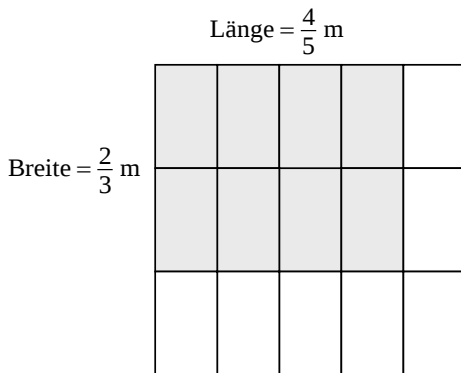


Wir wenden diese Formel nun umgekehrt an: Wenn wir **irgendein Produkt** haben, können wir es als **Flächeninhalt** eines Rechtecks auffassen, wobei die Faktoren des Produkts die Länge bzw. Breite des Rechtecks sind. Beispielsweise kann das Produkt $2 \cdot 3$ als Flächeninhalt eines Rechtecks betrachtet werden, das 3 m lang und 2 m breit ist.

Uns interessiert hier ein Beispiel wie das oben genannte Produkt zweier Brüche:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = ?$$

Wir deuten es als Flächeninhalt eines $\frac{4}{5}$ m langen und $\frac{2}{3}$ m breiten Rechtecks (grau):



grau:

$2 \cdot 4$ Rechtecke = 8 Rechtecke

Das gesamte Quadrat hat 1 m lange Seiten und daher einen Flächeninhalt von 1 m^2 (ein Ganzes). Es besteht aus

$$3 \cdot 5 \text{ Teilrechtecken} = 15 \text{ Teilrechtecken}$$

Das graue Rechteck besteht also aus 8 Teilen von insgesamt 15 Teilen des Ganzen. Der Flächeninhalt ist also:

$$\frac{8}{15} \text{ m}^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{ m}^2$$

Zusammengefasst:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Man kann daraus wieder die Regel für die Multiplikation von Brüchen ablesen, sie lautet:

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man

Zähler mal Zähler und **Nenner mal Nenner**

nimmt:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

Wir betrachten nun drei Beispiele, die alle wichtigen Aspekte und Situationen erläutern:

- Anwendung der Regel
- Multiplikation von gemischten Brüchen
- Multiplikation einer Zahl mit einem Bruch
- Der Bruchteil einer Größe

Beispiel 1 (Anwendung der Regel)

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} &= \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} && \text{(Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner)} \\ &= \frac{15}{28}\end{aligned}$$

Also: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$

Beispiel 2 (gemischte Brüche)

$$4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{5} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned}4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{5} &= \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{5} && \text{(in reine Brüche umgewandelt)} \\ &= \frac{9 \cdot 7}{2 \cdot 5} && \text{(Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner)} \\ &= \frac{63}{10} && (63 : 10 = 6 \text{ Rest } 3) \\ &= 6\frac{3}{10}\end{aligned}$$

Also: $4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{5} = 6\frac{3}{10}$

Beispiel 3 (Zahl mal Bruch)

$$5 \cdot \frac{3}{16} = ?$$

Lösung 1 (anschaulich)

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{3}{16} &= 5 \text{ mal } 3 \text{ Sechzehntel} && (5 \text{ mal } 3 \text{ Äpfel}) \\ &= 15 \text{ Sechzehntel} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } 5 \cdot \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$$

Dieser Lösungsweg wurde bereits in Kapitel 1.4 betrachtet und gefolgert, dass letztlich lediglich die Zahl mit dem Zähler des Bruches multipliziert wird.

Lösung 2 (Zahl zum Zähler schlagen)

$$5 \cdot \frac{3}{16} = \frac{5 \cdot 3}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\text{Also: } 5 \cdot \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$$

Lösung 3 (Eintel)

Wir können 5 auch als Bruch mit dem Nenner 1 auffassen:

$$5 = \frac{5}{1}.$$

Nun kann die Aufgabe mithilfe der Regel gelöst werden:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{3}{16} &= \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{16} && (5 \text{ in einen Bruch umgewandelt}) \\ &= \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 16} && (\text{Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner}) \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } 5 \cdot \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$$

Beispiel 4 (Bruchteil einer Größe)

Was ist $\frac{3}{4}$ von 5?

Lösung 1 (anschaulich)

Ein Viertel von 5 ist einfach durch eine Division zu berechnen:

$$\frac{1}{4} \text{ von } 5 = 5 : 4 = \frac{5}{4}$$

Drei Viertel von 5 sind dann dreimal so viel:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \text{ von } 5 &= 3 \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{3 \cdot 5}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 5\end{aligned}$$

An dem Ergebnis

$$\frac{3}{4} \text{ von } 5 = \frac{3}{4} \cdot 5$$

erkennt man eine einfache Regel:

Bruch **von** einer Größe = Bruch **mal** diese Größe

Das konkrete Ergebnis in unserem Beispiel ist also:

$$\frac{3}{4} \text{ von } 5 = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

1.6 Division von Brüchen

Bevor wir uns der Division von Brüchen zuwenden, betrachten wir allgemein die zwei Deutungen der Division. Die zweite von ihnen wird uns dann bei der Division von Brüchen zur Lösung führen.

Die zwei Deutungen der Division

Eine Division wie

$$6 : 3$$

kann auf zwei Arten gedeutet werden:

1) Teile 6 in 3 gleiche Stücke:

$$6 = 2 + 2 + 2$$

Diese Stücke sind das gesuchte Ergebnis der Division:

$$6 : 3 = 2$$

Die 6 besteht aus drei Stücken der Größe 2, also ist $3 \cdot 2 = 6$.

2) Prüfe, wie oft 3 in 6 passt. Offenbar ist

$$6 = 3 + 3$$

Die 3 passt zweimal in die 6, daher

$$6 : 3 = 2$$

Die 6 besteht aus zwei Stücken der Größe 3, also ist $2 \cdot 3 = 6$.

Die Division von Brüchen

Für die Division von Brüchen benötigen wir die zweite Deutung. Mit ihr können wir die Aufgabe

$$6 \text{ Äpfel} : 3 \text{ Äpfel}$$

verstehen; die Frage, wie oft 3 Äpfel in 6 Äpfel passen (oder enthalten sind), ist nachvollziehbar.

Entsprechend kann

$$\frac{6}{5} : \frac{3}{5} \quad (6 \text{ Fünftel} : 3 \text{ Fünftel})$$

gut verstanden werden.

Das Ergebnis hängt nicht von der Benennung (Äpfel bzw. Fünftel) ab und ist stets:

$$6:3=2$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun imstande, die Division von Brüchen durchzuführen. Dazu bringen wir die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und wenden dann das Gesagte an:

$$\begin{aligned}\frac{5}{7} : \frac{3}{4} &= \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} : \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 4} \\ &= (5 \cdot 4) : (7 \cdot 3) \\ &= \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}\end{aligned}$$

Also

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}$$

Das Ergebnis auf der rechten Seite kann als Produkt zweier Brüche aufgefasst werden:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}$$

Hieraus können wir zwei wichtige Sachen ablesen:

- Der zuerst stehende, zu teilende Bruch $\frac{5}{7}$ steht unverändert im Ergebnis.
- Der zweite Bruch, durch den geteilt wird, steht als **Kehrwert** im Ergebnis: Zähler und Nenner sind **vertauscht**.

Wir erkennen: Durch einen Bruch zu dividieren, ist dasselbe wie mit seinem Kehrwert zu multiplizieren.

Wir halten diese wichtige Regel für die Division von Brüchen in dem folgenden Übersichtskasten fest:

Man teilt durch einen Bruch, indem man mit dem **Kehrwert malnimmt**:

$$\text{Figur} : \frac{3}{4} = \text{Figur} \cdot \frac{4}{3}$$

Was vorne steht, spielt dabei keine Rolle und wird hier als Figur dargestellt.

Wir betrachten nun drei Beispiele, die alle wichtigen Aspekte und Situationen erläutern:

- Anwendung der Regel
- Division von gemischten Brüchen
- Division eines Bruches durch eine Zahl

Beispiel 1 (Anwendung der Regel)

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} : \frac{5}{7} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} && \text{(mit dem Kehrwert multipliziert)} \\ &= \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} && \text{(Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner)} \\ &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

Also: $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$

Beispiel 2 (gemischte Brüche)

$$3\frac{2}{3} : 1\frac{5}{7} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned} 3\frac{2}{3} : 1\frac{5}{7} &= \frac{11}{3} : \frac{12}{7} && \text{(in reine Brüche umgewandelt)} \\ &= \frac{11}{3} \cdot \frac{7}{12} && \text{(mit dem Kehrwert multipliziert)} \\ &= \frac{11 \cdot 7}{3 \cdot 12} && \text{(Zähler} \cdot \text{Zähler, Nenner} \cdot \text{Nenner)} \\ &= \frac{77}{36} && (77 : 36 = 2 \text{ Rest } 5) \\ &= 2\frac{5}{36} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } 3\frac{2}{3} : 1\frac{5}{7} = 2\frac{5}{36}$$

Beispiel 3 (Bruch durch Zahl)

$$\frac{8}{5} : 3 = ?$$

Lösung 1 (Eintel)

Wir können 3 als Bruch $\frac{3}{1}$ auffassen:

$$\begin{aligned} \frac{8}{5} : 3 &= \frac{8}{5} : \frac{3}{1} && (3 \text{ in einen Bruch umgewandelt)} \\ &= \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{3} && \text{(mit dem Kehrwert multipliziert)} \\ &= \frac{8 \cdot 1}{5 \cdot 3} && \text{(Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner)} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \frac{8}{5} : 3 = \frac{8}{15}$$

Der erste Lösungsweg bestätigt, was wir schon in Kapitel 1.4 herausbekommen hatten: Letztlich muss lediglich die Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliziert werden. Diese Regel ist dem Praktiker geläufig und wird zur Wiederholung im zweiten Lösungsweg benutzt:

Lösung 2 (Teiler zum Nenner schlagen)

$$\frac{8}{5} : 3 = \frac{8}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

$$\text{Also: } \frac{8}{5} : 3 = \frac{8}{15}$$

1.7 Komplizierte Brüche

Wir fassen nun Rechenausdrücke ins Auge, die mehrere Brüche und Grundrechenarten enthalten, zum Beispiel:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{e) } \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$$

Die Methode zur Berechnung der Beispiele a) und b) ist aus den ersten Schuljahren bekannt. Man addiert bzw. multipliziert jeweils zwei Zahlen:

$$\underline{2+3}+4 = \underline{5}+4 = 9$$

und analog

$$\underline{2\cdot 3}\cdot 4 = \underline{6}\cdot 4 = 24$$

Man kann auch zunächst die letzten beiden Zahlen behandeln, das Ergebnis ist dasselbe:

$$2+\underline{3+4} = 2+\underline{7} = 9$$

und

$$2\cdot \underline{3\cdot 4} = 2\cdot \underline{12} = 24$$

Das Ergebnis von Ausdrücken wie in Beispiel c) hängt von der Reihenfolge ab, in der man die Rechenoperationen durchführt:

$$2\cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10 \quad (\text{Multiplikation zuerst})$$

$$2\cdot 3 + 4 = 2\cdot 7 = 14 \quad (\text{Addition zuerst})$$

Um die Eindeutigkeit zu erzwingen, hat man in der Mathematik die Vereinbarung (Konvention) getroffen, dass

Punktrechnung vor Strichrechnung

geht. Punktrechnungen sind Multiplikation und Division, Strichrechnungen Addition und Subtraktion. Um den Vorrang der Punktrechnung optisch wiederzugeben, schreibt man die Faktoren bei Produkten enger zusammen als die Summanden:

$$2\cdot 3 + 4 \quad \text{und nicht: } 2\cdot 3+4$$

Diese Schreibweise bewahrt einen vor manchem Fehler.

Wenn es erwünscht ist, dass 3 und 4 zunächst addiert werden, so muss man eine **Klammer** setzen:

$$2\cdot (3+4)$$

Das Beispiel e) enthält kurze und lange Bruchstriche. Die Länge der Bruchstriche ist entscheidend für die Eindeutigkeit des Ergebnisses, wie man an den folgenden Berechnungen sehen kann:

Einerseits ist

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Andererseits

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Bei der Berechnung wurde der lange Bruchstrich als **Division** aufgefasst. Der lange Bruchstrich signalisiert, dass die kleinen Brüche als Blöcke zu sehen sind (und den Zähler bzw. Nenner des Hauptbruches bilden).

Wir fassen die entwickelten Grundsätze für den praktischen Gebrauch zusammen:

1. Punktrechnung geht vor Strichrechnung: $1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$
2. Klammern haben Vorrang: $(1 + 2) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$
3. Lange Bruchstriche signalisieren eine Blockbildung: $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

Wir betrachten nun drei weitere Beispiele zur Anwendung der besprochenen Regeln:

Beispiel 1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = ?$$

Lösung

Zunächst die ersten beiden Brüche addieren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{7} && \text{(zwei Brüche bearbeiten)} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{7} \\ &= \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 6}{7 \cdot 6} && \text{(gemeinsamer Nenner)} \\ &= \frac{35}{42} + \frac{6}{42} \\ &= \frac{41}{42}\end{aligned}$$

Also: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$

Beispiel 2

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = ?$$

Lösung

Berechne zunächst Zähler und Nenner. Dann wird der große Bruch als Division geschrieben und berechnet.

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}}{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} \quad (\text{gemeinsamer Nenner})$$

$$= \frac{\frac{8}{20} + \frac{15}{20}}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}}$$

$$= \frac{\frac{23}{20}}{\frac{5}{6}} \quad (\text{Bruch als Division})$$

$$= \frac{23}{20} : \frac{5}{6} \quad (\text{Bruch als Division})$$

$$= \frac{23}{20} \cdot \frac{6}{5} \quad (\text{mit Kehrwert multipliziert})$$

$$= \frac{23 \cdot 6}{20 \cdot 5} \quad (\text{Zähler mal Zähler, N. mal N.})$$

$$= \frac{138}{100}$$

$$= 1 \frac{38}{100} \quad (\text{mit 2 kürzen})$$

$$= 1 \frac{19}{50}$$

$$\text{Also: } \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 1 \frac{19}{50}$$

Beispiel 3

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{2} \right) = ?$$

Lösung

Zunächst wird die Klammer berechnet, die übrigen Brüche werden stets mitgeführt. Danach wird gemäß der Regel Punktrechnung vor Strichrechnung das Produkt berechnet und schließlich addiert.

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{2} \right) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} \right) \quad (\text{Klammer bearb.}) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{6}{14} + \frac{7}{14} \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{14} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot 13}{4 \cdot 14} \quad (\text{Punktrechnung}) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{13}{56} \\ &= \frac{2 \cdot 56}{3 \cdot 56} + \frac{13 \cdot 3}{56 \cdot 3} \quad (\text{gem. Nenner}) \\ &= \frac{112}{168} + \frac{39}{168} \\ &= \frac{151}{168}\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{2} \right) = \frac{151}{168}$$

1.8 Stammbrüche

Stammbrüche sind Brüche, die den Zähler 1 haben:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \text{ usw.}$$

Im alten Ägypten wurden Teile eines Ganzen als Summe von *verschiedenen* Stammbrüchen ausgedrückt (ausgenommen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$). Beispielsweise wäre altägyptisch:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Nicht erlaubt war dagegen die Zerlegung in gleiche Stammbrüche:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

Wir betrachten nun das Problem, beliebige Brüche in ungleiche Stammbrüche zu zerlegen. Dies werden wir auf zweierlei Weise angehen:

1. Versuch und Irrtum: Wir **erweitern** den Bruch mit verschiedenen Zahlen, und prüfen alle **Zerlegungen** daraufhin, ob sich nach dem **Kürzen** Stammbrüche ergeben.
2. Systematisch: Wir bestimmen den **größten Stammbruch**, der in den Bruch passt. Dies liefert den ersten Summanden der Zerlegung. Wir berechnen den Rest, und suchen wiederum den größten hineinpassenden Stammbruch. Diese Schritte werden wiederholt, bis der Rest selber ein Stammbruch ist. Die Zähler der Reste werden in jedem Schritt kleiner, sodass schließlich stets ein Stammbruch als Rest auftaucht.

(Anmerkung für Fortgeschrittene: Wenn $\frac{1}{p}$ der größte in $\frac{a}{b}$

passende Stammbruch ist, haben wir $\frac{1}{p} < \frac{a}{b} < \frac{1}{p-1}$, und für

den Zähler des Restes $\frac{a}{b} - \frac{1}{p} = \frac{ap-b}{bp}$ gilt: $0 < ap-b < a$.)

Beispiel 1

Zerlege $\frac{2}{5}$ in ungleiche Stammbrüche.

Lösung 1 (Versuch und Irrtum)

1. Erweitern mit 2:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}$$

Betrachte alle Zerlegungen:

$$\frac{4}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \quad (\text{nicht kürzbar})$$

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \quad (\text{gleiche Brüche})$$

$$\frac{4}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \quad (\text{identisch zur ersten Zerlegung})$$

Keine dieser Zerlegung führt zum Ziel. Eine Zerlegung in mehr als zwei Summanden kommt nicht in Frage, da jeweils zwei Brüche gleich wären.

2. Erweitern mit 3:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

Betrachte alle Zerlegungen (mit aufsteigenden ersten Zählern):

$$\frac{6}{15} = \frac{1}{15} + \frac{5}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \quad (\text{in Ordnung})$$

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} \quad (\text{keine Stammbrüche})$$

$$\frac{6}{15} = \frac{3}{15} + \frac{3}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \quad (\text{gleiche Brüche})$$

Die erste Zerlegung führt zum Ziel:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$

Lösung 2 (größter enthaltener Stammbruch)

1. Bestimme den größten enthaltenen Stammbruch:

Wir kürzen den Bruch mit 2 (Zähler):

$$\frac{2}{5} = \frac{2:2}{5:2} = \frac{1}{2,5}$$

Wir ersetzen nun die 2,5 im Nenner durch die nächste größere ganze Zahl, nämlich 3. Dann ist

$$\frac{1}{3}$$

der größte Stammbruch, der in $\frac{2}{5}$ passt.

2. Berechne den Rest:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

Unser Bruch besteht also aus dem Stammbruch $\frac{1}{3}$ und dem Rest

$\frac{1}{15}$, der ebenfalls ein Stammbruch ist. Zusammengefasst:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Es folgt nun ein Bruch, der aus mehr als zwei Stammbrüchen besteht.

Beispiel 2

Zerlege $\frac{4}{5}$ in ungleiche Stammbrüche.

Lösung (größter enthaltener Stammbruch)

1. Bestimme den größten enthaltenen Stammbruch:

Wir kürzen den Bruch mit 4 (Zähler):

$$\frac{4}{5} = \frac{4:4}{5:4} = \frac{1}{1,25}$$

Wir ersetzen nun die 1,25 im Nenner durch die nächste größere ganze Zahl, nämlich 2. Dann ist

$$\frac{1}{2}$$

der größte Stammbruch, der in $\frac{4}{5}$ passt.

2. Berechne den Rest:

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$$

Unser Bruch besteht also aus dem Stammbruch $\frac{1}{2}$ und dem Rest $\frac{3}{10}$, der kein Stammbruch ist:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$$

Wir wenden das Verfahren nun auf den Rest $\frac{3}{10}$ an.

3. Bestimme den größten im Rest enthaltenen Stammbruch:

Wir kürzen den Bruch mit 3 (Zähler):

$$\frac{3}{10} = \frac{3:3}{10:3} = \frac{1}{3,33...}$$

Wir ersetzen nun die 3,33... im Nenner durch die nächste größere ganze Zahl, nämlich 4. Dann ist

$$\frac{1}{4}$$

der größte Stammbruch, der in $\frac{3}{10}$ passt.

2. Berechne den Rest:

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{12}{40} - \frac{10}{40} = \frac{2}{40} = \frac{2:2}{40:2} = \frac{1}{20}$$

Der Rest vom Rest ist also ein Stammbruch.

Wir haben also:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \quad \text{und} \quad \frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

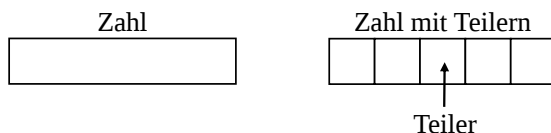
Daraus ergibt sich folgende Zerlegung:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

1.9 Der euklidische Algorithmus

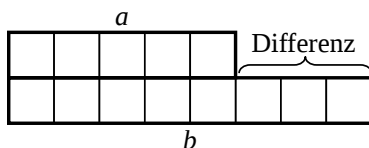
Bei einem Bruch mit großem Nenner und Zähler ist es nicht einfach, einen gemeinsamen Teiler zum Kürzen zu finden. Abhilfe schafft der euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen. Diese Verfahren wird erstmals in den *Elementen* von Euklid beschrieben (ca. 300 v. Chr.).

Zur Veranschaulichung stellen wir uns Zahlen als Streifen vor. Ein Teiler ist ein Teil dieses Streifens. Mehrere dieser Teile füllen den gegebenen Streifen vollständig aus, ohne Rest:



Wir betrachten nun zwei (natürliche) Zahlen a und b , von denen a die kleinere (und b die größere) ist. Anschaulich stellt sich die

Situation folgendermaßen dar (unter Einbeziehung eines gemeinsamen Teilers):



Man sieht, dass ein gemeinsamer Teiler von a und b automatisch auch ein Teiler der Differenz $b - a$ ist. (Umgekehrt ist jeder gemeinsame Teiler von a und $b - a$ auch ein gemeinsamer Teiler von a und b .)

Bei der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von a und b können wir also b durch die kleinere Zahl $b - a$ ersetzen:

$$(a, b) \rightarrow (a, b - a)$$

Wenn b so groß ist, dass a mehrmals in b passt, kann man a so oft subtrahieren, bis der Rest kleiner als a ist. Dies entspricht der Betrachtung des Restes bei der Division $b : a$. Bei der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von a und b können wir also b durch den Rest bei der Division $b : a$ ersetzen:

$$(a, b) \rightarrow (a, \text{Rest bei } b : a)$$

Die ursprünglich größere Zahl b wird also ersetzt durch eine Zahl, die kleiner ist als a .

Wendet man das geschilderte Verfahren nun öfter an, so werden die Zahlen immer kleiner. Schließlich kann der größte gemeinsame Teiler abgelesen werden. Wir betrachten ein Beispiel:

Beispiel

Berechne den größten gemeinsamen Teiler von 21 und 98.

Lösung**Schritt 1**

Ausgangspunkt: (21, 98)

Division mit Rest: $98:21 = 4$ Rest 14

Ersetze 98 durch 14:

$$(21, 98) \rightarrow (21, 14)$$

Schritt 2

Ausgangspunkt: (14, 21)

Division mit Rest: $21:14 = 1$ Rest 7

Ersetze 21 durch 7:

$$(14, 21) \rightarrow (14, 7)$$

Schritt 3

Ausgangspunkt: (7, 14)

Division mit Rest: $14:7 = 2$ Rest 0

Ersetze 14 durch 0:

$$(7, 14) \rightarrow (7, 0)$$

7 ist der größte gemeinsame Teiler von 7 und 14 und auch von 21 und 98.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 1.2

1. Schreibe die folgenden Brüche als Dezimalzahlen:

a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$ g) $\frac{1}{3}$ j) $\frac{81}{100}$

b) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{8}$ h) $\frac{2}{3}$ k) $\frac{132}{100}$

c) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{5}$ i) $\frac{4}{10}$ l) $\frac{547}{10}$

2. Wandle in Brüche um:

a) 0,23 b) 0,71 c) 1,27 d) 0,9 e) 0,127

f) 0,3 g) 12,1 h) 1,9 i) 0,07 j) 0,009

3. Kürze die folgenden Brüche:

a) $\frac{3}{6}$ b) $\frac{36}{48}$ c) $\frac{125}{75}$ d) $\frac{204}{108}$

e) $\frac{104}{120}$ f) $\frac{66}{143}$ g) $\frac{2 \cdot 12}{3}$ h) $\frac{7 \cdot 15 \cdot 36}{21 \cdot 6}$

4. Wandle in Brüche um und kürze, wenn möglich:

a) 0,25 b) 0,75 c) 1,25 d) 0,5 e) 0,125

f) 0,2 g) 0,4 h) 1,3 i) 0,06 j) 0,008

5. Wandle die gemischten Brüche in reine Brüche um:

a) $1\frac{3}{5}$

e) $1\frac{3}{4}$

b) $1\frac{4}{7}$

f) $1\frac{1}{2}$

c) $1\frac{2}{3}$

g) $1\frac{8}{9}$

d) $1\frac{4}{5}$

h) $1\frac{12}{13}$

6. Wandle die gemischten Brüche in reine Brüche um:

a) $3\frac{2}{5}$

g) $2\frac{3}{5}$

b) $2\frac{3}{4}$

h) $3\frac{1}{6}$

c) $2\frac{1}{3}$

i) $4\frac{5}{6}$

d) $5\frac{2}{7}$

j) $5\frac{3}{8}$

e) $3\frac{1}{2}$

k) $3\frac{1}{13}$

f) $2\frac{5}{6}$

l) $7\frac{2}{3}$

7. Betrachte die Tabelle auf der nächsten Seite. Finde jeweils einen geeigneten Bruch mit möglichst kleinem Zähler und Nenner, wobei der Nenner nicht 1 sein darf. Der Bruch soll die *beiden* Eigenschaften haben, die links und oben genannt sind.

	echt	unecht	rein	gemischt
echt				
unecht				
rein				
gemischt				

Aufgaben zu Kapitel 1.3

1. Berechne:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

g) $\frac{2}{13} + \frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

e) $\frac{5}{6} + \frac{2}{13}$

h) $\frac{13}{28} + \frac{16}{33}$

c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

f) $\frac{6}{7} - \frac{5}{9}$

2. Berechne:

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

d) $\frac{7}{4} + \frac{6}{5}$

g) $\frac{7}{3} - \frac{9}{5}$

b) $\frac{3}{2} + \frac{5}{3}$

e) $\frac{5}{2} - \frac{4}{3}$

c) $\frac{4}{5} - \frac{3}{4}$

f) $\frac{8}{7} + \frac{5}{3}$

3. Berechne:

a) $\frac{10}{3} - \frac{9}{7}$

d) $4\frac{3}{5} - 2\frac{1}{4}$

g) $3\frac{2}{5} - 2\frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{8} + \frac{3}{5}$

e) $3\frac{4}{5} - 1\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{7} - \frac{5}{9}$

f) $2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5}$

4. Berechne:

a) $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{7}$

e) $1\frac{4}{5} + 1\frac{6}{7}$

i) $4\frac{5}{6} + 3\frac{2}{5}$

b) $3\frac{1}{2} + 2\frac{5}{6}$

f) $5\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5}$

j) $3\frac{4}{5} - 1\frac{3}{4}$

c) $3\frac{1}{6} + 2\frac{3}{5}$

g) $3\frac{4}{5} + 2\frac{5}{6}$

k) $2\frac{3}{5} + 1\frac{4}{7}$

d) $3\frac{5}{6} - 1\frac{3}{4}$

h) $3\frac{1}{4} + 5\frac{2}{3}$

l) $4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$

5. Berechne:

a) $\frac{9}{13} - \frac{5}{13}$

d) $1 - \frac{8}{17}$

g) $\frac{11}{32} + \frac{23}{8}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

e) $3 - \frac{4}{15}$

h) $\frac{11}{35} + \frac{28}{35}$

c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{12}$

f) $\frac{13}{14} - \frac{5}{7}$

6. Berechne:

a) $\frac{4}{7} + \frac{3}{5}$

d) $\frac{9}{5} + \frac{7}{5}$

g) $\frac{11}{3} - \frac{13}{5}$

b) $\frac{5}{3} + \frac{6}{5}$

e) $\frac{8}{3} - \frac{5}{4}$

c) $\frac{6}{7} - \frac{6}{8}$

f) $\frac{9}{8} + \frac{10}{7}$

7. Berechne (wenn möglich, vorher **kürzen**):

a) $1\frac{3}{4} - \frac{9}{7}$

d) $7\frac{3}{5} - 3\frac{1}{4}$

g) $4\frac{6}{15} - 3\frac{15}{20}$

b) $\frac{3}{8} + \frac{7}{5}$

e) $4\frac{8}{10} - 2\frac{6}{8}$

c) $\frac{8}{14} - \frac{10}{18}$

f) $5\frac{12}{16} + 2\frac{4}{5}$

8. Berechne (wenn möglich, vorher **kürzen**):

a) $1\frac{4}{12} + 3\frac{6}{21}$

e) $2\frac{7}{12} + 1\frac{4}{7}$

i) $2\frac{5}{6} + 5\frac{2}{5}$

b) $3\frac{2}{6} + 4\frac{7}{8}$

f) $6\frac{1}{11} + 3\frac{5}{9}$

j) $4\frac{13}{14} - 1\frac{9}{17}$

c) $3\frac{5}{30} + 2\frac{21}{35}$

g) $5\frac{4}{15} - 2\frac{3}{13}$

k) $3\frac{2}{5} + 1\frac{3}{7}$

d) $5\frac{4}{6} - 3\frac{9}{12}$

h) $1\frac{6}{24} + 7\frac{18}{27}$

l) $7\frac{4}{7} - 4\frac{8}{9}$

Aufgaben zu Kapitel 1.4

1. Berechne:

a) $8 \cdot \frac{1}{8}$

d) $3 \cdot \frac{2}{3}$

g) $8 \cdot \frac{3}{14}$

b) $5 \cdot \frac{4}{5}$

e) $5 \cdot \frac{2}{3}$

h) $11 \cdot \frac{9}{5}$

c) $2 \cdot \frac{7}{2}$

f) $4 \cdot \frac{5}{7}$

i) $12 \cdot \frac{5}{120}$

2. Berechne:

a) $\frac{8}{3} : 8$

d) $\frac{3}{2} : 3$

g) $\frac{3}{14} : 8$

b) $\frac{5}{4} : 5$

e) $\frac{2}{3} : 5$

h) $\frac{9}{5} : 11$

c) $\frac{2}{7} : 2$

f) $\frac{5}{7} : 4$

i) $\frac{110}{5} : 12$

Aufgaben zu Kapitel 1.5

1. Berechne:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7}$

c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$

d) $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5}$

e) $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3}$

f) $\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{3}$

g) $\frac{7}{3} \cdot \frac{8}{5}$

h) $\frac{9}{12} \cdot \frac{8}{16}$

2. Berechne:

a) $\frac{10}{3} \cdot \frac{9}{7}$

b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9}$

d) $4\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$

e) $3\frac{4}{5} \cdot 1\frac{3}{4}$ f) $2\frac{3}{4} \cdot 3\frac{4}{5}$ g) $3\frac{2}{5} \cdot 2\frac{3}{4}$ h) $5\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{5}$

3. Berechne:

a) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{7}$ b) $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{5}{6}$ c) $3\frac{1}{6} \cdot 2\frac{3}{5}$ d) $3\frac{5}{6} \cdot 1\frac{3}{4}$

e) $1\frac{4}{5} \cdot 1\frac{6}{7}$ f) $5\frac{1}{3} \cdot 4\frac{3}{5}$ g) $3\frac{4}{5} \cdot 2\frac{5}{6}$ h) $3\frac{1}{4} \cdot 5\frac{2}{3}$

i) $4\frac{5}{6} \cdot 3\frac{2}{5}$ j) $3\frac{4}{5} \cdot 1\frac{3}{4}$ k) $2\frac{3}{5} \cdot 1\frac{4}{7}$ l) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

4. Berechne (kürze die Brüche vorher, wenn möglich):

a) $\frac{3}{8} \cdot 5$ d) $6 \cdot \frac{5}{7}$ g) $\frac{6}{5} \cdot 12$

b) $3 \cdot \frac{1}{3}$ e) $8 \cdot \frac{12}{36}$ h) $4 \cdot \frac{5}{4}$

c) $\frac{8}{14} \cdot 14$ f) $13 \cdot \frac{3}{17}$ i) $6 \cdot \frac{25}{70}$

5. Berechne (kürze die Brüche vorher, wenn möglich):

a) $\frac{4}{15} \cdot \frac{6}{4}$ b) $\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{14}$ c) $\frac{12}{15} \cdot \frac{21}{28}$ d) $\frac{8}{5} \cdot \frac{7}{6}$

e) $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5}$ f) $\frac{11}{12} \cdot \frac{8}{6}$ g) $\frac{8}{3} \cdot \frac{8}{7}$ h) $\frac{7}{11} \cdot \frac{12}{21}$

6. Berechne:

a) $2\frac{1}{2} \cdot 11\frac{1}{8}$ e) $16\frac{1}{4} \cdot 2\frac{11}{15}$ i) $4 \cdot 6\frac{1}{2}$

- b) $8\frac{9}{10} \cdot 7\frac{2}{7}$ f) $14\frac{1}{2} \cdot 13\frac{2}{5}$ j) $3\frac{1}{3} \cdot 16\frac{7}{8}$
 c) $4\frac{1}{10} \cdot 11\frac{10}{15}$ g) $12\frac{5}{8} \cdot 13\frac{1}{2}$ k) $12\frac{3}{12} \cdot 3\frac{4}{5}$
 d) $15\frac{1}{6} \cdot 13\frac{1}{3}$ h) $8\frac{6}{7} \cdot 5\frac{1}{8}$ l) $2\frac{3}{11} \cdot 8\frac{5}{6}$

Aufgaben zu Kapitel 1.6

1. Berechne:

- a) $\frac{3}{5} : \frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2} : \frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{5} : \frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{4} : \frac{6}{5}$
 e) $\frac{5}{2} : \frac{4}{3}$ f) $\frac{8}{9} : \frac{5}{3}$ g) $\frac{7}{3} : \frac{8}{5}$ h) $\frac{9}{12} : \frac{8}{16}$

2. Berechne:

- a) $\frac{10}{3} : \frac{9}{7}$ b) $\frac{7}{8} : \frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{7} : \frac{5}{9}$ d) $4\frac{3}{5} : 2\frac{1}{4}$
 e) $3\frac{4}{5} : 1\frac{3}{4}$ f) $2\frac{3}{4} : 3\frac{4}{5}$ g) $3\frac{2}{5} : 2\frac{3}{4}$ h) $5\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$

3. Berechne:

- a) $2\frac{1}{3} : 1\frac{2}{7}$ e) $1\frac{4}{5} : 1\frac{6}{7}$ i) $4\frac{5}{6} : 3\frac{2}{5}$
 b) $3\frac{1}{2} : 2\frac{5}{6}$ f) $5\frac{1}{3} : 4\frac{3}{5}$ j) $3\frac{4}{5} : 2\frac{3}{4}$
 c) $3\frac{1}{6} : 2\frac{3}{5}$ g) $3\frac{4}{5} : 2\frac{5}{6}$ k) $2\frac{3}{5} : 1\frac{4}{7}$
 d) $3\frac{5}{6} : 1\frac{3}{4}$ h) $3\frac{1}{4} : 5\frac{2}{3}$ l) $4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{4}$

Aufgaben zu Kapitel 1.7

1. Berechne, und wandle die Ergebnisse in Dezimalbrüche um:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

e) $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

f) $\frac{7}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45}\right)$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

g) $\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right)$

d) $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7}$

h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

2. Berechne:

a) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{7}{8} + \frac{5}{3}\right)$

c) $\frac{1}{\frac{11}{6} + \frac{3}{4}}$

b) $\left(\frac{7}{5} + 1\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

d) $\frac{7 + \frac{2}{5}}{2 + \frac{3}{4}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)$

3. Berechne und wandle die Ergebnisse in Dezimalbrüche um:

a) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right)$

d) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + \frac{10}{5}\right)$

b) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\right)$

e) $\frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{6}{5} + \frac{2}{\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5}}\right)$

$$c) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4} \right)$$

$$f) \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{8}{\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}} \right)$$

4. Berechne:

$$a) \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}$$

$$e) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{7}{4}$$

$$b) 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}$$

$$f) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{4} \right)$$

$$c) \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$$

$$g) \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{8}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$$

$$d) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4}$$

$$h) \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4} \right) \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$$

5. Berechne:

$$a) \frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{5}{4}}$$

$$c) \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

$$b) \frac{\frac{2}{3} + \frac{11}{4}}{\frac{9}{5} + \frac{4}{7}}$$

$$d) \frac{1}{\frac{3}{\frac{5}{4}}}$$

Aufgaben zu Kapitel 1.8

1. Zerlege $\frac{3}{5}$ in eine Summe von verschiedenen Stammbrüchen:

2. Zerlege die Brüche in eine Summe von verschiedenen Stammbrüchen:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{6}$

3. Zerlege die Brüche in eine Summe von verschiedenen Stammbrüchen:

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{4}{7}$

d) $\frac{5}{7}$

e) $\frac{6}{7}$

4. Zerlege die Brüche in eine Summe von verschiedenen Stammbrüchen:

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{7}{8}$

5. Zerlege die Brüche in eine Summe von verschiedenen Stammbrüchen:

a) $\frac{2}{9}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{9}$

d) $\frac{7}{9}$

e) $\frac{8}{9}$

Aufgaben zu Kapitel 1.9

1. Berechne den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von: 24 und 36.

2. Berechne den ggT von: 48 und 78.

3. Berechne den ggT von: 165 und 187.

4. Berechne den ggT von: 184 und 391.

5. Berechne den ggT von: 192 und 408.

6. Berechne den ggT von: 2491 und 2867.

7. Berechne den ggT von: 899 und 1147.

2. Der Dreisatz

2.1 Einführung

Mit einem Dreisatz lassen sich viele mathematische Probleme aus dem Alltag und dem kaufmännischen Rechnen lösen. Seit Jahrhunderten bezeichnen europäische Kaufleute den Dreisatz auch als *Goldene Regel*. In der Tat ist der Dreisatz gewissermaßen die Weltformel des kaufmännischen Rechnens und des Alltags. Bei der Prozent- und Zinsrechnung werden wir den Dreisatz benutzen und dadurch weitgehend auf Formeln verzichten können.

Gerade Dreisätze

Ein typisches Alltagsproblem, das man mit einem Dreisatz lösen kann, ist folgendes:

Wenn 4 Äpfel 2 € kosten, was kosten 7 Äpfel?

Es sind drei Zahlen gegeben, oder wie man früher sagte, *gesetzt*. Dies ist einer der zwei Gründe für die Bezeichnung *Dreisatz*. Der andere ist der, dass die Aufgabe in drei einfache Sätze (Schritte) zerlegt wird, die mit gesundem Menschenverstand bewältigt werden können:

- 4 Äpfel kosten 2 €.
- **1 Apfel** kostet wie viel?
- 7 Äpfel kosten wie viel?

Bei der Aufgabe sind zwar drei Zahlen gegeben, es sind aber nur zwei verschiedene Arten von Größen: Anzahl der Äpfel und die Anzahl der Euros. Steigt die Anzahl der Äpfel (kauft man mehr Äpfel), so steigt auch die Anzahl der zu zahlenden Euros (man muss auch mehr Euros zahlen):

mehr Äpfel → mehr Euros

In einer solchen Situation sagt man, dass Äpfel und Euros in

einem **geraden** oder **proportionalen** Verhältnis stehen, und spricht von einem geraden oder proportionalen Dreisatz. Übrigens kosten zweimal so viele Äpfel auch zweimal so viel, dreimal so viele Äpfel auch dreimal so viel.

Wir werden Dreisätze auf zwei Arten lösen:

- Ausführlich, durch die oben dargestellte Zerlegung in drei Schritte.
- Kurz und schematisch, mithilfe eines Bruches, der die Rechenschritte des ausführlichen Weges zusammenfasst.

Ungerade Dreisätze

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

Wenn 2 Arbeiter 5 Tage benötigen, wie viele Tage benötigen 3 Arbeiter (für dieselbe Arbeit)?

Hier stehen die Größen nicht in einem geraden Verhältnis, denn:

mehr Arbeiter → **weniger** Tage

Es liegt ein **ungerades** oder **umgekehrt proportionales** Verhältnis vor. Man spricht von einem ungeraden oder umgekehrt proportionalen Dreisatz. In den Schulen hat sich leider das irreführende Adjektiv *antiproportional* eingebürgert. Die Vorsilbe **anti** ist in der Mathematik stets mit einem Minuszeichen verknüpft, was bei einem Dreisatz nicht der Fall ist.

Zusammengesetzte Dreisätze

Es gibt auch Situationen, in denen mehr als drei Zahlen eine Rolle spielen, zum Beispiel:

2 Angestellte erledigen 7 Aufträge in 42 Stunden. Wie lange benötigen 3 Angestellte für 5 Aufträge?

Dies ist ein *Fünfsatz*, da fünf Zahlen gegeben sind. Da man solche Probleme prinzipiell in Dreisätze zerlegen kann, nennt man sie auch *zusammengesetzte Dreisätze*.

Zeitungrechnung

In den letzten beiden Beispielen kommen Zeitangaben vor. Wir benutzen heute immer noch die altbabylonischen Zeiteinheiten (Stunden, Minuten Sekunden), die auf der Zahl 60 beruhen und nicht mit unserem (indischen) Dezimalsystem kompatibel sind. Das Rechnen mit diesen Zeitangaben bereitet vielen Schwierigkeiten. Daher wird das Thema der Zeitangaben und der Zeitungrechnung vorweg behandelt. Der kundige Leser kann diesen Abschnitt überspringen.

Überblick

Wir werden also folgende Themen betrachten:

- Zeitungrechnung
- Gerader Dreisatz
- Ungerader Dreisatz
- Einfacher Dreisatz (gerade/ungerade)
- Zusammengesetzter Dreisatz

2.2 Zeitungrechnung

Wozu Zeitungrechnung? Betrachten wir eine Autofahrt, bei der 300 km in 3 Stunden und 15 Minuten bewältigt werden. Zur Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit müssen wir herausfinden, welche Strecke in *einer* Stunde zurückgelegt wird, also 300 km durch die Fahrtdauer dividieren. Daher fassen wir die 3 Stunden und 15 Minuten zu einer einzigen Zeitangabe zusammen: 3,25 Stunden. Nun können wir dividieren:

$$300 \text{ km} : 3,25 \text{ Stunden} \approx 92 \text{ km/h}$$

Auch die umgekehrte Situation kommt vor. Wenn man berechnet hat, dass eine Fahrt 5,7 Stunden gedauert hat, ist es wünschenswert, die Zeitangabe in die übliche Form zu bringen: 5 Stunden und 42 Minuten.

Zeiteinheiten

Das Kalenderjahr ist keine feststehende Größe (ein normales Jahr hat 365 Tage, ein Schaltjahr 366 Tage), scheidet also als Einheit aus. Ebenso wenig ist ein Monat eine feststehende Größe. Es bleiben also folgende Zeiteinheiten:

1 Woche = 7 Tage

1 Tag = 24 Stunden

1 Stunde = 60 Minuten

1 Minute = 60 Sekunden

Die Zahl 7 hängt mit den vier Mondphasen zusammen, die in 28 Tagen einmal durchlaufen werden (Vollmond, abnehmender Halbmond, Neumond, zunehmender Halbmond). Vor mehr als 4000 Jahren haben die Babylonier und Ägypter bereits 7 Tage zu einer Woche zusammengefasst.

Die Zahl 24 ist das Doppelte von 12, einem Dutzend. Ein Tag besteht aus der Nacht und dem lichten Tag, die in jeweils 12 Stunden eingeteilt wurden. Die Zahl 12 spielte in vielen Kulturen eine besondere Rolle; in vielen Sprachen gibt es daher eine weitere Bezeichnung für sie (Dutzend).

Die Zahl 60 ist ein Überbleibsel des babylonischen Zahlensystems, das auf der Zahl 60 beruht. Unser Dezimalsystem (das aus Indien stammt) hat die 10 als Grundzahl.

Die Bezeichnungen Minute und Sekunde sind lateinischen Ursprungs und gehen zurück auf das Werk *Almagest* (*Megiste Syntaxis*) von Claudius Ptolemäus (ca. 100-200 n. Chr.):

Pars **minuta** prima (*erstes vermindertes Teil*) → Minute

Pars minuta **secunda** (*zweites vermindertes Teil*) → Sekunde

Im Rahmen der französischen Revolution (Beginn 14. Juli 1789) wurde eine hochkarätige Expertenkommission gebildet, die wissenschaftlich fundierte Einheiten festlegen sollte. Unser Meter

ist ein Ergebnis dieser Kommission: 1 Meter ist der zehnmillionste Teile der Länge des Abschnitts des Längengrades, der vom Nordpol über Paris bis zum Äquator reicht. Dieser Viertel Längengrad misst also 10.000 km. Die ebenfalls eingeführten neuen Zeiteinheiten, die an das Zehnersystem angepasst waren, fanden wenig Gegenliebe in der Bevölkerung. Sie wurden von Napoleon I. wieder abgeschafft.

Zur Expertenkommission gehörten beispielsweise Antoine de Lavoisier (Vater der modernen Chemie) und Joseph Fourier, dessen Fourieranalyse etwa im mp3-Format angewendet wird.

Abkürzungen für die Zeiteinheiten

Woche = Wo.

Tag = d [engl. *day*, lat. *dies*]

Stunde = h [engl. *hour*, lat. *hora*]

Minute = min [engl. *minute*, lat. *minuta*]

Sekunde = s [engl. *second*, lat. *secunda*]

Umrechnung der Zeiteinheiten

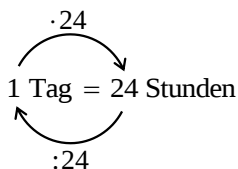
Wenn wir beispielsweise 5 Tage in Stunden umrechnen möchten, halten wir zunächst fest, dass

$$1 \text{ Tag} = 24 \text{ Stunden}$$

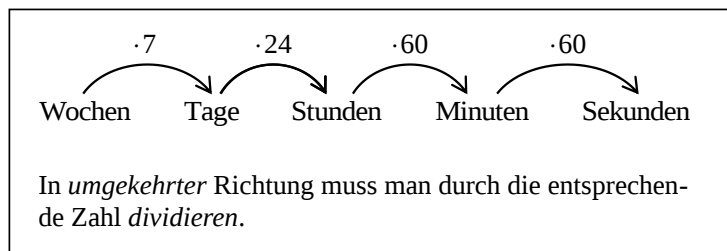
Dann sind 5 Tage fünfmal so viele Stunden:

$$5 \text{ Tage} = 5 \cdot 24 \text{ Stunden}$$

Um von der Anzahl der Tage auf die Anzahl der Stunden zu kommen, muss man also mit 24 multiplizieren. Wenn man umgekehrt von den Stunden zu Tagen kommen möchte, muss man durch 24 dividieren:



Diese Überlegungen gelten auch für die anderen Einheiten, und lassen sich in der folgenden Übersicht zusammenfassen:



Man kann nun leicht ablesen, was beispielsweise 0,7 Stunden in Minuten sind:

$$\begin{aligned} 0,7 \text{ Stunden} &= 0,7 \cdot 60 \text{ Minuten} \\ &= 42 \text{ Minuten} \end{aligned}$$

Es folgen nun mehrere Beispiele, die alle in der Praxis auftauchenden Fälle abdecken.

Beispiel 1

Wandle **5,3 Minuten** in die übliche Form um (Minuten und Sekunden).

Lösung 1 (mit ausführlichen Erläuterungen)

In 5,3 min stecken 5 ganze Minuten. Der Rest von 0,3 min ist eine angebrochene Minute, die man üblicherweise in Sekunden ausdrückt.

$$\begin{aligned} 5,3 \text{ min} &= 5 \text{ min} + 0,3 \text{ min} && \text{(Zerlegung, ganze Minuten abgespaltet)} \\ &= 5 \text{ min} + 0,3 \cdot 60 \text{ s} && \text{(angebrochene Minute in Sekunden umgewandelt)} \\ &= 5 \text{ min} + 18 \text{ s} \end{aligned}$$

Also: $5,3 \text{ min} = 5 \text{ min}, 18 \text{ s}$

Lösung 2 (kurz)

$$\begin{aligned} 5,3 \text{ min} &= 5 \text{ min} + 0,3 \text{ min} && \text{(zerlegt)} \\ &= 5 \text{ min} + 0,3 \cdot 60 \text{ s} && \text{(umgewandelt)} \\ &= 5 \text{ min} + 18 \text{ s} \end{aligned}$$

Also: $5,3 \text{ min} = 5 \text{ min}, 18 \text{ s}$

Beispiel 2

Wandle **4,72 Stunden** in die übliche Form um.

Lösung

$$\begin{aligned} 4,72 \text{ h} &= 4 \text{ h} + 0,72 \text{ h} && \text{(zerlegt)} \\ &= 4 \text{ h} + 0,72 \cdot 60 \text{ min} && \text{(umgewandelt)} \\ &= 4 \text{ h} + 43,2 \text{ min} \\ &= 4 \text{ h} + 43 \text{ min} + 0,2 \text{ min} && \text{(zerlegt)} \\ &= 4 \text{ h} + 43 \text{ min} + 0,2 \cdot 60 \text{ s} && \text{(umgewandelt)} \\ &= 4 \text{ h} + 43 \text{ min} + 12 \text{ s} \end{aligned}$$

Also: $4,72 \text{ h} = 4 \text{ h}, 43 \text{ min}, 12 \text{ s}$

Beispiel 3

Bringe **800 min** in die übliche Form.

Lösung

Wandle zunächst die 800 min in Stunden um; dann wie gehabt.

$$800 \text{ min} = (800 : 60) \text{ h} = 13,333... \text{ h}$$

Nun:

$$\begin{aligned}13,333\dots h &= 13 h + 0,333\dots h && \text{(zerlegt)} \\&= 13 h + 0,333\dots \cdot 60 \text{ min} && \text{(umgewandelt)} \\&= 13 h + 20 \text{ min}\end{aligned}$$

$$\text{Also: } 800 \text{ min} = 13 h + 20 \text{ min}$$

Beispiel 4

Wandle 3 Stunden, 15 Minuten in eine Stundenangabe um.

Lösung

$$\begin{aligned}3 h \text{ und } 15 \text{ min} &= 3 h + 15 \text{ min} && \text{(15 min umwandeln in h)} \\&= 3 h + (15:60) h \\&= 3 h + 0,25 h && \text{(zusammenfassen)} \\&= 3,25 h\end{aligned}$$

$$\text{Also: } 3 h, 15 \text{ min} = 3,25 h$$

Beispiel 5

Wandle 2 Tage, 8 Stunden, 12 Minuten in Tage um.

Lösung

$$\begin{aligned}2 d, 8 h, 12 \text{ min} &= 2 d + 8 h + 12 \text{ min} && \text{(12 min umw. in h)} \\&= 2 d + 8 h + (12:60) h \\&= 2 d + 8 h + 0,2 h && \text{(zusammenfassen)} \\&= 2 d + 8,2 h && \text{(8,2 h umw. in d)} \\&= 2 d + (8,2:24) d \\&= 2 d + 0,341666\dots d && \text{(zusammenfassen)} \\&= 2,341666\dots d\end{aligned}$$

$$\text{Also: } 2 d, 8 h, 12 \text{ min} = 2,341666\dots d \approx 2,3417 d$$

Anmerkung 1

Bei Beispiel 5 darf man das Endergebnis nicht allzu großzügig *runden*, da sonst Minutenzahl oder sogar Stundenzahl nicht richtig enthalten ist. Nimmt man etwa $2\text{ d}, 8\text{ h}, 12\text{ min} \approx 2,34\text{ d}$, so ergibt die Rückrechnung eine Abweichung von 2 Minuten:

$$2,34\text{ d} \approx 2\text{ d}, 8\text{ h}, \mathbf{10\text{ min}}$$

Anmerkung 2

Bei den letzten drei Beispielen wäre es praktischer, die *Divisionen* als *Brüche* zu schreiben. Dadurch erspart man sich die Klammer, die wegen der danach stehenden Einheiten notwendig ist:

$$(12:60)\text{ h} \rightarrow \frac{12}{60}\text{ h}$$

Ferner kann man den Bruch kürzen und dann einfach berechnen:

$$\frac{12}{60} = \frac{12:6}{60:6} = \frac{2}{10} = 0,2$$

2.3 Gerader Dreisatz

Bei einem geraden (proportionalen) Dreisatz stehen sich zwei Größen gegenüber, von denen jede steigt, wenn die andere steigt. Zum Beispiel:

Anzahl der Äpfel	und	Preis
<u>Mehr</u> Äpfel	kosten	<u>mehr</u> Geld

Man sagt dann, dass die Größen in einem **geraden** (proportionalen) Verhältnis zueinander stehen.

Alle geraden Dreisätze beruhen auf einem gemeinsamen Berechnungsschema.

Wir betrachten nun zunächst ein einfaches Beispiel zum geraden Dreisatz. Drei Lösungswege werden vorgeführt:

1. Eine ausführliche Lösung mit zusätzlichen Erläuterungen
2. Diese ausführliche Lösung, aber ohne die zusätzlichen Erläuterungen
3. Eine kurz gefasste Lösung

Anschließend betrachten wir ein komplexeres Beispiel, in dem auch Zeitemrechnungen durchzuführen sind.

Beispiel 1, Version 1

4 Äpfel kosten 2,40 Euro. Was kosten 10 Äpfel?

Lösung (ausführlich und mit zusätzlichen Erläuterungen)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

Wir überführen den Fließtext der Aufgabenstellung in ein übersichtliches Schema:

$$\begin{array}{rcl} 4 \text{ Äpfel} & \rightarrow & 2,40 \text{ Euro} \\ 10 \text{ Äpfel} & \rightarrow & ? \end{array}$$

Es empfiehlt sich, dies möglichst anschaulich zu lesen als „4 Äpfel **kosten** 2,40 Euro. 10 Äpfel **kosten** wie viel?“.

Erläuterungen:

1. Beim Lösen einer Aufgabe startet man mit den gegebenen Daten und kommt dann zur gesuchten Größe. Da wir von links nach rechts schreiben, sollte die **gesuchte Größe** immer **ganz rechts** stehen. Im Beispiel stehen also links die gegebenen Anzahlen der Äpfel und rechts die Euro-Beträge, von denen einer ja gesucht ist.

2. Das Ziel der schematischen Schreibweise ist es, die (gesamte) Situation schnell zu erfassen und zu überblicken. Es soll einem das ständige Herumsuchen im Aufgabentext erspart werden. Daher ist es sehr wichtig, die **Einheiten** (Äpfel, Euro) ins Schema zu übernehmen, und nicht nur die Zahlen. Aus dem verkürzten (und mehrdeutigen) Schema

$$\begin{array}{rcl} 4 & \rightarrow & 2,40 \\ 10 & \rightarrow & ? \end{array}$$

allein könnten weder Albert Einstein noch Stephen Hawking ein verbindliches Ergebnis berechnen.

2. Lösung der Aufgabe in drei Schritten (Sätzen)

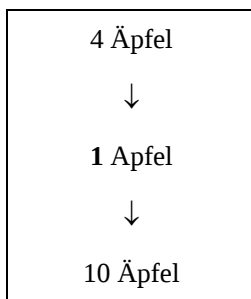
$$4 \text{ Äpfel} \rightarrow 2,40 \text{ Euro}$$

$$1 \text{ Apfel} \rightarrow \frac{2,40 \text{ Euro}}{4} = 0,60 \text{ Euro}$$

$$10 \text{ Äpfel} \rightarrow 10 \cdot 0,60 \text{ Euro} = 6 \text{ Euro}$$

Erläuterungen:

1. Ausgangspunkt sind die 4 Äpfel. Ziel sind die 10 Äpfel. Die entscheidende Idee ist die Frage, was **ein** Apfel kostet. Die Strategie ist in der nachstehenden Übersicht dargestellt:



2. Die vier Äpfel verteilen sich auf die 2,40 Euro. Wir müssen also 2,40 Euro durch vier teilen.

Wenn einem nicht klar ist, welche Rechenoperation zu wählen ist, kann die Methode der **einfachen Zahlen** helfen: Man ersetzt die (vielen) 4 Äpfel durch die (wenigen) 2 Äpfel. Dann erkennt man leichter, dass 1 Apfel nur die Hälfte, nämlich 1,20 Euro kosten würde. Es muss also durch 2 **dividiert** werden. Entsprechend muss im vorliegenden Fall also durch 4 dividiert werden.

3. Wenn ein Apfel 0,60 Euro kostet, dann kosten 10 Äpfel auch zehnmal so viel, also $0,60 \text{ Euro} \cdot 10 = 6 \text{ Euro}$.

3. Antwort

10 Äpfel kosten 6,- Euro.

Erläuterungen:

1. Die Aufgabenstellung ist sprachlich formuliert. Das Ergebnis der Aufgabe sollte daher auch in einem Antwortsatz zusammengefasst werden. Dies ist nicht nur eine stilistische Frage, sondern auch ein Gebot der Höflichkeit.

2. Der gesamte Lösungsweg ist in drei Punkte aufgeteilt worden. Eine klare Strukturierung trägt immer zur Verständlichkeit bei und erleichtert das Lernen.

Beispiel 1, Version 2

4 Äpfel kosten 2,40 Euro. Was kosten 10 Äpfel?

Lösung (ausführlich, aber ohne zusätzliche Erläuterungen)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ Äpfel} & \rightarrow 2,40 \text{ Euro} \\ 10 \text{ Äpfel} & \rightarrow ? \end{array}$$

2. Lösen des Dreisatzes

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ Äpfel} & \rightarrow 2,40 \text{ Euro} \\ 1 \text{ Apfel} & \rightarrow \frac{2,40 \text{ Euro}}{4} = 0,60 \text{ Euro} \\ 10 \text{ Äpfel} & \rightarrow 10 \cdot 0,60 \text{ Euro} = 6 \text{ Euro} \end{array}$$

3. Antwort

10 Äpfel kosten 6,- Euro.

Schließlich führen wir noch die kurze Lösungsversion vor. Bei ihr wird die Aufgabenstellung schematisch hingeschrieben. Dann werden die Rechenschritte des ausführlichen Lösungsweges in einem einzigen Bruch zusammengefasst:

1. Rechenschritt, Division durch 4:

$$\frac{2,40 \text{ Euro}}{4}$$

2. Rechenschritt, Multiplikation mit 10:

$$10 \cdot \frac{2,40 \text{ Euro}}{4}$$

Nach den Regeln der Bruchrechnung schlagen wir den Faktor 10 zum Zähler:

$$10 \cdot \frac{2,40 \text{ Euro}}{4} = \frac{10 \cdot 2,40 \text{ Euro}}{4}$$

Schließlich kann man noch die Einheit aus dem Bruch nach hinten ziehen:

$$\frac{10 \cdot 2,40 \text{ Euro}}{4} = \frac{10 \cdot 2,40}{4} \text{ Euro}$$

Die Zahlen im Bruch sind weitgehend wie in der Aufgabenstellung angeordnet:

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ Äpfel} & \rightarrow 2,40 \text{ Euro} \\ 10 \text{ Äpfel} & \rightarrow ? \end{array}$$

Im Bruch sind jedoch 4 und 10 *vertauscht*. (Beim ungeraden Dreisatz werden wir sehen, dass dort keine Vertauschung vorzunehmen ist.)

Beispiel 1, Version 3

4 Äpfel kosten 2,40 Euro. Was kosten 10 Äpfel?

Lösung (kurz)

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ Äpfel} & \rightarrow 2,40 \text{ Euro} \\ 10 \text{ Äpfel} & \rightarrow x \\ x = \frac{10 \cdot 2,40}{4} \text{ Euro} & = 6 \text{ Euro} \end{array}$$

Antwort

10 Äpfel kosten 6,- Euro.

Anmerkung 1

Die in dem Bruch der Kurzlösung auftretenden Größen können auch mit ihren Einheit geschrieben. Die Einheit *Äpfel* fällt durch kürzen weg, es bleibt als Einheit lediglich *Euro* übrig:

$$\frac{10 \text{ Äpfel} \cdot 2,40 \text{ Euro}}{4 \text{ Äpfel}} = \frac{10 \cdot 2,40}{4} \text{ Euro}$$

Anmerkung 2

Der gesuchte Preis von 10 Äpfeln ist mit x bezeichnet worden (anstelle des Fragezeichens).

Beispiel 2

Gegeben: Fahrt Köln – Hamburg

* Strecke: 425 km

* Fahrzeit: 4 h, 18 min

Fahrt Köln – Leipzig (gleiche Geschwindigkeit.)

* Strecke: 515 km

Gesucht: Fahrzeit für die Fahrt Köln – Leipzig

Lösung**1. Zeitumrechnung**

Wandle 4 h, 18 min in Stunden um:

$$\begin{aligned} 4 \text{ h, } 18 \text{ min} &= 4 \text{ h} + 18 \text{ min} \\ &= 4 \text{ h} + \frac{18}{60} \text{ h} \\ &= 4 \text{ h} + 0,3 \text{ h} \\ &= 4,3 \text{ h} \end{aligned}$$

Also:

$$4 \text{ h, } 18 \text{ min} = 4,3 \text{ h}$$

2. Die Fahrzeit mit einem Dreisatz berechnen

Wir lösen nun den Dreisatz

$$\begin{array}{ll} 425 \text{ km} & \rightarrow 4,3 \text{ h} \\ 515 \text{ km} & \rightarrow ? \end{array}$$

ausführlich, in drei Schritten:

$$\begin{array}{ll} 425 \text{ km} & \rightarrow 4,3 \text{ h} \\ 1 \text{ km} & \rightarrow \frac{4,3 \text{ h}}{425} \approx 0,010117647 \text{ h} \\ 515 \text{ km} & \rightarrow 515 \cdot 0,010117647 \text{ h} = 5,210588205 \text{ h} \end{array}$$

3. Zeitumrechnung

Wir bringen 5,210588205 h in die übliche Form:

$$\begin{aligned} 5,210588205 \text{ h} &= 5 \text{ h} + 0,210588205 \text{ h} && \text{(zerlegt)} \\ &= 5 \text{ h} + 0,210588205 \cdot 60 \text{ min} && \text{(umgerechnet)} \\ &= 5 \text{ h} + 12,6352923 \text{ min} \\ &\approx 5 \text{ h} + 13 \text{ min} \end{aligned}$$

Antwort

Die Fahrt von Köln nach Leipzig dauert ca. 5 Stunden und 13 Minuten.

2.4 Ungerader Dreisatz

Beim ungeraden Dreisatz stehen sich zwei Größen gegenüber, von denen eine fällt, wenn die andere steigt (und umgekehrt). Zum Beispiel:

Anzahl der Arbeiter	und	Anzahl der nötigen Stunden
<u>Mehr</u> Arbeiter	brauchen	<u>weniger</u> Stunden

Man sagt dann, dass die Größen in einem **ungeraden** (umgekehrt proportionalen) Verhältnis zueinander stehen.

Alle ungeraden Dreisätze beruhen auf einem gemeinsamen Berechnungsschema. Dieses ist aber **anders** als beim geraden Dreisatz.

Wir betrachten ein einfaches Beispiel zum ungeraden Dreisatz. Drei Lösungswege werden vorgeführt:

1. Eine ausführliche Lösung mit zusätzlichen Erläuterungen
2. Diese ausführliche Lösung, aber ohne die zusätzlichen Erläuterungen
3. Eine kurz gefasste Lösung

Der ungerade Dreisatz unterscheidet sich in der Grundidee nicht vom geraden Dreisatz.

Beispiel, Version 1

3 Angestellte zusammen erledigen eine Arbeit in 8 Stunden. Wie lange brauchen 4 Angestellte für die Arbeit?

Lösung (ausführlich und mit zusätzlichen Erläuterungen)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

Wir überführen den Fließtext der Aufgabenstellung in ein übersichtliches Schema:

3 Ang. → 8 Stunden

4 Ang. → ?

Es empfiehlt sich, dies möglichst anschaulich zu lesen als „3 Angestellte **benötigen** 8 Stunden. 4 Angestellte **benötigen** wie viel?“

Erläuterungen:

1. Beim Lösen einer Aufgabe startet man mit den gegebenen Daten und kommt dann zur gesuchten Größe. Da wir von links nach rechts schreiben, sollte die **gesuchte Größe** immer **ganz rechts** stehen. Im Beispiel stehen also links die gegebenen Anzahlen der Angestellten und rechts die Anzahl der Stunden, von denen eine ja gesucht ist.

2. Das Ziel der schematischen Schreibweise ist es, die (gesamte) Situation schnell zu erfassen und zu überblicken. Es soll einem das ständige Herumsuchen im Aufgabentext erspart werden. Daher ist es sehr wichtig, die **Einheiten** (Angestellte, Stunden) ins Schema zu übernehmen, und nicht nur die Zahlen. Aus dem verkürzten (und mehrdeutigen) Schema

$$\begin{array}{rcl} 3 & \rightarrow & 8 \\ 4 & \rightarrow & ? \end{array}$$

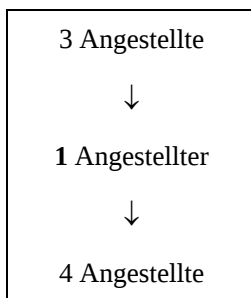
allein könnte selbst ein Albert Einstein nichts schließen.

2. Lösung der Aufgabe in drei Schritten (Sätzen)

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ Ang.} & \rightarrow & 8 \text{ Stunden} \\ 1 \text{ Ang.} & \rightarrow & 3 \cdot 8 \text{ Stunden} = 24 \text{ Stunden} \\ 4 \text{ Ang.} & \rightarrow & \frac{24 \text{ Stunden}}{4} = 6 \text{ Stunden} \end{array}$$

Erläuterungen:

1. Ausgangspunkt sind die 3 Angestellten. Ziel sind die 4 Angestellten. Die entscheidende Idee ist die Frage, wie lange **ein** Angestellter benötigt. Die Strategie ist in der nachstehenden Übersicht dargestellt:



2. Der eine Angestellte muss die Arbeit von 3 Angestellten erledigen, also dreimal so viel Arbeit. Er braucht dann natürlich auch dreimal so viele Stunden: $3 \cdot 8 \text{ Stunden} = 24 \text{ Stunden}$.

3. Die 4 Angestellten teilen sich die Arbeit des einen Angestellten. Sie haben nur ein Viertel der Arbeit. Sie brauchen nur ein Viertel der Stunden, also $24 \text{ Stunden} : 4 = 6 \text{ Stunden}$.

3. Antwort

4 Angestellte benötigen 6 Stunden.

Erläuterungen:

1. Die Aufgabenstellung ist sprachlich formuliert. Das Ergebnis der Aufgabe sollte daher auch in einem Antwortsatz zusammengefasst werden. Dies ist nicht nur eine stilistische Frage, sondern auch ein Gebot der Höflichkeit.

2. Der gesamte Lösungsweg ist in drei Punkte aufgeteilt worden. Eine klare Strukturierung trägt immer zur Verständlichkeit bei und erleichtert das Lernen.

Beispiel, Version 2

3 Angestellte zusammen erledigen eine Arbeit in 8 Stunden. Wie lange brauchen 4 Angestellte für die Arbeit?

Lösung (ausführlich, aber ohne zusätzliche Erläuterungen)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

3 Ang. $\rightarrow$ 8 Stunden

4 Ang. $\rightarrow$?

2. Lösen des Dreisatzes

3 Ang. $\rightarrow$ 8 Stunden

1 Ang. $\rightarrow$ $3 \cdot 8 \text{ Stunden} = 24 \text{ Stunden}$

4 Ang. $\rightarrow$ $\frac{24 \text{ Stunden}}{4} = 6 \text{ Stunden}$

3. Antwort

4 Angestellte benötigen 6 Stunden.

Schließlich führen wir noch die kurze Lösungsversion vor. Bei ihr wird die Aufgabenstellung schematisch hingeschrieben. Dann werden die Rechenschritte des ausführlichen Lösungsweges in einem einzigen Bruch zusammengefasst:

1. Rechenschritt, Multiplikation mit 3:

$$3 \cdot 8 \text{ Stunden}$$

2. Rechenschritt, Division durch 4:

$$\frac{3 \cdot 8 \text{ Stunden}}{4}$$

Hier wurde die Division als Bruch dargestellt. Schließlich kann man noch die Einheit aus dem Bruch nach hinten ziehen:

$$\frac{3 \cdot 8 \text{ Stunden}}{4} = \frac{3 \cdot 8}{4} \text{ Stunden}$$

Die Zahlen im Bruch sind genau wie in der Aufgabenstellung angeordnet:

$$3 \text{ Ang.} \rightarrow 8 \text{ Stunden}$$

$$4 \text{ Ang.} \rightarrow ?$$

Der Bruch ist also beim ungeraden Dreisatz denkbar einfach anzusetzen.

Beispiel, Version 3

3 Angestellte zusammen erledigen eine Arbeit in 8 Stunden. Wie lange brauchen 4 Angestellte für die Arbeit?

Lösung (kurz)

$$3 \text{ Ang.} \rightarrow 8 \text{ Stunden}$$

$$4 \text{ Ang.} \rightarrow ?$$

$$x = \frac{3 \cdot 8}{4} \text{ Stunden} = 6 \text{ Stunden}$$

Antwort

4 Angestellte benötigen 6 Stunden.

2.5 Der einfache Dreisatz

Die Bezeichnung *einfacher Dreisatz* ist ein Sammelbegriff für den geraden und ungeraden Dreisatz. Die Berechnungsschemen bei geradem und ungeradem Dreisatz unterscheiden sich. Es ist daher ein entscheidender Punkt beim richtigen Lösen von Dreisätzen, dass man erkennt, ob ein **gerades oder ungerades Verhältnis** vorliegt.

Zwei einfache Beispiele sollen das Gesagte konkretisieren:

Ungerader Dreisatz <i>mehr</i> Arbeiter brauchen <i>weniger</i> Zeit	Gerader Dreisatz <i>mehr</i> Äpfel kosten <i>mehr</i> Geld
2 Arbeiter → 30 Stunden 5 Arbeiter → x	2 Äpfel → 30 Cent 5 Äpfel → x
Zahlen ↓ abschreiben, Bruchstrich dazu	Zahlen abschreiben, 2 und 5 ↓ umkehren , Bruchstrich dazu
$x = \frac{2 \cdot 30}{5} \text{ Stunden}$	$x = \frac{5 \cdot 30}{2} \text{ Cent}$
$x = 12 \text{ Stunden}$	$x = 75 \text{ Cent}$

Erläuterungen:

1. Bei der Entscheidung, ob ein gerades oder ungerades Verhältnis vorliegt, muss man keine konkreten Zahlen betrachten. Völlig unabhängig von irgendeiner konkreten Zahl kann man einsehen, dass *mehr* Arbeiter *weniger* Zeit benötigen (*ungerades* Verhältnis) und dass *mehr* Äpfel auch *mehr* kosten (*gerades* Verhältnis).

2. Beim ungeraden Dreisatz schreibt man die Zahlen aus der schematischen Aufgabenstellung in unveränderter Anordnung in den Bruch.

3. Beim geraden Dreisatz schreibt man die Zahlen aus der schematischen Aufgabenstellung in fast unveränderter Anordnung in den Bruch, wobei aber die zwei Zahlen der gegebenen Größe (Äpfel) vertauscht werden.

4. Als Eselsbrücke kann folgende Überlegung dienen: Der etwas unangenehmere ungerade Dreisatz hat zum Ausgleich das einfachere Berechnungsschema, man braucht nichts zu vertauschen. (Selbstverständlich kann man auch ein einfaches Beispiel zu Rate ziehen, es in drei Schritten lösen, um zu rekonstruieren, ob man vertauschen muss oder nicht.)

Wir betrachten nun zwei weitere Beispiele, aber in praktischer, kürzerer Darstellung:

Beispiel 1

4 Äpfel kosten 2,- Euro. Was kosten 10 Äpfel?

Lösung

$$\begin{array}{rcl} 4 \text{ Äpfel} & \rightarrow & 2 \text{ €} \\ 10 \text{ Äpfel} & \rightarrow & x \end{array}$$

Es handelt sich um einen **geraden** Dreisatz, denn

mehr Äpfel kosten **mehr** Geld.

Also (4 und 10 vertauschen):

$$x = \frac{10 \cdot 2}{4} \text{ Euro} = 5 \text{ €}$$

Antwort

10 Äpfel kosten 5,- Euro.

Beispiel 2

3 Angestellte zusammen erledigen eine Arbeit in 8 Stunden. Wie lange brauchen 4 Angestellte für die Arbeit?

Lösung

3 Ang. $\rightarrow$ 8 Stunden

4 Ang. $\rightarrow$?

Es handelt sich um einen **ungeraden** Dreisatz, denn

mehr Angestellte benötigen **weniger** Zeit.

Also (alle Zahlen übernehmen):

$$x = \frac{3 \cdot 8}{4} \text{ Stunden} = 6 \text{ Stunden}$$

Antwort

4 Angestellte benötigen 6 Stunden.

Die Hauptfrage: gerades oder ungerades Verhältnis?

Bei der Beurteilung des Verhältnisses sind folgende zwei Aspekte hilfreich:

1. Man sollte systematisch vorgehen, stets mit der **Vermehrung** der einen Größen zu beginnen, und dann überlegen, ob die andere Größe ebenfalls zunimmt oder nicht.
2. Es werden immer nur zwei Größen betrachtet, alle anderen bleiben bei diesen Überlegung **unverändert**.

Wir betrachte zum Beispiel eine Autofahrt. In welchem Verhältnis stehen die Geschwindigkeit und die Strecke?

Die nicht beteiligte Fahrtdauer bleibt unverändert. In **derselben Zeit** legt man bei höherer Geschwindigkeit eine längere Strecke zurück:

mehr Geschwindigkeit $\rightarrow$ mehr Strecke

WARNUNG:

Schematische Lösungen bergen auch eine Gefahr, dass man das Schema auch dann blindlings anwendet, wenn die Situation andere Methoden erfordert. Wir betrachten zwei Beispiele dazu.

Beispiel 1.

Für sein Sparguthaben von 100,-Euro bekommt jemand im ersten Jahr 6,- Euro Zinsen. Wie viel Zinsen bekommt er in zwei Jahren?

Falsche Lösung:

Mehr Jahre bringen auch mehr Zinsen. Also liegt ein gerader Dreisatz vor.

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ Jahr} & \rightarrow 6 \text{ Euro} \\ 2 \text{ Jahre} & \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{2 \cdot 6}{1} \text{ Euro} = 12 \text{ Euro}$$

Antwort: Er bekommt in zwei Jahren 12,- € Zinsen.

Richtige Lösung:

1. Der Zinssatz beträgt offenbar 6 % im Jahr.
2. Im ersten Jahr bekommt er 6% **von 100 €** als Zinsen, also 6 €.
3. Nach dem ersten Jahr hat er nun ein Guthaben von 106 €.
4. Im zweiten Jahr bekommt er 6% **von 106 €** als Zinsen:

$$\begin{array}{ll} 100 \% & \rightarrow 106 \text{ €} \\ 1 \% & \rightarrow 1,06 \text{ €} \\ 6 \% & \rightarrow 6,36 \text{ €} \end{array}$$

5. Gesamtzinsen für zwei Jahre: $6 \text{ €} + 6,36 \text{ €} = 12,36 \text{ €}$.

Antwort: Er bekommt in zwei Jahren 12,36 € Zinsen.

Beispiel 2

Wenn man einen Stein frei fallen lässt, so legt er in der ersten Sekunde etwa 5 m zurück. Wie viele Meter legt er in 2 Sekunden zurück?

Falsche Lösung:

In mehr Sekunden fällt der Stein auch mehr Meter. Also liegt ein gerader Dreisatz vor.

$$1 \text{ Sekunde} \rightarrow 5 \text{ m}$$

$$2 \text{ Sekunden} \rightarrow x$$

$$x = \frac{2 \cdot 5}{1} \text{ m} = 10 \text{ m}$$

Antwort: In 2 Sekunden fällt der Stein 10 m.

Erläuterung des Irrtums: Nach 1 Sekunde fällt der Stein wesentlich schneller als zu Beginn. Daher wird er in der zweiten Sekunde mehr als 5 Meter fallen. Insgesamt fällt er dann sicherlich deutlich mehr als 10 m. Die schematische Lösung der Aufgabe unterstellt klammheimlich, dass der Stein immer mit derselben Geschwindigkeit fällt.

Richtige Lösung:

Auf der Erde bekommt ein frei fallender Gegenstand pro Sekunde einen Geschwindigkeitszuwachs von ca. 10 m/s. (Diese Fallbeschleunigung und ihre verursachende Schwerkraft sind ortsabhängig. Den groben Wert 10 m/s berührt dies nicht.) Also:

$$1 \text{ Sekunde} \rightarrow 10 \text{ m/s}$$

$$2 \text{ Sekunden} \rightarrow x$$

$$x = \frac{2 \cdot 10}{1} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit kann als Mittelwert von

Anfangsgeschwindigkeit: 0 m/s

Endgeschwindigkeit: 20 m/s

berechnet werden:

$$\frac{0 \text{ m/s} + 20 \text{ m/s}}{2} = 10 \text{ m/s}$$

Wir unterstellen die Durchschnittsgeschwindigkeit von 10 m/s für die gesamten 2 Sekunden. Dann kann man die Fallstrecke berechnen:

$$1 \text{ Sekunde} \rightarrow 10 \text{ m}$$

$$2 \text{ Sekunden} \rightarrow 2 \cdot 10 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

Antwort: In 2 Sekunden fällt der Stein 20 m.

2.6 Zusammengesetzter Dreisatz

Bei einem zusammengesetzten Dreisatz (auch Vielsatz genannt) sind mehr als zwei Größen beteiligt. Wenn beispielsweise Angestellte Aufträge bearbeiten, hängt die benötigte Zeit nicht nur von der Anzahl der Angestellten ab, sondern auch von der Anzahl der Aufträge. Hier hat man es also mit drei Größen zu tun: Anzahl der Angestellten, Anzahl der Aufträge und die benötigte Zeit. Ändern sich nun die Anzahlen von Angestellten und Aufträgen, so kann die Zeit in *zwei Schritten* berechnet werden:

1. *Nur* die Änderung der Angestelltenzahl berücksichtigen, die Auftragsmenge unverändert lassen. Die Zeit, die das neue Team benötigt, kann mit einem *einfachen* Dreisatz berechnet werden.
2. Nun bleibt das Angestelltenteam fest und spielt keine Rolle mehr. Aber die Auftragszahl ändert sich. Die Zeit kann wieder mit einem *einfachen* Dreisatz bestimmt werden.

Die auf den ersten Blick schwierige Aufgabe kann also mit zwei einfachen Dreisätzen gelöst werden. Wie bei den einfachen Dreisätzen gibt es auch hier eine Kurzfassung, die alles in einem Schema und einem Bruch zusammenfasst. Die *Verhältnisse* aller gegebenen Größen zur *gesuchten* Größe müssen dabei untersucht werden.

Wir betrachten nun ein konkretes Beispiel zum zusammengesetzten Dreisatz. Wir werden drei Lösungswege aufzeigen:

1. Eine ausführliche Lösung mit zusätzlichen Erläuterungen
2. Diese ausführliche Lösung, aber ohne zusätzliche Erläuterungen
3. Eine schematische Lösung

Beispiel, Version 1

5 Angestellte bearbeiten zusammen 3 Aufträge in 48 Minuten. Wie lange brauchen 4 Angestellte für 2 Aufträge?

Lösung (ausführlich und mit zusätzlichen Erläuterungen)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

5 Angestellte → 3 Aufträge → 48 Minuten

4 Angestellte → 2 Aufträge → ?

Es empfiehlt sich, dies möglichst anschaulich zu lesen: „5 Angestellte **erledigen** 3 Aufträge in 48 Minuten. 4 Angestellte erledigen 2 Aufträge in wie viel Minuten?“

Erläuterungen:

1. Beim Lösen einer Aufgabe startet man mit den gegebenen Daten und kommt dann zur gesuchten Größe. Da wir von links nach rechts schreiben, sollte die **gesuchte Größe** immer **ganz rechts** stehen. Im Beispiel stehen also links die Anzahlen der Angestellten und Aufträge, rechts die Minutenzahlen, von denen eine ja gesucht ist.

2. Das Ziel der schematischen Schreibweise ist es, die (gesamte) Situation schnell zu erfassen und zu überblicken. Es soll einem das ständige Herumsuchen im Aufgabentext erspart werden. Daher ist es sehr wichtig, die **Einheiten** (Angestellte, Aufträge, Minuten) in das Schema zu übernehmen, und nicht nur die Zahlen. Aus dem verkürzten (und mehrdeutigen) Schema

5 → 3 → 48

4 → 2 → ?

allein kann nichts geschlossen werden.

2. Zerlegung der Aufgabe in einfache Dreisätze („Teile und herrsche!“)

Zunächst lassen wir die Anzahl der Aufträge unverändert. Wir verkleinern nur das Team von 5 auf 4 Angestellten. Mit einem einfachen Dreisatz berechnen wir die vom neuen Team benötigten Minuten.

Nachdem wir nun das verlangte Team haben, passen wir die Anzahl der Aufträge an. Mit einem einfachen Dreisatz berechnen wir wieder die benötigten Minuten.

Wir fassen also jeweils nur eine der gegebenen Größen ins Auge (decken die anderen gewissermaßen zu) und berechnen die entsprechende gesuchte Größe mit einem einfachen Dreisatz. Um den Überblick zu bewahren, führen wir alle Größen stets mit.

$$5 \text{ Angestellte} \rightarrow 3 \text{ Aufträge} \rightarrow 48 \text{ min}$$

$$1 \text{ Angestellter} \rightarrow 3 \text{ Aufträge} \rightarrow 5 \cdot 48 \text{ min} = 240 \text{ min}$$

$$4 \text{ Angestellte} \rightarrow 3 \text{ Aufträge} \rightarrow \frac{240 \text{ min}}{4} = 60 \text{ min}$$

$$4 \text{ Angestellte} \rightarrow 3 \text{ Aufträge} \rightarrow 60 \text{ min}$$

$$4 \text{ Angestellte} \rightarrow 1 \text{ Auftrag} \rightarrow \frac{60 \text{ min}}{3} = 20 \text{ min}$$

$$4 \text{ Angestellte} \rightarrow 2 \text{ Aufträge} \rightarrow 2 \cdot 20 \text{ min} = 40 \text{ min}$$

3. Antwort

4 Angestellte erledigen 2 Aufträge in 40 Minuten.

Anmerkungen:

1. Die Aufgabenstellung ist sprachlich formuliert. Das Ergebnis der Aufgabe sollte daher auch in einem Antwortsatz zusammengefasst werden. Dies ist nicht nur eine stilistische Frage, sondern auch ein Gebot der Höflichkeit.

2. Der gesamte Lösungsweg ist in drei Punkte aufgeteilt worden. Eine klare Strukturierung trägt immer zur Verständlichkeit bei und erleichtert das Lernen.

Beispiel, Version 2

5 Angestellte bearbeiten zusammen 3 Aufträge in 48 Minuten. Wie lange brauchen 4 Angestellte für 2 Aufträge?

Lösung (ausführlich, aber ohne zusätzliche Erläuterungen)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

5 Angestellte → 3 Aufträge → 48 Minuten

4 Angestellte → 2 Aufträge → ?

2. Zerlegung der Aufgabe in einfache Dreisätze

5 Angestellte → 3 Aufträge → 48 min

1 Angestellter → 3 Aufträge → $5 \cdot 48 \text{ min} = 240 \text{ min}$

4 Angestellte → 3 Aufträge → $\frac{240 \text{ min}}{4} = 60 \text{ min}$

4 Angestellte → 3 Aufträge → 60 min

4 Angestellte → 1 Auftrag → $\frac{60 \text{ min}}{3} = 20 \text{ min}$

4 Angestellte → 2 Aufträge → $2 \cdot 20 \text{ min} = 40 \text{ min}$

3. Antwort

4 Angestellte erledigen 2 Aufträge in 40 Minuten.

Die einfachen Dreisätze hatten wir bereits auch schematisch gelöst. Wir übertragen diese schematische Lösungsmethode nun auf zusammengesetzte Dreisätze. Dabei wird zunächst die Aufgabenstellung schematisch hingeschrieben. Dann wird jede gegebene Größe betrachtet und geprüft, ob sie in einem geraden oder ungeraden Verhältnis zur gesuchten Größe steht. Auf dieser Grundlage werden die Zahlen aus der schematischen Aufgabenstellung abgeschrieben, und ein Bruchstrich hinzugefügt. Bei den Größen mit geradem Verhältnis zur gesuchten Größe ist jeweils eine Vertauschung vorzunehmen.

Beispiel, Version 3

5 Angestellte bearbeiten zusammen 3 Aufträge in 48 Minuten. Wie lange brauchen 4 Angestellte für 2 Aufträge?

Lösung (schematisch)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

5 Angestellte → 3 Aufträge → 48 Minuten

4 Angestellte → 2 Aufträge → ?

2. Untersuchung der Verhältnisse: gegebene Größen → gesuchte Größe

a) Anzahl der Angestellten → benötigte Zeit:

Mehr Angestellte benötigen offenbar weniger Zeit.
Das Verhältnis ist also **ungerade**.

b) Anzahl der Aufträge → benötigte Zeit:

Mehr Aufträge erfordern auch mehr Zeit.
Das Verhältnis ist also **gerade**.

3. Berechnungsschema für den zusammengesetzten Dreisatz

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ungerade} & & \text{gerade} \\
 5 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 3 \text{ Aufträge} \rightarrow 48 \text{ Minuten} \\
 4 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 2 \text{ Aufträge} \rightarrow x
 \end{array}$$

vertauscht (gerades Verhältnis)

$$x = \frac{5 \cdot 2 \cdot 48}{4 \cdot 3} \text{ Minuten} = \frac{480}{12} \text{ Minuten} = 40 \text{ Minuten}$$

4. Antwort

4 Angestellte erledigen 2 Aufträge in 40 Minuten.

Anmerkung 1

Wenn man sich die Rechenschritte des ausführlichen Lösungsweges anschaut und zu einem Bruch zusammenfasst, ergibt sich genau der Bruch des kurzen Lösungsweges:

$$\begin{array}{llll} 5 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 3 \text{ Aufträge} & \rightarrow 48 \text{ min} & | \cdot 5 \\ 1 \text{ Angestellter} & \rightarrow & 3 \text{ Aufträge} & \rightarrow 5 \cdot 48 \text{ min} & | : 4 \\ 4 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 3 \text{ Aufträge} & \rightarrow \frac{5 \cdot 48}{4} \text{ min} & | : 3 \\ 4 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 1 \text{ Auftrag} & \rightarrow \frac{5 \cdot 48}{4 \cdot 3} \text{ min} & | \cdot 2 \\ 4 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 2 \text{ Aufträge} & \rightarrow \frac{5 \cdot 2 \cdot 48}{4 \cdot 3} \text{ min} \end{array}$$

Anmerkung 2

Der bei der kurzen Lösung des zusammengesetzten Dreisatzes auftretende Bruch kann auf verschiedene Weise mit einem Taschenrechner berechnet werden:

Methode 1

Zähler berechnen, Nenner berechnen, und dann dividieren:

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 48}{4 \cdot 3} = \frac{480}{12} = 480 : 12 = 40$$

Dieses Vorgehen ist strategisch sehr klar und einfach, ferner ist nur eine Division nötig (was beim schriftlichen Rechnen ein großer Vorteil ist). Nachteil: Die Ergebnisse für Zähler und Nenner müssen zur Division neu eingetippt werden (es sei denn, man benutzt Speicher des Taschenrechners, sofern vorhanden).

Methode 2

Zähler berechnen, danach nacheinander durch jeden Faktor im Nenner dividieren (wobei man nach jeder Division die **Taste** = drücken muss):

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 48}{4 \cdot 3} = \frac{480}{4 \cdot 3}$$

$$480 : 4 = 120$$

$$120 : 3 = 40$$

Dieses Vorgehen ist auch relativ einfach. Nachteil: Wenn man nach den Divisionen vergisst, die Taste = zu drücken, liefert der Taschenrechner ein falsches Ergebnis. Ferner kommen zwei Divisionen vor. Divisionen sind immer aufwendiger als Multiplikationen.

Methode 3

Wenn man einen wissenschaftlichen Taschenrechner besitzt, kann man die Methode 1 mithilfe von **Klammern** optimieren. Das erneute Eintippen von Zwischenergebnissen entfällt damit:

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 48}{4 \cdot 3} = (5 \times 2 \times 48) : (4 \times 3) = 40$$

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 2.2

1. Bringe in die übliche Form:

- | | | | |
|--------------|--------------|-------------|-------------|
| a) 1,3 min | b) 20,75 min | c) 17,4 min | d) 53,6 min |
| e) 45,87 min | f) 11,92 min | g) 35,1 min | h) 5,61 min |

2. Bringe in die übliche Form:

- | | | | |
|----------|------------|------------|-----------|
| a) 1,3 h | b) 23,25 h | c) 6,5 h | d) 15,6 h |
| e) 7,8 h | f) 11,9 h | g) 35,75 h | h) 5,1 h |

3. Bringe in die übliche Form:

- | | | |
|----------------|--------------|--------------|
| a) 3,875 Tage | b) 1,5 Tage | c) 6,75 Tage |
| d) 22,125 Tage | e) 7,25 Tage | f) 68,5 Tage |

4. Bringe in die übliche Form:

- | | | | |
|-----------|------------|-----------|------------|
| a) 1,34 h | b) 14,53 h | c) 6,92 h | d) 19,65 h |
| e) 8,26 h | f) 11,05 h | g) 4,24 h | h) 16,37 h |

5. Bringe in die übliche Form:

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| a) 1,38 Tage | b) 20,70 Tage | c) 17,29 Tage |
| d) 33,59 Tage | e) 25,87 Tage | f) 11,92 Tage |

6. Bringe in die übliche Form:

- | | | | |
|-------------|--------------|--------------|--------------|
| a) 7,63 Wo. | b) 6,52 Tage | c) 4,23 Tage | d) 8,73 Tage |
| e) 45,87 h | f) 110,132 d | g) 300,43 h | h) 1001 min |

7. Wandle in eine einzige Zeiteinheit um:

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| a) 37 min, 21 s | b) 18 h, 42 min, 28 s |
| c) 2 Tage, 37 min, 18 s | d) 1 Wo., 23 h |
| e) 1 Wo., 1 d, 1 h, 1 min, 1 s | f) 2 Wo., 3 Tage, 19 h |

Aufgaben zu Kapitel 2.3

1. Wenn 2 kg Äpfel 2,99 € kosten, was kosten dann 5 kg Äpfel?
2. Die Tapezierung einer 80-m²-Wohnung hat 1980,-€ gekostet. Was würde die Tapezierung einer 54-m²-Wohnung kosten?
3. Zwei Angestellte bearbeiten an einem Tage 7 Akten. Wie viele Akten würden 3 Angestellte an einem Tag erledigen?
4. Die Wasserkosten in einem Mehrfamilienhaus werden anteilig nach der Wohnungsfläche berechnet. Für eine Wohnung mit 60 m² fielen 320,-€ Wasserkosten an. Wie viel ist für das Wasser bei einer 82-m²-Wohnung zu zahlen?
5. Ein Pkw verbraucht 7 Liter pro 100 Kilometer. In einem Jahr wurde Benzin im Wert von 1969,10 € getankt, wobei 1 Liter Benzin durchschnittlich 1,45 € gekostet hat.
 - a) Wie viele Liter Benzin sind getankt worden?
 - b) Welche Strecke ist zurückgelegt worden?
6. Ein Wohnraum hat ein Volumen von 55,2 m³, bei einer Höhe von 2,40 m. Welchen Rauminhalt hat ein Zimmer mit gleicher Grundfläche, das aber 3,10 m hoch ist?
7. Ein Kiosk hat in den ersten fünf Monaten einen Gewinn von etwa 23.000 € erwirtschaftet. Welchen Gewinn kann man für den Zeitraum von einem Jahr erwarten?
8. Eine Person ist 1,68 m groß und wirft einen Schatten, der etwa 7 Schritte misst. Zur gleichen Zeit wirft ein Baum einen Schatten, der 38 Schritte lang ist. Wie hoch ist der Baum?
9. Mike Taff verbrennt bei 50 Kniebeugen etwa 4 kcal. Wie viele Kniebeugen müsste er machen, um die Energie einer Tafel Vollmilkschokolade (535 kcal) zu verbrauchen?
10. Auf einer Spanien-Landkarte mit dem Maßstab 1:2.630.000 misst die Entfernung zwischen Toledo und Burgos 20,7 cm. Wie viele Kilometer sind die beiden Städte voneinander entfernt?
11. Ein Tourist erwirbt in einer Wechselstube 450 US-Dollar und zahlt dafür 382,- Euro. Wie viele Dollar kann er für 200,- Euro

bekommen?

12. Für die 5.500 km große Entfernung zwischen Frankfurt und New York benötigt ein Passagierflugzeug 6 Stunden. Der Flug zu einem Ziel dauert 3,5 Stunden. Wie weit ist das Flugziel entfernt?

13. Die Reiseflughöhe eines Düsenflugzeugs beträgt 30.000 Fuß oder 9.144 m. Eine Turboprop-Maschine fliegt in 20.000 Fuß Höhe. Wie lautet die Höhe in Metern?

14. Ein Fußgänger legt 1,3 km in 15 Minuten zurück. In welcher Zeit bewältigt er 2,1 km?

15. Ein Pkw mit einem Tank von 30 Litern Fassungsvermögen wird in den USA mit 7,92 Gallonen vollgetankt. Wie viele Gallonen werden benötigt, um ein Pkw mit einem 50-Liter-Tank vollzutanken?

16. Das Rathaus einer Stadt ist 2,3 km vom Hauptbahnhof entfernt, auf dem Stadtplan misst die Strecke 23 cm. Wie viele Kilometer beträgt eine Entfernung, die 8,3 cm auf dem Stadtplan misst?

17. Für die 580 km von Köln nach München benötigt man im Pkw bei einer angemessenen Durchschnittsgeschwindigkeit etwa 5 Stunden und 30 Minuten. Wie lange dauert die Fahrt für die 1230 km von Köln nach Kaliningrad (früher Königsberg)?

18. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa 300 000 km/s. Ein zum Mond geschickter und dort reflektierter Laserstrahl ist nach etwa 2,6 Sekunden wieder auf der Erde. Wie weit ist die Mondoberfläche von der Erdoberfläche entfernt?

19. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa 300 000 km/s. Das Sonnenlicht benötigt etwa 8 Minuten, um zur Erde zu gelangen. Wie weit ist die Sonne von der Erde entfernt?

20. Wenn man auf dem Mond einen Stein in eine Schlucht fallen lässt, hat er nach 3 Sekunden eine Geschwindigkeit von 4,9 m/s erreicht. Welche Geschwindigkeit hat der Stein nach 10 Sekunden?

Aufgaben zu Kapitel 2.4

1. Ein Projekt wird von 16 Angestellten in 9 Tagen erledigt. Wie viele Tage würden 12 Angestellte dafür benötigen?
2. Ein Buch mit 350 Seiten enthält 42 Zeilen auf jeder Seite. Eine andere Ausgabe desselben Buchinhalts enthält 49 Zeilen pro Seite. Wie viele Seiten hat die alternative Ausgabe?
3. Mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 48 km/h fährt eine Person in 17 Minuten zur Arbeitsstelle. Baustellen verlangsamen die Fahrten, die nun 26 Minuten dauern. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit jetzt?
4. Mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 58 km/h fährt eine Person in 16 Minuten zur Arbeitsstelle. Wie lange fährt sie bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 51 km/h?
5. Die 4 eingesetzten Handwerker tapezieren die Büroräume einer Firma in 14 Tagen. Wie lange dauert die Tapezierung beim Einsatz von 3 zusätzlichen Kräften?
6. Die 3 eingesetzten Handwerker tapezieren die Büroräume einer Firma in 8 Tagen. Wie viele Handwerker müssen eingesetzt werden, damit die Tapezierung in 6 Tagen erledigt wird.
7. Eine elektrische Wasserpumpe mit einer Leistung von 350 Watt benötigt 20 Minuten zur Füllung eines Tanks. Wie lange dauert die Füllung des Wassertanks, wenn eine neue Pumpe mit 980 Watt eingesetzt wird.
8. Eine elektrische Wasserpumpe mit einer Leistung von 280 Watt benötigt 20 Minuten zur Füllung eines Tanks. Welche Leistung muss eine Pumpe mindestens haben, damit der Tank in 15 Minuten gefüllt wird?
9. Eine Mutter und ihr Kind sitzen sich auf einer Wippe gegenüber, sie befinden sich im Gleichgewicht. Das Kind wiegt 21 kg und sitzt 2,30 m vom Drehpunkt entfernt. In welcher Entfernung (in cm) vom Drehpunkt muss die Mutter sitzen, wenn sie 59 kg wiegt?
10. Sarah Klug bewältigt bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h die Fahrt nach Feinstadt in 5 Stunden und 15 Minu-

ten. Peter Bleifuß schafft es in 3 Stunden und 30 Minuten. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

11. Eine Schachtel mit einem Boden von 52 cm^2 ist 21 cm hoch. Wie hoch ist eine Schachtel mit einem Boden von 39 cm^2 und gleichem Volumen?

12. Zur Erhöhung der Bequemlichkeit der Passagiere verringert eine Fluggesellschaft die Anzahl der Sitze in einem Flugzeug von 140 auf 104. Der ursprüngliche Flugpreis von 250.-€ muss erhöht werden, damit die Fluggesellschaft keinen Einbußen erleidet. Wie viel kostet der Flug nun mindestens?

13. Mit einer Reisegeschwindigkeit von 890 km/h fliegt ein Jet in 7 Stunden von Paris nach New York. Wie lange würde ein Überschallflugzeug mit 1850 km/h für die Strecke benötigen?

Aufgaben zu Kapitel 2.5

1. Situation: Angestellte bearbeiten Akten. Prüfe die Verhältnisse:

- a) Anzahl der Angestellten $\rightarrow$ Anzahl benötigter Minuten
- b) Anzahl der Akten $\rightarrow$ Anzahl benötigter Minuten
- c) Anzahl der Akten $\rightarrow$ Anzahl der Angestellten

2. Situation: Eine Wasserpumpe füllt einen Tank. Prüfe die Verhältnisse:

- a) Wattzahl $\rightarrow$ Anzahl benötigter Minuten
- b) Anzahl der Liter $\rightarrow$ Anzahl benötigter Minuten
- c) Anzahl der Liter $\rightarrow$ Wattzahl

3. Situation: Ein Auto legt eine Strecke auf der Karte zurück. Prüfe die Verhältnisse:

- a) Geschwindigkeit $\rightarrow$ Anzahl benötigter Minuten
- b) Anzahl der Zentimeter $\rightarrow$ Anzahl benötigter Minuten
- c) Geschwindigkeit $\rightarrow$ Anzahl der Zentimeter

4. Situation: Ein Buch wird gedruckt mit mehr oder weniger zusammengedruckten Zeilen und Buchstaben. Prüfe die Verhältnisse:

- a) Gesamtzahl der Seiten $\rightarrow$ Anzahl der Zeilen pro Seite

- b) Gesamtzahl der Seiten $\rightarrow$ Anzahl der Buchstaben pro Zeile
 - c) Anzahl der Buchstaben pro Zeile $\rightarrow$ Anzahl der Zeilen pro Seite
5. Situation: Lkw befördern Fracht. Prüfe die Verhältnisse:
- a) Anzahl der Lkw $\rightarrow$ Anzahl der gefahrenen Tage
 - b) Anzahl der Lkw $\rightarrow$ Anzahl der beförderten Tonnen
 - c) Anzahl der Lkw $\rightarrow$ Anzahl der gefahrenen Stunden pro Tag
 - d) Anzahl der gefahrenen Tage $\rightarrow$ Anzahl der beförderten Tonnen
 - e) Anzahl der gefahrenen Tage $\rightarrow$ Anzahl der gefahrenen Stunden pro Tag
 - f) Anzahl der beförderten Tonnen $\rightarrow$ Anzahl der gefahrenen Stunden pro Tag
6. Die Reiseflughöhe eines Jets beträgt 30.000 Fuß oder 9144 m. Ein altes Kolbenmotor-Flugzeug fliegt in 16.000 Fuß Höhe. Wie lautet die Höhe in Metern?
7. Eine Arbeitnehmerin braucht 30 Minuten, um zur Arbeitsstelle zu gehen. Auf dem Stadtplan ist die Arbeitsstelle 13 cm von der Wohnung entfernt. Wie lange braucht sie, um zum Rathaus zu gelangen, das auf dem Stadtplan 22 cm entfernt ist.
8. Ein Buch mit 248 Seiten enthält 24 Zeilen auf jeder Seite. Wie viele Seiten hat eine andere Ausgabe desselben Buches, bei der pro Seite 32 Zeilen stehen?
9. Jemand benötigt 23 Minuten für die die Fahrt zur Arbeitsstelle, bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 47 km/h. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit ist er gefahren, wenn er für dieselbe Strecke 28 Minuten gebraucht hat?
10. Die Arbeitsstelle einer Arbeitnehmerin ist 2,4 km von ihrer Wohnung entfernt, auf dem Stadtplan 13,2 cm. Wie viele Kilometer ist der Bahnhof entfernt, wenn man auf dem Stadtplan eine Entfernung von 12 cm misst?
11. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa 300.000 km/Sek. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten von Mond und Erde beträgt etwa 385.000 km. Die Erde hat einen Durchmesser von ca. 12.700 km und der Mond ca. 3480 km. Nach welcher Zeit erreicht ein von

der Erdoberfläche aus zum Mond geschickter und dort reflektierter Laserstrahl wieder die Erdoberfläche?

12. Für die 553 km von Köln nach München benötigt man im Pkw bei einer angemessenen Durchschnittsgeschwindigkeit etwa 5 Stunden und 12 Minuten'. Wie lange dauert die Fahrt für die 626 km von Köln nach Frankfurt an der Oder?

13. Ein 101 cm langer Zollstock wirft einen Schatten von 2,15 m. Wie hoch ist eine Tanne, wenn sie einen 19,83 m langen Schatten wirft?

14. Peter Schulz (53 Jahre, 181 cm) wirft am späten Nachmittag einen Schatten, der 8 Schritte lang ist. Der Schatten einer Birke ist zur gleichen Zeit 53 Schritte lang. Wie hoch ist die Birke (auf m gerundet)?

15. Eine elektrische Wasserpumpe mit einer Leistung von 420 Watt benötigt 18 Minuten zur Füllung eines Tanks. Wie lange Dauert die Füllung des Wassertanks, wenn eine neue Pumpe mit 590 Watt eingesetzt wird.

16. Mutter und Kind sitzen auf einer Wippe. Das Kind wiegt 18 kg und sitzt 2,20 m vom Drehpunkt entfernt. In welcher Entfernung (in cm) vom Drehpunkt muss die Mutter sitzen, wenn sie 62 kg wiegt und die Wippe im Gleichgewicht sein soll?

17. Eine 5,25"-Diskette hat einen Durchmesser von 13,335 cm. Welchen Durchmesser hat eine 3,5"-Diskette?

18. Sarah Weise bewältigt bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h die Fahrt von ihrem Wohnort nach Feinstadt in 3 Stunden und 25 Minuten. Ihr Nachbar Peter Bleifuß schafft dieselbe Strecke in 2 Stunden und 43 Minuten. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

19. 512.000 KByte sind 500 MByte. Wie viele KByte sind 8 MByte?

Aufgaben zu Kapitel 2.6

1. Elf Angestellte bearbeiten zusammen 33 Akten in 36 Minuten. Wie lange brauchen 6 Angestellte für 15 Akten?
2. Zwölf Arbeiter sanieren einen 310 m langen Autobahnabschnitt in 7 Tagen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten. Wie viele Arbeiter müssen eingesetzt werden, damit ein Abschnitt von 230 m in höchstens 5 Tagen bei einer täglichen Arbeitszeit von 10 Stunden fertiggestellt werden kann?
3. Eine elektrische Wasserpumpe mit einer Leistung von 350 Watt benötigt 20 Minuten zur Füllung eines Tanks von $1,4 \text{ m}^3$. Wie lange dauert die Füllung eines Wassertanks von $2,3 \text{ m}^3$, wenn eine Pumpe mit 500 Watt eingesetzt wird?
4. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 48 km/h legt man in 51 Minuten eine Strecke zurück, die auf der Landkarte 13 cm misst. In welcher Zeit legt man bei durchschnittlich 60 km/h eine Strecke zurück, die auf der Landkarte 14 cm misst?
5. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 57 km/h legt man in 45 Minuten eine Strecke zurück, die auf der Landkarte 14 cm misst. Bei welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit legt man in 32 Minuten eine Strecke zurück, die auf der Landkarte 8 cm lang ist?
6. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h braucht man 50 Minuten, um eine Strecke zurückzulegen, die auf der Karte 15 cm misst. Wie viele cm misst eine Strecke auf der Karte, wenn man sie mit durchschnittlich 75 km/h in 40 Minuten zurücklegt?
7. Ein Buch mit 320 Seiten enthält 40 Zeilen auf jeder Seite, und jede Zeile umfasst 80 Buchstaben. Die preiswerte Taschenbuchausgabe des Buches ist gedrängter, und enthält 58 Zeilen pro Seite und 90 Buchstaben pro Zeile. Wie viele Seiten hat die Taschenbuchausgabe?
8. Eine elektrische Wasserpumpe mit einer Leistung von 350 Watt benötigt 20 Minuten zur Füllung eines Tanks von $1,4 \text{ m}^3$. Wie viel

Kubikmeter fasst ein Wassertank, der von einer Pumpe mit 500 Watt in 25 Minuten gefüllt wird?

9. Neun Lkw transportieren in 6 Tagen 3.200 t Sand zu einer Baustelle. Die Lkw sind dabei täglich 8 Stunden im Einsatz. Da kurzfristig 5.000 t Sand benötigt werden, setzt man nunmehr 12 Lkw 10 Stunden pro Tag ein. In welcher Zeit wird der benötigte Sand geliefert?

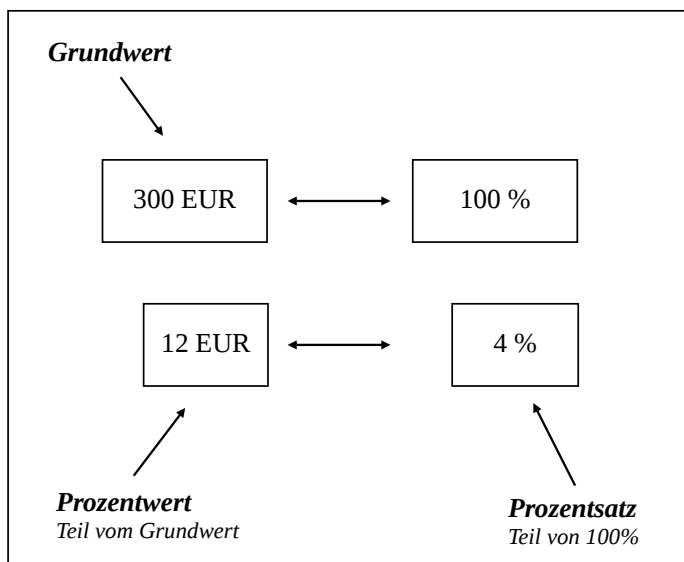
3. Prozentrechnen

3.1 Einführung

Was ist das Prozentrechnen?

Prozentangaben dienen der anschaulichen und vergleichbaren Darstellung des Anteils an einer Gesamtheit. Dabei wird die Gesamtheit mit 100 Einheiten gleichgesetzt. Jeder Teil der Gesamtheit entspricht dann einem Teil *von Hundert*. Die Hälfte der Gesamtheit sind also 50 von Hundert, anders gesagt: 50 Prozent, oder in Zeichen: 50 %. Die Gesamtheit selbst entspricht natürlich 100 %.

Wir halten einige Fachausdrücke fest: Die zugrunde gelegte Gesamtheit wird als *Grundwert* bezeichnet. Der Anteil der Gesamtheit heißt *Prozentwert*, und die zugehörige Prozentangabe nennt man *Prozentsatz*. Beispiel:



Das Wort *Prozent* stammt vom italienischen *per cento* (für *Hundert*). Das Prozentzeichen % hat sich als Abkürzung aus *per cento* (per 100) entwickelt.

Dass beim Prozentrechnen die Zahl 100 als Grundgröße gewählt wurde, ist nachvollziehbar. Wenn man das Zehnersystem benutzt, so wählt man als Grundgröße des Prozentrechnens praktischerweise eine glatte Zahl wie 10, 100, 1000, usw. Nun ist die 10 als Grundlage zu grob. Man könnte nicht einmal drei Viertel der Gesamtheit glatt darstellen: 7,5 von 10. Die 1000 ist wiederum zu groß für das menschliche Vorstellungsvermögen; es ist bezeichnend, dass das Wort *tausend* von der schwammigen germanischen Beschreibung *vielhundert* stammt. Als nützlichste Grundzahl bleibt nur die 100 übrig. Sie hat sich ja tatsächlich bewährt und durchgesetzt.

Sämtliche Aufgaben der Prozentrechnung werden wir lediglich mithilfe der **goldenen Regel** des Kaufmannes lösen: nämlich mit **Dreisätzen**. In der Prozent- und Zinsrechnung sind **alle** auftretenden Dreisätze **gerade**. Über die Verhältnisse muss man sich also nicht den Kopf zerbrechen.

Der entscheidende Aspekt beim Prozentrechnen ist, dass man den **Grundwert erkennt**, auf den sich die Prozentangaben beziehen. Das übrige kann fast mechanisch per geradem Dreisatz erledigt werden.

Überblick

Bei der Prozentrechnung geht es grundsätzlich um die Berechnung der drei grundlegenden Größen: Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert.

Ferner werden vermehrte und verminderte Grundwerte betrachtet, die traditionell als schwierig gelten.

Wir werden also folgende Themen betrachten:

- Berechnung des Prozentwertes
- Berechnung des Prozentsatzes

- Berechnung des Grundwertes
- Vermehrter Grundwert
- Verminderter Grundwert

3.2 Berechnung des Prozentwertes

Wir betrachten ein konkretes Beispiel. Dabei berechnen wir den Prozentwert mit Hilfe eines Dreisatzes.

Beispiel

Wie viel sind 4 % von 300 €?

Lösung 1 (Dreisatz, ausführlich)

100% entsprechen dem Grundwert von 300 €. Gesucht ist der Wert, der zu dem Prozentsatz von 4 % gehört:

$$\begin{array}{rcl} 100 \% & \rightarrow & 300 \text{ €} \\ 4 \% & \rightarrow & x \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{rcl} 100 \% & \rightarrow & 300 \text{ €} \\ 1 \% & \rightarrow & \frac{300}{100} \text{ €} = 3 \text{ €} \\ 4 \% & \rightarrow & 4 \cdot 3 \text{ €} = 12 \text{ €} \end{array}$$

Antwort: 4 % von 300 € sind 12 €

Lösung 2 (Dreisatz, kurz)

100% entsprechen dem Grundwert von 300 €. Gesucht ist der Wert, der zu dem Prozentsatz von 4 % gehört:

$$\begin{array}{rcl} 100 \% & \rightarrow & 300 \text{ €} \\ 4 \% & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{4 \cdot 300}{100} \text{ €} = 12 \text{ €}$$

Antwort: 4 % von 300 € sind 12 €

Anmerkungen

Aus dem Lösungsbruch kann man die Formel für den Prozentwert ablesen:

$$x = \frac{4 \% \cdot 300 \text{ €}}{100 \%}$$

Wir ersetzen darin:

$$x = \text{Prozentwert} = P$$

$$4 \% = \text{Prozentsatz} = p$$

$$300 \text{ €} = \text{Grundwert} = G$$

Dies ergibt:

$$\text{Prozentwert} = \frac{\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert}}{100} \quad \text{oder} \quad P = \frac{p \cdot G}{100}$$

Diese Formel werden wir nicht benutzen. Der Dreisatz ist übersichtlicher, hilft beim Erkennen des Grundwertes und führt stets sicher zum Ziel. Dabei muss man keinerlei Formeln auswendig wissen oder suchen.

3.3 Berechnung des Prozentsatzes

Wir betrachten ein konkretes Beispiel, bei dem wir den Prozentsatz wieder mithilfe eines Dreisatzes berechnen.

Beispiel

Wie viel % sind 12 € von 300 €?

Lösung 1 (Dreisatz, ausführlich)

300 € ist der Grundwert und entspricht 100%: Gesucht ist der Prozentsatz, der zum Prozentwert von 12 € gehört:

$$\begin{array}{rcl} 300 \text{ €} & \rightarrow & 100 \% \\ 12 \text{ €} & \rightarrow & ? \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{rcl} 300 \text{ €} & \rightarrow & 100 \% \\ 1 \text{ €} & \rightarrow & \frac{100}{300} \% = 0,333... \% \\ 12 \text{ €} & \rightarrow & 12 \cdot 0,333... \% = 4 \% \end{array}$$

Antwort: 12 € sind 4 % von 300 €.

Lösung 2 (Dreisatz, kurz)

300 € ist der Grundwert und entspricht 100 %: Gesucht ist der Prozentsatz, der zum Prozentwert von 12 € gehört:

$$\begin{array}{rcl} 300 \text{ €} & \rightarrow & 100 \% \\ 12 \text{ €} & \rightarrow & ? \end{array}$$

$$x = \frac{12 \cdot 100}{300} \% = 4 \%$$

Antwort: 12 € sind 4 % von 300 €.

Anmerkungen

Aus dem Lösungsbruch kann man die Formel für den Prozentsatz ablesen:

$$x = \frac{12 \text{ €} \cdot 100 \%}{300 \text{ €}}$$

Wir ersetzen darin:

$$\begin{aligned}x &= \text{Prozentsatz} = p \\ 12 \text{ €} &= \text{Prozentwert} = P \\ 300 \text{ €} &= \text{Grundwert} = G\end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Grundwert}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{P \cdot 100}{G}$$

Auch diese Formel werden wir nicht benutzen. Wie gesagt, ist der Dreisatz übersichtlicher und führt stets sicher zum Ziel.

3.4 Berechnung des Grundwertes

Wir betrachten ein konkretes Beispiel und vergewissern uns damit, dass der Grundwert abermals mithilfe eines Dreisatzes berechnet werden kann.

Beispiel

In einer Stadt gibt es 2000 Analphabeten, das sind 5 % der Einwohner. Wie viele Einwohner hat die Stadt?

Lösung 1 (Dreisatz, ausführlich)

Der Prozentwert von 2000 Menschen (Analphabeten) entspricht dem Prozentsatz von 5 %. Gesucht ist der Grundwert, die Einwohnerzahl der Stadt:

$$\begin{array}{ll} 5 \% & \rightarrow 2000 \text{ Menschen} \\ 100 \% & \rightarrow ? \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{lll} 5 \% & \rightarrow & 2000 \text{ Menschen} \\ 1 \% & \rightarrow & \frac{2000}{5} \text{ Menschen} = 400 \text{ Menschen} \\ 100 \% & \rightarrow & 100 \cdot 400 \text{ Menschen} = 40.000 \text{ Menschen} \end{array}$$

Antwort: Die Stadt hat 40.000 Einwohner.

Lösung 2 (Dreisatz, kurz)

Der Prozentwert von 2000 Menschen (Analphabeten) entspricht dem Prozentsatz von 5 %. Gesucht ist der Grundwert, die Einwohnerzahl der Stadt:

$$\begin{array}{lll} 5 \% & \rightarrow & 2000 \text{ Menschen} \\ 100 \% & \rightarrow & ? \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 2000}{5} \text{ Menschen} = 40.000 \text{ Menschen}$$

Antwort: Die Stadt hat 40.000 Einwohner.

Anmerkungen

Aus dem Lösungsbruch kann man die Formel für den Grundwert ablesen:

$$x = \frac{100 \% \cdot 200 \text{ Menschen}}{5 \%}$$

Wir ersetzen darin:

$$\begin{array}{lll} x & = & \text{Grundwert} = G \\ 2000 \text{ Menschen} & = & \text{Prozentwert} = P \\ 5 \% & = & \text{Prozentsatz} = p \end{array}$$

Dies ergibt:

$$\text{Grundwert} = \frac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Prozentsatz}} \quad \text{oder} \quad G = \frac{P \cdot 100}{p}$$

Auch diese Formel werden wir nicht benutzen. Wie gesagt, ist der Dreisatz übersichtlicher und führt stets sicher zum Ziel. Wir haben nunmehr die dritte Formel aus dem Dreisatz abgelesen. Dies zeigt das große Potential, das im Dreisatz schlummert.

3.5 Vermehrter Grundwert

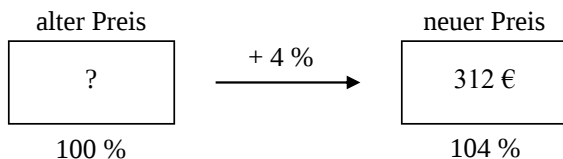
Wir betrachten ein typisches Beispiel für den vermehrten Grundwert: den neuen Preis nach einer Preiserhöhung. Die Lösung steht und fällt mit dem Erkennen des richtigen Grundwertes. Der **alte** Preis ist der **Grundwert**. Angenommen man sagt: „Die Preise werden um 4 % erhöht.“ Dann beziehen sich die 4 % offensichtlich auf den zurzeit noch aktuellen Preis, der ja nach der Erhöhung der **alte** Preis sein wird. Der neue Preis ist dann der *vermehrte* Grundwert.

Beispiel

Nach eine Preiserhöhung um 4 % kostet ein Artikel 312 €. Wie viel kostete er vorher?

Lösung (Dreisatz, kurz)

Überblick:



Der neue Preis von 312 € entspricht $100 \% + 4 \% = 104 \%$.

Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen, um die Aufgabe mit einem Dreisatz lösen zu können:

$$\begin{array}{rcl}
 104 \% & \rightarrow & 312 \text{ €} \\
 100 \% & \rightarrow & x
 \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 312}{104} \text{ €} = 300 \text{ €}$$

Antwort: Der Artikel kostete vorher 300 €.

3.6 Verminderter Grundwert

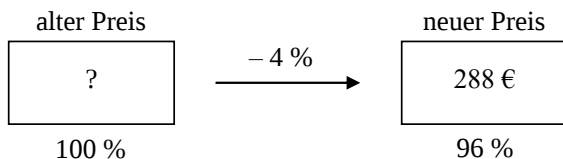
Wir betrachten ein typisches Beispiel für den verminderten Grundwert: den neuen Preis nach einer Herabsetzung des Preises. Die Lösung steht und fällt mit dem Erkennen des richtigen Grundwertes. Der **alte** Preis ist der **Grundwert**. Angenommen man sagt: „Die Preise werden um 4 % verringert.“ Dann beziehen sich die 4 % offensichtlich auf den zurzeit noch aktuellen Preis, der ja nach der Herabsetzung der **alte** Preis sein wird. Der neue Preis ist dann der *verminderte* Grundwert.

Beispiel

Nach einem Rabatt von 4 % kostet ein Artikel 288 €. Wie viel kostete er vorher?

Lösung (Dreisatz, kurz)

Überblick:



Der neue Preis von 288 € entspricht $100\% - 4\% = 96\%$.

Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen, um die Aufgabe mit einem Dreisatz lösen zu können:

$$\begin{array}{rcl} 96\% & \rightarrow & 288 \text{ €} \\ 100\% & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 288}{96} \text{ €} = 300 \text{ €}$$

Antwort: Der Artikel kostete vorher 300 €.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 3.2

1. Die Artikel mit den nachstehenden ursprünglichen Preisen werden mit einem Rabatt von 5 % verkauft. Berechne die Rabatte und neuen Preise.

- a) 99,99 €
- b) 41,99 €
- c) 30,95 €
- d) 7,50 €
- e) 99,50 €
- f) 27,49 €
- g) 260,49 €
- h) 69,49 €
- i) 2782,49 €
- j) 1767,99 €

2. Berechne die Rabatte und neuen Preise.

- a) 768,50 €, 15 %
- b) 745,95 €, 20 %
- c) 551,00 €, 25 %
- d) 225,99 €, 30 %
- e) 216,49 €, 35 %
- f) 50,95 €, 25 %
- g) 4545,49 €, 30 %
- h) 797,50 €, 10 %
- i) 2466,50 €, 20 %
- j) 2740,99 €, 10 %

3. Im Zuge des Winterschlussverkaufs werden die Preise der Artikel zweimal herabgesetzt. Berechne die Preise nach dem zweiten Preisnachlass.

- a) 68,- €, 20 %, 15 %
- b) 26,- €, 40 %, 10 %
- c) 45,- €, 40 %, 35 %

- d) 240,- €, 10 %, 35 %
- e) 347,- €, 30 %, 40 %
- f) 367,- €, 35 %, 10 %
- g) 215,- €, 40 %, 40 %
- h) 260,- €, 40 %, 40 %
- i) 29,- €, 20 %, 15 %
- j) 360,- €, 40 %, 15 %

4. Die folgenden Artikelpreise werden um den angegebenen Prozentsatz angehoben. Berechne die erhöhten Preise.

- a) 114,- €, 6,30 %
- b) 129,- €, 7,00 %
- c) 20,- €, 6,70 %
- d) 152,- €, 4,60 %
- e) 12,- €, 1,00 %
- f) 94,- €, 7,20 %
- g) 27,- €, 2,80 %
- h) 6,- €, 4,50 %
- i) 91,- €, 3,50 %
- j) 2,- €, 7,75 %

5. Der Alkoholgehalt einer 0,5-Liter-Flasche Bier beträgt laut Etikett 4,8 %. Wie viel Liter Alkohol enthält die Flasche?

6. Ein bestimmtes Schwellenland hat ca. 81,2 Mio. Einwohner.

- a) In absoluter Armut leben 30 %.
- b) 10 % der Bevölkerung sind Analphabeten:
- c) In den Städten leben 75 %.

Berechne die entsprechenden Bevölkerungsanteile.

7. Ein bestimmtes Land importiert Waren im Wert von 73 Mrd. US-Dollar (USD). Davon

- 16 % Maschinen und Ausrüstung
- 14 % Kfz u. -teile
- 8 % chemische Erzeugnisse
- 5 % Kunststoffserzeugnisse
- 3 % Eisen und Stahl

- 4 % Papier und Druckerzeugnisse

Berechne die Werte der Importe für die verschiedenen Bereiche.

8. Ein bestimmtes Land exportiert Waren im Wert von 80 Mrd. US-Dollar. Davon

- 27 % Elektrotechnik und Elektronik
- 17 % Kfz u. -teile
- 11 % Erdöl
- 4 % chemische Erzeugnisse
- 5 % Produkte der Land- und Forstwirtschaft

Berechne die Werte der Exporte für die verschiedenen Bereiche.

Aufgaben zu Kapitel 3.3

1. In einem Dorf haben 5327 Menschen eine Arbeit. Ferner gibt es 495 Arbeitslose.

- a) Wie viele Erwerbsfähige gibt es in dem Dorf?
- b) Wie viel Prozent der Erwerbsfähigen sind arbeitslos?

2. Ein Liter Milch kostete 0,65 €. Nun kostet er 0,68 €.

- a) Um wie viel Euro ist der Preis gestiegen?
- b) Um wie viel Prozent hat sich der Preis erhöht?

3. Im Zuge des Sommerschlussverkaufs wird der Preis eines Artikels zweimal herabgesetzt: von 119,- € auf 99 € und dann auf 80,- €.

- a) Um wie viel Prozent ist der Artikel jeweils herabgesetzt worden?
- b) Um wie viel Prozent ist der Artikel insgesamt herabgesetzt worden?

4. Im Fachgeschäft kostet ein Artikel 75,95 €. Bei einem Onlineshop wird derselbe Artikel für 69,95 € (inkl. Versand) angeboten. Wie viel Prozent kann man sparen, wenn man den Artikel beim Onlineshop kauft?

5. In einem Kaufhaus kostet ein Drucker 89,95 €. Dasselbe Druckermodell kann man im Onlineshop für 78,49 € zuzüglich 3,50 Versandkosten kaufen. Wie viel Prozent kann man sparen, wenn man den Artikel im Onlineshop erwirbt?

6. Der Preis eines Artikels hat sich von 1,50 € über 1,80 € auf 2,00 € erhöht. Wie groß war die jeweilige prozentuale Erhöhung?

7. Für Aktien im Werte von 18.000,- € erhält ein Aktionär eine Dividende von 1.278,- €. Wie viel Prozent des Aktienwertes hat er bekommen?

8. Ein Entwicklungsland hat 88,5 Mio. Einwohner. 35,4 Mio. leben in absoluter Armut, 38,1 Mio. sind Analphabeten, 34,5 Mio. leben in Städten. Ferner sind 39,8 Mio. Muslime, 23,0 Mio. Protestanten und 10,6 Mio. Katholiken. Berechne die prozentualen Anteile und runde sie auf ganze Zahlen.

9. Ein bestimmtes Entwicklungsland importiert Waren im Wert von 5,45 Mrd. US-Dollar. Davon

- a) 1,70 Mrd. US-Dollar Maschinen
- b) 1,37 Mrd. US-Dollar Chemikalien
- c) 1,21 Mrd. US-Dollar verarbeitete Güter
- d) 0,589 Mrd. US-Dollar Lebensmittel

Berechne die prozentualen Anteile der Importe für die verschiedenen Güter.

10. Ein bestimmtes Entwicklungsland exportiert Waren im Wert von 11,31 Mrd. USD. Davon entfallen 11,13 Mrd. USD auf Erdöl. Wie viel Prozent sind das?

Aufgaben zu Kapitel 3.4

1.

a) Im Oktober 2023 betrug die Arbeitslosenquote in Deutschland 5,7 %. Es waren 2,60 Millionen Menschen arbeitslos (gemeldet). Wie viele Erwerbsfähige gab es? Wie viele erwerbstätige Menschen gab es im Oktober 2023?

b) Im Mai 2007 betrug die Arbeitslosenquote in Deutschland 9,1 %. Es waren 3,81 Millionen Menschen arbeitslos (gemeldet). Wie viele erwerbsfähige Menschen gab es? Wie viele Erwerbstätige gab es im Mai 2007?

2. In einem Land gibt es 3,92 Millionen Analphabeten, was einem Anteil von 9 % entspricht. Wie viele Millionen Einwohner hat das Land?

3. Eine Kommune erhöht den Sozialhaushalt um 13 % und gibt dadurch 2.683.512,- € mehr aus. Errechnen sie den ursprünglichen Sozialhaushalt.

4. Beim Kauf eines Artikels sind 7,97 € Mehrwertsteuer bezahlt worden. Wie viel hat man für den Artikel bezahlt, wenn der Mehrwertsteuersatz 19 % beträgt?

5. Peter Schluckspecht hat Kölsch getrunken (4,8 % Alkohol). Er hat ein knappes halbes Glas reinen Alkohols zu sich genommen. Wie viele Gläser (0,2 Liter) Kölsch hat er getrunken?

6. In einem Entwicklungsland leben 30 Millionen Einwohner (36 % der Bevölkerung) in absoluter Armut. Wie viele Millionen Menschen leben in diesem Land?

7. Eine Person zahlt monatlich 780,- € Miete, das sind 35 % des Monatseinkommens. Berechne das Monatseinkommen.

8. In einem Staat leben 60,9 Millionen Einwohner auf dem Land, und 25 % in Städten. Wie viele Millionen Einwohner hat das Land?

9. Ein bestimmtes Land importiert Maschinen und Ausrüstung im Wert von 11,68 Mrd. US-Dollar, das sind 16 % des gesamten Imports. Wie viele Milliarden US-Dollar beträgt der gesamte Import.

10. Ein bestimmtes Land exportiert Erdöl im Wert von 8,80 Mrd. US-Dollar, das sind 11 % des gesamten Exports. Wie viele Milliarden US-Dollar beträgt der gesamte Export.

11.

a) Einem nebenberuflichen Versicherungsagenten werden zwei Lohnoptionen angeboten:

Option 1: monatlich 200,- € fest.

Option 2: 4 % des Umsatzes.

Ab welchem Umsatz beginnt die zweite Option günstiger zu werden?

b) Einem nebenberuflichen Versicherungsagenten werden zwei Lohnoptionen angeboten:

Option 1: monatlich 200,- € fest und 3 % des Umsatzes.

Option 2: 7 % des Umsatzes.

Ab welchem Umsatz beginnt die zweite Option günstiger zu werden?

Aufgaben zu Kapitel 3.5 und 3.6

1. Nach einer Preiserhöhung um 10,1 % kostet ein Artikel nun 4,90 €. Was kostete der Artikel vorher?

2. Nach einem Rabatt von 4 % kostet ein Artikel nun 17,23 €. Was kostete der Artikel vorher?

3. Ein Land hat 91,2 Millionen Einwohner. Wie viele Millionen Einwohner hatte es vor einem Jahr, wenn das jährliche Bevölkerungswachstum 2,2% beträgt?

4. Ein Drucker kostet 84,95 €. Wie viel Mehrwertsteuer ist darin enthalten, wenn der Steuersatz 19 % beträgt?

5. Die Einnahmen eines Staates aus der Mineralölsteuer steigen gegenüber dem Vorjahr um 5,2 % auf 40,81 Milliarden US-Dollar. Wie hoch waren die Einnahmen ein Jahr zuvor?

6. Die tatsächlichen Anschaffungskosten für neue Kampfflugzeuge liegen bei 17,3 Milliarden Euro. Sie liegen um 28 % höher als vom Hersteller veranschlagt. Welche Kosten waren ursprünglich angesetzt?

7. Im Vorwahljahr ist der Sozialetat um 5 % auf 53,7 Milliarden Euro erhöht worden. Wie hoch war der Sozialetat davor?
8. Der Preis eines Artikels ist dreimal gestiegen: zunächst um 7 % gestiegen, dann um 2 % und schließlich um 4 %. Er kostet jetzt 430,75 €. Wie viel kostete der Artikel ursprünglich?
9. Ein Schwellenland hat gegenwärtig 91,2 Millionen Einwohner. Die Bevölkerung wächst jährlich um 1,9 %. Wie viele Einwohner hatte das Land vor drei Jahren?
10. Nach der Herabsetzung um 20 % kosten vier Artikel im Sommerschlussverkauf nun 15,16 €, 10,- €, 3,99 € und 30 €. Wie hoch waren die Preise vorher?
11. In einem Kaufhaus wird ein hochwertiger Sternatlas um 80 % herabgesetzt und kostet nun 2,95 €. Was kostete der Atlas vorher?
12. Ein neues Automodell verbraucht 5,2 Liter Benzin auf 100 km. Damit liegt der Verbrauch 6 % unter dem des Vorgängermodells. Berechne den Verbrauch des Vorgängers.
13. Die Einnahmen eines Staates aus dem Erdöllexport fielen gegenüber dem Vorjahr um 6 % auf 42,13 Milliarden Dollar. Wie hoch waren die Einnahmen ein Jahr zuvor?
14. Eine koreanische Anlagenbau-Firma stellt ein Walzwerk in 46 Wochen fertig. Sie bleibt damit um 8 % unter der vertraglich festgelegten Zeitvorgabe. Welche Zeit stand im Vertrag?
15. Der Bildungsetat eines Landes ist im Vergleich zum Vorjahr um 5 % gekürzt worden und beträgt nun 3,42 Mrd. US-Dollar. Wie hoch war der Bildungsetat vor einem Jahr?
16. Der Preis für einen PC fiel um 4 %, dann um 5 % und schließlich 7 %. Er kostet jetzt 865,- €. Wie viel kostete er früher?

Übergreifende Aufgaben zu Kapitel 3

1. Ein Artikel kostet 80,- €. Wie viel würde er kosten, wenn der Mehrwertsteuersatz von 19 % auf 21 % erhöht würde? Um wie viel Prozent würde der Artikel teurer?
2. Eine Flasche Kölsch (0,5 l) enthält 4,8 % Alkohol.
 - a) Wie viel Liter Alkohol enthält die Flasche?
 - b) Wie viel Liter Alkohol enthält ein Glas Kölsch (0,2 l).
 - c) Wie viel Prozent Alkohol enthalten 0,2 l Alsterwasser (60 % Kölsch und 40 % Limonade)?
3. Der Verkaufspreis eines Artikels beträgt 35,- €. Wie viel würde er kosten, wenn der Mehrwertsteuersatz von 19 % auf 20, 21, 22 bzw. 23 Prozent erhöht würde? Um wie viel Prozent würde der Artikel jeweils teurer?
4. Eine LED-Lampe hat bei einer Leistungsaufnahme von 7 Watt dieselbe Leuchtkraft wie eine herkömmliche 60-Watt-Glühlampe.
 - a) Wie viel Prozent Energie spart man durch die Energiesparlampe?
 - b) Ein Kohlekraftwerk hat einen Wirkungsgrad von 70% (d.h. 70% der Kohle-Energie wird in Elektrizität umgewandelt.) Wie viel Prozent der Energie geht beim Weg von der Kohle zum Licht der Glühlampe verloren, wenn eine Energiesparlampe einen Wirkungsgrad von etwa 100% hat? (Tipp: Kohle-Energie für die Glühlampe?)
5. Ein Tanklastwagen startet mit 30.000 l Wasser. Auf dem Weg in die Dürrezone verliert er durch ein Leck im Tank 30 % des Wassers. Von dem verbleibenden Wasser gehen außerdem 20 % durch Verdunstung verloren. Wie viel Liter Wasser werden insgesamt genutzt? Wie viel Prozent des auf den Weg gebrachten Wassers gehen insgesamt verloren?
6. Im Oktober 2003 waren in Deutschland 37,44 Millionen Menschen erwerbstätig, die Arbeitslosenquote betrug 10,1 %. Wie viele Erwerbsfähige gab es?

7. Die Wirtschaft des Landes A wächst jährlich um 1,8 %. Die Wirtschaft des Landes B beträgt 80% von der Wirtschaft des Landes A und hat ein Wachstum von 2,3% pro Jahr. Welches Wirtschaftswachstum haben beide Länder zusammen? (Tipp: A hat 100 Einheiten.)
8. Wie viel Prozent Alkohol enthält die Mischung aus 2 Litern 6-prozentigen und 3 Litern 4,6-prozentigen Alkohols?
9. Der Preis eines Artikels fällt im 1. Jahr um 4 % und steigt im 2. Jahr um 4 %. Ist der Artikelpreis in den 2 Jahren insgesamt gestiegen, gefallen oder gleich geblieben?
10. Der neue Mitgliedstaat hat 8 % der Bevölkerung des erweiterten Staatenbundes. Um wie viel Prozent hat die Bevölkerung des Staatenbundes durch die Erweiterung zugenommen? (Tipp: Man kann für die Bevölkerung des Staatenbundes einen beliebigen Wert ansetzen.)
11. Das Nationaleinkommen eines Landes steigt um 3,4 % jährlich, die Bevölkerung steigt um 2,1 % pro Jahr. Um wie viel Prozent steigt das Pro-Kopf-Einkommen in einem Jahr? (Tipp: Man kann für die Anfangssituation beliebige Werte ansetzen.)
12. Es werden 100 g Vollmilch (3,5 % Fett), 100 g fettarme Milch (1,5 % Fett) und 100 g entrahmte Milch (0,3 % Fett) vermischt. Wie viel Gramm Fett enthält die Mischung? Wie hoch ist der Fettgehalt der Mischung?

Schwierige Aufgaben zu Kapitel 3

1. Das Nationaleinkommen eines Landes steigt um 1,2 % jährlich, die Bevölkerung steigt um 3,0 % pro Jahr. Um wie viel Prozent sinkt das Pro-Kopf-Einkommen? (Tipp: Man kann für die Anfangssituation beliebige Werte ansetzen.)
2. Es werden 200 g Vollmilch (3,5 % Fett), 300 g fettarme Milch (1,5 % Fett) und 100 g entrahmte Milch (0,3% Fett) vermischt. Wie hoch ist der Fettgehalt der Mischung?

3. Wie viel Wasser ist 100 g Vollmilch (3,5 % Fett) beizumischen, damit der Fettgehalt auf 1,5 % sinkt?
4. Wie viel Wasser ist 100 g entrahmte Milch (0,3 % Fett) zu entziehen, damit der Fettgehalt auf 1,5 % steigt?
5. Wie viel Fett ist 100 g entrahmter Milch (0,3 % Fett) beizumischen, damit der Fettgehalt auf 1,5 % steigt?
6. Wie viel Fett ist 100 g Vollmilch (3,5 % Fett) zu entziehen, damit der Fettgehalt auf 1,5 % sinkt?
7. Wie viel entrahmte Milch (0,3 % Fett) ist 100 g Vollmilch (3,5 % Fett) beizumischen, damit der Fettgehalt auf 1,5 % sinkt? (Tipp: Aufgabe 3 und 4)
8. Wie viel Vollmilch (3,5 % Fett) ist 100 g entrahmter Milch (0,3 % Fett) beizumischen, damit der Fettgehalt auf 1,5 % steigt? (Tipp: Aufgabe 5 und 6)
9. Das Land A hat doppelt so viele Einwohner wie das Land B. Die Bevölkerung von A ist konstant. Die Bevölkerung von B steigt jährlich um 3,1 %. Nach wie vielen Jahren werden die Bevölkerungen gleich sein?

4. Zinsrechnen

4.1 Einführung

Für ein Sparguthaben bekommt man von der Bank jährlich einen gewissen Betrag, die Zinsen (lat. *census*, Schätzung, Steuer). Nimmt man einen Kredit auf, so muss man Zinsen zahlen. Die Höhe der Zinsen hängt vom Kapital (Sparguthaben, Kreditbetrag), dem Zinssatz und der Laufzeit ab.

Der Zinssatz bezieht sich normalerweise auf **ein Jahr** und gibt an, wie viel Prozent des Kapitals in einem Jahr als Zinsen anfallen.

Wenn die Laufzeit weniger als 1 Jahr beträgt, wird von den Zinsen für ein Jahr der entsprechende Anteil berechnet.

Übersteigt die Laufzeit ein Jahr, so ist die Situation etwas komplizierter. Bei einem Kredit werden die Zinsen nach einem Jahr **nicht addiert** (Zinseszinsverbot, § 248 Bürgerliches Gesetzbuch). Der ursprüngliche Kreditbetrag bleibt daher maßgeblich bei der Berechnung der Zinsen. Die Zinsen für 3 Jahre sind dann schlichtweg das Dreifache der Zinsen für ein Jahr.

Bei einem Sparguthaben werden die Zinsen nach einem Jahr addiert. Grundlage für die Zinsberechnung ist nun das erhöhte Sparguthaben. Von den alten Zinsen bekommt man gewissermaßen wieder Zinsen. Diese Situation fällt in das Kapitel *Zinseszins*.

Gelegentlich sind die Zinsen gegeben und man möchte eine der Größen Kapital, Zinssatz und Laufzeit berechnen.

Folgende Themen der Zinsrechnung werden behandelt:

- Jahreszinsen (**ohne** Aufschlag der Zinsen)
- Monats- und Tageszinsen
- Berechnung von Kapital, Zinssatz, Laufzeit

- Zinseszins (Jahreszinsen, mit jährlichem **Aufschlag** der Zinsen)

Lediglich beim Thema Zinseszins werden wir auch auf Formeln zurückgreifen. Diese Formeln werden wir selbstverständlich herleiten. Alle übrigen Aufgaben werden mithilfe von **Dreisätzen** gelöst.

4.2 Jahreszinsen

Wir berechnen nun die Zinsen für einen **Kredit**, der eine glatte Zahl von Jahren läuft. Das Bürgerliche Gesetzbuch (§ 248) verbietet, die Zinsen zum Schuldbetrag zu addieren und davon Zinsen zu erheben. Durch diese gesetzliche Vorgabe bleibt der **Schuldbetrag** im Laufe der betrachteten Jahre **unverändert**.

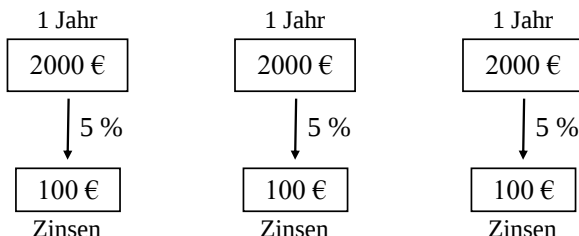
Der Zinssatz bezieht sich normalerweise auf **ein Jahr**. Dies wird heutzutage meist durch den Zusatz *p. a.* (italienisch *per anno*, pro Jahr) mitgeteilt: z. B. 5 % p. a. Indem man 5 % des Kreditbetrages berechnet, hat man also die **Zinsen für ein Jahr** berechnet. Diese Größe ist der Schlüssel zur Lösung vieler Aufgaben.

Beispiel 1

Für einen Kredit von 2000,- € werden 5% p. a. Zinsen verlangt. Der Kredit läuft 3 Jahre. Wie viel Zinsen fallen an?

Lösung (Dreisatz)

Eine kleine Grafik stellt das Geschehen in den drei Jahren, in denen der Kredit läuft, dar. In jedem der Jahre ist der Kreditbetrag gleich (2000 €), ebenso die anfallenden Zinsen:



1. Zinsen in einem Jahr:

$$\begin{array}{rcl} 100 \% & \rightarrow & 2000 \text{ €} \\ 5 \% & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{5 \cdot 2000}{100} \text{ €} = 100 \text{ €}$$

2. Zinsen in 3 Jahren:

In 3 Jahren fallen dreimal so viele Zinsen an wie in einem Jahr:

$$3 \cdot 100 \text{ €} = 300 \text{ €}$$

Antwort: Es fallen 300,- € Zinsen an.

Die Jahreszinsformel (Kip-Formel)

Die Rechnungen in dem vorangehenden Beispiel können in einem Bruch zusammengefasst werden, der eine Formel zur Berechnung der Jahreszinsen liefert:

$$\text{Zinsen für 1 Jahr: } \frac{5 \cdot 2000}{100} \text{ €}$$

$$\text{Zinsen für 3 Jahre: } 3 \cdot \frac{5 \cdot 2000}{100} \text{ €} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2000}{100} \text{ €}$$

Wir ersetzen darin:

$$\text{Zinsen für 3 Jahre} = Z$$

$$\begin{aligned}3 &= \text{Anzahl de Jahre} = i \\2000 \text{ €} &= \text{Kreditbetrag} = K \\5 \% &= \text{Zinssatz} = p\end{aligned}$$

Dies ergibt die Formel:

$$Z = \frac{i \cdot p \cdot K}{100}$$

Man kann die Buchstaben im Zähler so anordnen, dass sie ein aussprechbares Wort bilden:

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100}$$

Das ist die *Kip-Formel* (*Kip durch Hundert*) zur Berechnung der Jahreszinsen bei **Krediten**.

Diese Formel werden wir kaum benutzen. Sie ist in der Tabellenkalkulation oder bei der Programmierung nützlich. Der ausführliche Rechenweg mithilfe von Dreisätzen ist erhellender und lässt besser verstehen, was tatsächlich passiert.

Beispiel 2

Für einen Kredit von 12.000,- € werden 8% p. a. Zinsen verlangt. Der Kredit hat eine Laufzeit von 5 Jahren. Wie viel Zinsen fallen an?

Lösung (Kip-Formel)

Wir benutzen die Kip-Formel:

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100}$$

Und setzen die gegebenen Werte ein:

$$Z = \frac{12.000 \text{ €} \cdot 5 \cdot 8 \%}{100 \%} = \frac{12.000 \cdot 5 \cdot 8}{100} \text{ €} = 4.800 \text{ €}$$

Antwort: Es fallen 4.800,- € Zinsen an.

4.3 Monatszinsen

Bei der Laufzeit legen wir die Vereinfachungen der deutschen kaufmännischen Rechnung zugrunde:

1 Jahr = 360 Tage

1 Jahr = 12 Monate

1 Monat = 30 Tage

Dabei spielt es keine Rolle, dass die Monate des Kalenders unterschiedlich viele Tage haben, und ein normales Kalenderjahr 365 Tage umfasst, ein Schaltjahr aber 366 Tage. Diese Vereinfachungen sind nicht so außergewöhnlich, wie man denken könnte. Der Vollwinkel (der einem Jahr entspricht) ist seit altbabylonischen Zeiten 360°.

Das Thema *Monatszinsen* (Zinsen bei einer Laufzeit von einigen *Monaten*) ist nur im Rahmen der *deutschen* kaufmännischen Zinsrechnung sinnvoll, da alle Monate gleichermaßen mit 30 Tagen angesetzt werden.

Monatszinsen werden berechnet, indem man zunächst die Zinsen für ein Jahr findet. Aus diesen Zinsen für ein Jahr (= 12 Monate) kann man die Zinsen für die gegebene Anzahl von Monaten per Dreisatz berechnen. Die gesamte Prozedur kann auch zu einer Formel zusammengefasst werden.

Wir betrachten nun an einem Beispiel, wie man die Monatszinsen mit Dreisätzen berechnen kann. Danach entwickeln wir die Monatszins-Formel, die schließlich bei einem weiteren Beispiel angewendet wird.

Beispiel 1

Gegeben: Kredit

- * Kreditbetrag: 12.000 €
- * Zinssatz: 8 % p. a.
- * Laufzeit: 7 Monate

Gesucht: Zinsen

Lösung (Dreisatz)

1. Zinsen für ein Jahr:

$$100 \% \rightarrow 12.000 \text{ €}$$

$$8 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{8 \cdot 12.000}{100} \text{ €} = 960 \text{ €}$$

2. Zinsen für 7 Monate:

$$12 \text{ Monate} \rightarrow 960 \text{ €}$$

$$1 \text{ Monat} \rightarrow \frac{960}{12} \text{ €} = 80 \text{ €}$$

$$7 \text{ Monate} \rightarrow 7 \cdot 80 \text{ €} = 560 \text{ €}$$

Antwort: Die Zinsen für den Kredit betragen 560,- €.

Die Formel für die Monatszinsen

Die Rechnungen in dem vorangehenden Beispiel können in einem Bruch zusammengefasst werden, der eine Formel zur Berechnung der Monatszinsen liefert:

$$\text{Zinsen für 1 Jahr: } \frac{8 \cdot 12.000}{100} \text{ €}$$

$$\text{Zinsen für 1 Monat: } \frac{8 \cdot 12.000}{100} \text{ €} : 12 = \frac{8 \cdot 12.000}{100 \cdot 12} \text{ €}$$

$$\text{Zinsen für 7 Monate: } \frac{8 \cdot 12.000}{100 \cdot 12} \text{ €} \cdot 7 = \frac{8 \cdot 12.000 \cdot 7}{100 \cdot 12} \text{ €}$$

Wir ersetzen darin:

$$\text{Zinsen für 7 Monate} = Z$$

$$7 = \text{Anzahl de Monate} = m$$

$$12.000 \text{ €} = \text{Kreditbetrag} = K$$

$$8 \% = \text{Zinssatz} = p$$

Dies ergibt die Formel:

$$Z = \frac{p \cdot K \cdot m}{100 \cdot 12}$$

Wie in der Kip-Formel schreiben wir K zuerst:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$$

Die Formel hat eine schöne Struktur: Zusammengehöriges steht übereinander (Zinssatz p über 100, die Monatsanzahl m über 12).

Diese Formel werden wir kaum benutzen. Sie ist in der Tabellenkalkulation oder bei der Programmierung nützlich. Der ausführliche Rechenweg mithilfe von Dreisätzen ist erhellender und lässt besser verstehen, was tatsächlich passiert.

Beispiel 2

Für einen Kredit von 5.000,- € werden 7% p. a. Zinsen verlangt. Der Kredit hat eine Laufzeit von 10 Monaten. Wie viel Zinsen fallen an?

Lösung (Formel)

Wir benutzen die Monatszins-Formel:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$$

Und setzen die gegebenen Werte ein:

$$Z = \frac{5.000 \cdot 7 \cdot 10}{100 \cdot 12} \text{ €} = 291,666... \text{ €} \approx 291,67 \text{ €}$$

Antwort: Es fallen 291,67 € Zinsen an.

4.4 Tageszinsen

Wir rekapitulieren die Vereinfachungen der deutschen kaufmännischen Rechnung:

1 Jahr = 360 Tage

1 Jahr = 12 Monate

1 Monat = 30 Tage

Tageszinsen (Zinsen bei einer Laufzeit von *Tagen*) werden berechnet, indem man zunächst diese Zinsen für ein Jahr findet. Aus diesen Zinsen für ein Jahr (= 360 Tage) kann man die Zinsen für die gegebene Anzahl von Tagen per Dreisatz berechnen. Die gesamte Prozedur kann auch zu einer Formel zusammengefasst werden.

Zinstage

Normalerweise wird die Laufzeit durch einen Zeitraum mit einem Anfangs- und Enddatum mitgeteilt, zum Beispiel:

03.01. bis 22.04.

In der deutschen Zinsrechnung wird der **erste Tag nicht** berücksichtigt. Als Eselsbrücke kann die Vorstellung dienen, dass am ersten Tag der Vertrag abgeschlossen wird und dazu die Kreditwürdigkeit des Kunden geprüft wird.

Der 3. Januar wird also nicht mitgezählt. Daher fallen **drei** Tage im Januar weg: 1., 2. und 3. Januar. Im Januar bleiben also

$$30 \text{ Tage} - 3 \text{ Tage} = 27 \text{ Tage}$$

Die vollen Monate Februar und März werden mit jeweils 30 Tagen veranschlagt.

Vom April sind 22 Tage (vom 1. Bis zum 22.) zu berücksichtigen. Insgesamt ergeben sich also

$$27 \text{ Tage} + 30 \text{ Tage} + 30 \text{ Tage} + 22 \text{ Tage} = 109 \text{ Tage}$$

Diese 109 Tage, die bei der Zinsberechnung zu berücksichtigen sind, nennt man **Zinstage**.

Wir fassen die durchgeführten Berechnungen für den praktischen Gebrauch zusammen:

Zeitraum: 03.01. bis 22.04.

Zinstage:

Januar: $30 - 3 = 27$

Februar: 30

März: 30

April: 22

Insgesamt: $27 + 30 + 30 + 22 = 109$

Es sind also 109 Zinstage zu berücksichtigen.

Anmerkung

Wenn das Enddatum der 28.02 (oder im Schaltjahr der 29.02) ist, schlägt der Februar mit **28** (im Schaltjahr **29**) Zinstagen zu Buche. Es ist dabei unerheblich, dass der gesamte Februar erfasst wird.

Wir betrachten nun ein Beispiel, in dem die Zinstage und die Tageszinsen berechnet werden. Danach entwickeln wir die

Tageszins-Formel, die schließlich bei einem weiteren Beispiel angewendet wird.

Beispiel 1

Gegeben: Kredit

- * Kreditbetrag: 2.000 €
- * Zinssatz: 9 % p. a.
- * Laufzeit: 23.03. – 19.07.

Gesucht: Zinsen

Lösung

1. Zinstage:

Zeitraum: 23.03. – 19.07.

März: $30 - 23 = 7$

April: 30

Mai: 30

Juni: 30

Juli: 19

Insgesamt: $7 + 3 \cdot 30 + 19 = 116$

Es sind also 116 Zinstage zu berücksichtigen

2. Zinsen für ein Jahr:

$$100 \% \rightarrow 2.000 \text{ €}$$

$$9 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{9 \cdot 2.000}{100} \text{ €} = 180 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr (=360 Tage) betragen also 180 €.

3. Zinsen für 116 Tage:

$$360 \text{ Tage} \rightarrow 180 \text{ €}$$

$$1 \text{ Tag} \rightarrow \frac{180}{360} \text{ €} = 0,50 \text{ €}$$

$$116 \text{ Tage} \rightarrow 116 \cdot 0,50 \text{ €} = 58 \text{ €}$$

Antwort:

Die Zinsen für den Kredit betragen 58,- €.

Die Formel für die Tageszinsen

Die Rechnungen in dem vorangehenden Beispiel können in einem Bruch zusammengefasst werden, der eine Formel zur Berechnung der Tageszinsen liefert:

$$\text{Zinsen für 1 Jahr: } \frac{9 \cdot 2.000}{100} \text{ €}$$

$$\text{Zinsen für 1 Tag: } \frac{9 \cdot 2.000}{100} \text{ €} : 360 = \frac{9 \cdot 2.000}{100 \cdot 360} \text{ €}$$

$$\text{Zinsen für 116 Tage: } \frac{9 \cdot 2.000}{100 \cdot 360} \text{ €} \cdot 116 = \frac{9 \cdot 2.000 \cdot 116}{100 \cdot 360} \text{ €}$$

Wir ersetzen darin:

$$\text{Zinsen für 116 Tage} = Z$$

$$116 = \text{Anzahl der Tage} = t$$

$$2.000 \text{ €} = \text{Kreditbetrag} = K$$

$$9 \% = \text{Zinssatz} = p$$

Dies ergibt die Formel:

$$Z = \frac{p \cdot K \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Wie in der Kip-Formel schreiben wir K zuerst:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Die Formel hat wieder eine schöne Struktur: Zusammengehöriges steht übereinander (Zinssatz p über 100, die Tagesanzahl t über 360).

Auch diese Formel werden wir kaum benutzen. Sie ist in der Tabellenkalkulation oder bei der Programmierung nützlich. Der ausführliche Rechenweg mithilfe von Dreisätzen ist erhellender und lässt besser verstehen, was tatsächlich passiert.

Beispiel 2

Für einen Kredit von 6.000,- € werden 9% p. a. Zinsen verlangt. Der Kredit hat eine Laufzeit von 18 Tagen. Wie viel Zinsen fallen an?

Lösung (Formel)

Wir benutzen die Tageszins-Formel:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Und setzen die gegebenen Werte ein:

$$Z = \frac{6.000 \cdot 9 \cdot 18}{100 \cdot 360} \text{ €} = 27,00 \text{ €}$$

Antwort: Es fallen 27,- € Zinsen an.

Anmerkung 1

Bei den betrachteten Beispielen sind Laufzeiten weniger als ein Jahr. Daher wäre die Berechnung bei Guthaben statt Krediten identisch. Bei Guthaben werden erst nach Ablauf eines vollständigen Jahres Zinsen hinzugefügt, also anders als bei Krediten vorgegangen.

Anmerkung 2

Tageszinsen können auch mithilfe eines zusammengesetzten Dreisatzes berechnet werden. Ausgangspunkt ist dabei der Umstand, dass die Zinsen für 1 Jahr (360 Tage) bei einem Zinssatz von 100 % einfach der Kreditbetrag sind:

$$100 \% \rightarrow 360 \text{ Tage} \rightarrow 6.000 \text{ €}$$

$$9 \% \rightarrow 18 \text{ Tage} \rightarrow x$$

Alle Verhältnisse sind gerade, also:

$$x = \frac{9 \cdot 18 \cdot 6.000}{100 \cdot 360} \text{ €} = 27 \text{ €}$$

4.5 Berechnung von Kapital, Zinssatz und Laufzeit

Bisher haben wir stets die Zinsen berechnet. Nun widmen wir uns der umgekehrten Problematik: Bei gegebenen Zinsen soll eine der anderen Größen gefunden werden: Kapital, Zinssatz oder Laufzeit.

Wenn einem der Umgang mit Gleichungen vertraut ist, kann man das Problem durch Umstellen der Zinsformeln lösen.

Wir gehen einen elementaren Weg und benutzen Dreisätze und den gesunden Menschenverstand. In allen Fällen führen die folgenden zwei Schritte zum Ziel:

1. **Zinsen für 1 Jahr** berechnen (einfacher Dreisatz)

2. Gesuchte Größe berechnen (einfacher Dreisatz)

Wir betrachten nun drei Beispiele, nämlich zu jeder der Größen Kapital (Kreditbetrag), Zinssatz und Laufzeit.

Beispiel 1 (Kapital)

Gegeben: Kredit

* Zinssatz: 9 % p. a.

* Laufzeit: 18 Tage

* Zinsen: 27 €

Gesucht: Kreditbetrag (Kapital)

Lösung**1. Zinsen für ein Jahr:**

$$\begin{array}{ll} 18 \text{ Tage} & \rightarrow 27 \text{ €} \\ 360 \text{ Tage} & \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{360 \cdot 27}{18} \text{ €} = 540 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr betragen also 540 € (entspricht 9 %).

2. Kreditbetrag:

$$\begin{array}{ll} 9 \% & \rightarrow 540 \text{ €} \\ 100 \% & \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 540}{9} \text{ €} = 6.000 \text{ €}$$

Antwort: Der Kreditbetrag ist 6.000,- €.

Beispiel 2 (Zinssatz)

Gegeben: Kredit

- * Kreditbetrag: 6.000 €
- * Laufzeit: 18 Tage
- * Zinsen: 27 €

Gesucht: Zinssatz

Lösung**1. Zinsen für ein Jahr:**

$$\begin{array}{ll} 18 \text{ Tage} & \rightarrow 27 \text{ €} \\ 360 \text{ Tage} & \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{360 \cdot 27}{18} \text{ €} = 540 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr (=360 Tage) betragen also 540 €.

2. Zinssatz:

$$6.000 \text{ €} \rightarrow 100 \%$$

$$540 \text{ €} \rightarrow x$$

$$x = \frac{540 \cdot 100}{6.000} \% = 9 \%$$

Antwort: Der Zinssatz beträgt 9 %.

Beispiel 3 (Laufzeit)

Gegeben: Kredit

* Kreditbetrag: 6.000 €

* Zinssatz: 9 %

* Zinsen: 27 €

Gesucht: Laufzeit

Lösung

1. Zinsen für ein Jahr:

$$100 \% \rightarrow 6.000 \text{ €}$$

$$9 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{9 \cdot 6.000}{100} \text{ €} = 540 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr betragen also 540 €.

2. Laufzeit:

$$540 \text{ €} \rightarrow 360 \text{ Tage}$$

$$27 \text{ €} \rightarrow x$$

$$x = \frac{27 \cdot 360}{540} \text{ Tage} = 18 \text{ Tage}$$

Antwort: Die Laufzeit beträgt 18 Tage.

4.6 Zinseszins

Wir betrachten ein Guthaben, das über mehrere Jahre auf einem Sparkonto liegt. Nach jedem Jahr werden die Zinsen gutgeschrieben, das Guthaben erhöht sich. Auch die Zinsen im nachfolgenden Jahr nehmen zu, weil die Zinsen der Zinsen hinzukommen. Diese Situation möchten wir hier rechnerisch in den Griff bekommen. Der entscheidende Ansatz ist, dass man jeweils das **Guthaben** auf einen Schlag ausrechnet, und nicht die Zinsen. Man rechnet also nicht die 5 % Zinsen von 2000 € aus und addiert sie, sondern man rechnet einfach 105 % von 2000 € (wie beim vermehrten Grundwert).

Das folgende Beispiel zeigt die Einzelheiten des Verfahrens. Aus dem Lösungsweg kann man dann wieder Formeln ablesen. In der Praxis sind diese Formeln unverzichtbar, da sie die langwierige Jahr-für-Jahr-Berechnung in einer Potenz zusammenfassen. Früher waren diese Potenzen der Zinsfaktoren tabelliert, seit der allgemeinen Verbreitung von Taschenrechner und Computern sind sie mühelos berechenbar.

Beispiel 1 (mit ausführlicher Lösung)

Gegeben: Sparguthaben

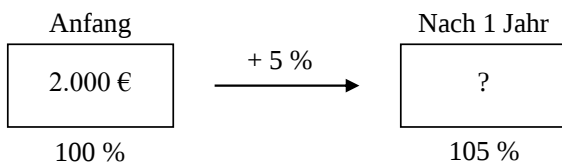
- * Kapital: 2.000 €
- * Zinssatz: 5 % p. a.
- * Laufzeit: 3 Jahre

Gesucht: Endguthaben

Lösung

1. Guthaben nach 1 Jahr

Überblick:



Das Guthaben nach einem Jahr entspricht $100\% + 5\% = 105\%$. Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen für den Dreisatz:

$$\begin{array}{ll} 100\% & \rightarrow 2.000\text{ €} \\ 105\% & \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{105\% \cdot 2.000\text{ €}}{100\%}$$

Wir ziehen den Eurobetrag vor den Bruch. Dadurch sind die feststehenden Prozentangaben von dem im Laufe der Jahre sich verändernden Guthaben getrennt. Ferner berechnen wir den Bruch, der als *Zinsfaktor* bezeichnet wird:

$$x = 2.000\text{ €} \cdot \frac{105\%}{100\%} = 2.000\text{ €} \cdot \mathbf{1,05} = 2.100\text{ €}$$

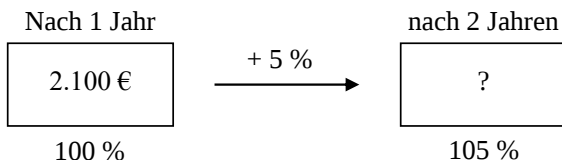
Zinsfaktor
↓

Rechnerisch betrachtet, ergibt sich das neue Guthaben denkbar einfach durch bloßes **Multiplizieren** mit dem **Zinsfaktor**.

Das Guthaben nach einem Jahr beträgt 2100 €.

2. Guthaben nach 2 Jahren

Überblick:



Das Guthaben nach einem Jahr entspricht $100\% + 5\% = 105\%$. Die Übersicht enthält wieder alle Informationen und Zuordnungen für den Dreisatz:

$$100 \% \rightarrow 2.100 \text{ €}$$

$$105 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{105 \% \cdot 2.100 \text{ €}}{100 \%}$$

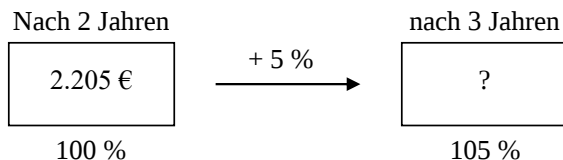
Wir ziehen den Eurobetrag vor den Bruch. Dadurch sind die feststehenden Prozentangaben von dem im Laufe der Jahre sich verändernden Guthaben getrennt. Ferner berechnen wir den Bruch:

$$x = 2.100 \text{ €} \cdot \frac{105 \%}{100 \%} = 2.100 \text{ €} \cdot \overset{\text{Zinsfaktor}}{\downarrow} \mathbf{1,05} = 2.205 \text{ €}$$

Rechnerisch betrachtet, ergibt sich das neue Guthaben wieder einfach durch bloßes **Multiplizieren** mit dem **Zinsfaktor**. Das Guthaben nach zwei Jahren beträgt 2205 €.

3. Guthaben nach 3 Jahren

Überblick:



Das Guthaben nach einem Jahr entspricht $100 \% + 5 \% = 105 \%$. Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen für den Dreisatz:

$$100 \% \rightarrow 2.205 \text{ €}$$

$$105 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{105\% \cdot 2.205\text{ €}}{100\%}$$

Wir ziehen den Eurobetrag vor den Bruch. Dadurch sind die feststehenden Prozentangaben von dem im Laufe der Jahre sich verändernden Guthaben getrennt. Ferner berechnen wir den Bruch:

$$x = 2.205\text{ €} \cdot \frac{105\%}{100\%} = 2.205\text{ €} \cdot \overset{\text{Zinsfaktor}}{\underset{\downarrow}{1,05}} = 2.315,25\text{ €}$$

Rechnerisch betrachtet, ergibt sich das neue Guthaben wieder einfach durch bloßes **Multiplizieren** mit dem **Zinsfaktor**.

Antwort: Das Guthaben nach drei Jahren beträgt 2315,25 €.

Die Formel für das Endguthaben (Endkapital)

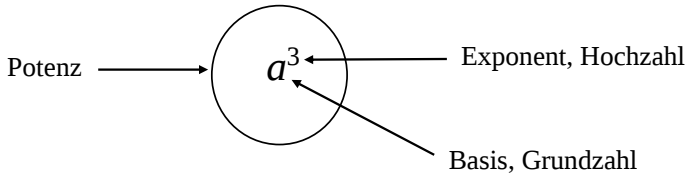
Die Rechnungen in dem vorangehenden Beispiel zeigen, dass man das Guthaben für jedes Jahr mit dem Zinsfaktor multiplizieren muss:

Anfangskapital:	2000 €
Kapital nach 1 Jahr:	$2000\text{ €} \cdot 1,05 = 2100\text{ €}$
Kapital nach 2 Jahren:	$2000\text{ €} \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 2205\text{ €}$
Kapital nach 3 Jahren:	$2000\text{ €} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 2315,25\text{ €}$

Produkte mit gleichen Faktoren kann man abkürzend als Potenzen schreiben, beispielsweise:

$$1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1,05^3$$

Die hochgestellte kleine 3 gibt an, wie oft der Faktor 1,05 im Produkt vorkommt. Die 3 wird als *Exponent* (oder *Hochzahl*) bezeichnet, und 1,05 als *Basis* (oder *Grundzahl*).



In Potenzschreibweise lautet unser Rechenweg:

$$\text{Kapital nach 3 Jahren} = \text{Anfangskapital} \cdot 1,05^3$$

Wir gehen nun zu folgenden Abkürzungen über:

Kapital nach 3 Jahren: K_3

Anfangskapital = Kapital nach 0 Jahren: K_0

Zinsfaktor 1,05: q

Die tiefgestellten Zahlen 3 und 0 bei K_3 bzw. K_0 nennt man *Indizes* (Einzahl: *Index*). Der traditionell für den Zinsfaktor benutzte Buchstabe q , ist der Anfangsbuchstabe von *Quotient* (Ergebnis einer Division). Tatsächlich ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Kapitale der Zinsfaktor:

$$2100:2000 = 1,05, \quad 2205:2100 = 1,05, \text{ usw.}$$

Mit diesen Abkürzungen nimmt unsere Formel für das Endguthaben langsam Gestalt an:

$$K_3 = K_0 \cdot q^3$$

Nun gilt unser Rechenweg und damit diese Formel nicht nur für eine Laufzeit von 3 Jahren, sondern für beliebig viele Jahre. Um diese Allgemeinheit auszudrücken, ersetzen wir die 3 durch einen Buchstaben, üblicherweise wird der Buchstabe n gewählt. Hierbei ist n der Anfangsbuchstabe von *natürlich*; für n werden in der Zinsrechnung tatsächlich *natürliche Zahlen* eingesetzt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Damit haben wir die allgemeine Formel für das Kapital nach beliebig vielen Jahren hergeleitet:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Die Formel für den Zinsfaktor q erkennt man, wenn man die Herkunft des Zinsfaktors 1,05 im obigen Beispiel zurückverfolgt:

$$\begin{aligned} 1,05 &= \frac{105}{100} \\ &= \frac{100+5}{100} \\ &= \frac{100 + \text{Zinssatz}}{100} \\ &= \frac{100 + p}{100} \end{aligned}$$

Also: $q = \frac{100 + p}{100}$

Wir fassen zusammen:

Zinseszins

Kapital nach n Jahren:	$K_n = K_0 \cdot q^n$
Zinsfaktor:	$q = \frac{100 + p}{100}$
Hierbei sind p = Zinssatz q = Zinfaktor n = Laufzeit (in Jahren) K_n = Kapital nach n Jahren K_0 = Anfangskapital (Kapital nach 0 Jahren)	

Vor der Anwendung dieser Formeln betrachten wir zunächst, wie man Potenzen mit einem Taschenrechner berechnet. Die Handhabung hängt davon ab, ob ein wissenschaftlicher oder einfacher Taschenrechner vorliegt. Wir betrachten die Berechnung von 2^8 .

Mit einem **wissenschaftlichen** Taschenrechner:

1. Tippe die Basis 2 ein.
2. Drücke die Potenztaste (je nach Fabrikat: x^y , y^x , $x^\square$, $\wedge$, ...).
3. Tippe den Exponenten 8 ein
4. Drücke die Taste =.

(Je nach Fabrikat, kann es kleinere Abweichungen, insbesondere in der Reihenfolge geben.)

Mit einem **einfachen** Taschenrechner:

1. Tippe die Basis 2 ein.
2. Drücke die Multiplikationstaste $\times$.
3. Drücke 7-mal die Taste =.

(Die Basis wurde bereits einmal eingetippt; damit sie 8-mal vorkommt, muss sie noch 7-mal eingegeben werden.)

Beispiel 2 (mittels Formeln)

Gegeben: Sparguthaben

* Kapital:	3.000 €
* Zinssatz:	4 % p. a.
* Laufzeit:	10 Jahre

Gesucht: Endguthaben

Lösung

1. Zinsfaktor berechnen

$$q = \frac{100 + p}{100}$$

Setze $p = 4$ ein:

$$q = \frac{100+4}{100} = \frac{104}{100} = 1,04$$

$$q = 1,04$$

2. Endkapital berechnen

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Setze die gegebenen Größen ein:

$$\begin{aligned} K_{10} &= 3.000 \text{ €} \cdot 1,04^{10} \\ &= 3.000 \text{ €} \cdot 1,480244285 \\ &= 4.440,732855 \text{ €} \\ &\approx 4.440,73 \text{ €} \end{aligned}$$

Antwort

Das Endguthaben beträgt 4.440,73 €.

Beispiel 3 (angebrochenes Jahr)

Gegeben: Sparguthaben

- * Kapital: 2.000 €
- * Zinssatz: 3 % p. a.
- * Laufzeit: 5 Jahre, 2 Monate und 8 Tage

Gesucht: Endguthaben

Lösung

1. Zinsfaktor berechnen

$$q = \frac{100+p}{100}$$

Setze $p=3$ ein:

$$q = \frac{100+3}{100} = \frac{103}{100} = 1,03$$

$$q = 1,03$$

2. Kapital nach 5 ganzen Jahren berechnen

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Setze die gegebenen Größen ein:

$$\begin{aligned} K_{10} &= 2.000 \text{ €} \cdot 1,03^5 \\ &= 2.000 \text{ €} \cdot 1,159274074 \\ &= 2.318,548148 \text{ €} \\ &\approx 2.318,55 \text{ €} \end{aligned}$$

Das Guthaben nach 5 Jahren beträgt 2.318,55 €.

3. Zinsen für das angebrochene Jahr berechnen

- a) Das angebrochene Jahr umfasst 2 Monate und 8 Tage, also insgesamt

$$2 \cdot 30 \text{ Tage} + 8 \text{ Tage} = 68 \text{ Tage}.$$

Wir berechnen nun die Zinsen, die in 68 Tagen für das aktuelle Guthaben von 2.318,55 € anfallen.

- b) Zinsen für ein Jahr:

$$\begin{array}{ll} 100 \% & \rightarrow 2.318,55 \text{ €} \\ 3 \% & \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{3 \cdot 2.318,55}{100} \text{ €} = 69,5565 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr (=360 Tage) betragen also 69,5565 €.

- c) Zinsen für 68 Tage:

$$\begin{array}{ll} 360 \text{ Tage} & \rightarrow 69,5565 \text{ €} \\ 1 \text{ Tag} & \rightarrow \frac{69,5565}{360} \text{ €} = 0,1932125 \text{ €} \\ 68 \text{ Tage} & \rightarrow 68 \cdot 0,1932125 \text{ €} = 13,13845 \text{ €} \approx 13,14 \text{ €} \end{array}$$

Die Zinsen für das angebrochene Jahr betragen 13,14 €.

4. Endkapital berechnen

Den 2.318,55 € Guthaben nach 5 Jahren müssen noch die Zinsen von 13,14 € hinzugefügt werden:

$$2.318,55 \text{ €} + 13,14 \text{ €} = 2.331,69 \text{ €}$$

Antwort

Das Endguthaben beträgt 2.331,69 €.

4.7 Exponentielle Prozesse

Das Guthaben wächst mit der Zeit nach der Formel:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Die Laufzeit n steht im *Exponenten* der Potenz q^n . Daher spricht man von einem *exponentiellen Wachstum* des Kapitals. Ein solches exponentielles Wachstum tritt auch in anderen Situationen auf, zum Beispiel bei der Bevölkerungszahl, der Vermehrung von Insekten, dem Wirtschaftswachstum. Einige Länder haben dagegen eine schrumpfende Bevölkerung oder Wirtschaft, radioaktive Substanzen zerfallen. Diese Schrumpfungsprozesse sind ebenfalls exponentiell. Bei allen diesen Beispielen handelt es sich um *exponentielle Prozesse*. Sie unterliegen mathematisch demselben Mechanismus wie das Kapital beim Zinseszins. Dass dies tatsächlich zutrifft, vergewissern wir uns an zwei Beispielen:

- Bevölkerungswachstum
- Radioaktiver Zerfall (des radioaktiven Kohlenstoff-Isotops C14)

Beispiel 1

Das afrikanische Land Burkina Faso hatte im Jahre 2021 etwa 22,1 Millionen Einwohner. Die Bevölkerung wächst jährlich um

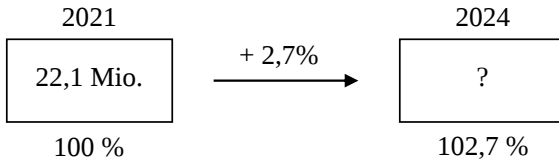
ca. 2,7 %.

Wie viele Einwohner wird das Land 3 Jahre später (2024) haben?

Lösung 1 (ausführlich)

1. Bevölkerung nach 1 Jahr

Überblick:



Die Bevölkerung in 2021 entspricht $100 \% + 2,7 \% = 102,7 \%$.

Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen für den Dreisatz:

$$\begin{array}{lll} 100 \% & \rightarrow & 22,1 \text{ Mio.} \\ 102,7 \% & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{102,7 \% \cdot 22,1 \text{ Mio.}}{100 \%}$$

Wir ziehen die Bevölkerung vor den Bruch. Dadurch sind die feststehenden Prozentangaben von der im Laufe der Jahre sich verändernden Einwohnerzahl getrennt. Ferner berechnen wir den Bruch:

Wachstumsfaktor

$$x = 22,1 \text{ Mio.} \cdot \frac{102,7 \%}{100 \%} = 22,1 \text{ Mio.} \cdot \mathbf{1,027} = 22,6967 \text{ Mio.}$$

Rechnerisch betrachtet, ergibt sich die neue Einwohnerzahl durch bloßes **Multiplizieren** mit dem **Wachstumsfaktor**. Es liegt derselbe Mechanismus wie beim Sparguthaben vor.

Die Bevölkerung in 2022 beträgt also etwa 22,6967 Mio.

2. Bevölkerung nach 2 Jahren

Nachdem der Mechanismus im ersten Schritt zutage getreten ist, können wir nunmehr einfach mit dem Wachstumsfaktor multiplizieren:

$$22,6967 \text{ Mio.} \cdot 1,027 = 23,3095109 \text{ Mio.}$$

Die Bevölkerung in 2023 beträgt also etwa 23,3095109 Mio.

3. Bevölkerung nach 3 Jahren

Wir multiplizieren nochmals mit dem Wachstumsfaktor:

$$\begin{aligned} 23,3095109 \text{ Mio.} \cdot 1,027 &= 23,9388676943 \text{ Mio.} \\ &\approx 23,9 \text{ Mio.} \end{aligned}$$

Antwort:

Im Jahre 2024 wird Burkina Faso ca. 23,9 Millionen Einwohner haben.

Lösung 2 (mittels Formeln)

1. Wachstumsfaktor berechnen

$$q = \frac{100 + p}{100}$$

Setze $p = 2,7$ ein:

$$\begin{aligned} q &= \frac{100 + 2,7}{100} = \frac{102,7}{100} = 1,027 \\ q &= 1,027 \end{aligned}$$

2. Bevölkerung nach 3 Jahren berechnen

Wir übertragen die Zinseszins-Formel auf die Bevölkerung, indem wir K (Kapital) durch B (Bevölkerung) ersetzen:

$$B_n = B_0 \cdot q^n$$

Setze die gegebenen Größen ein:

$$\begin{aligned}B_3 &= 22,1 \text{ Mio.} \cdot 1,027^3 \\&= 22,1 \text{ Mio.} \cdot 1,083206683 \\&= 23,9388676943 \text{ Mio.} \\&\approx 23,9 \text{ Mio.}\end{aligned}$$

Antwort:

Im Jahre 2024 wird Burkina Faso ca. 23,9 Millionen Einwohner haben.

Anmerkungen zu Rundung

Wir haben die Einwohnerzahl auf eine Nachkommastelle gerundet. Mit dieser Genauigkeit war auch die ursprüngliche Bevölkerung (22,1 Mio.) gegeben. Man kann seriöserweise nicht erwarten, dass berechnete Größen genauer sind als die benutzten Ausgangswerte. Daher wird immer entsprechend gerundet.

Im Übrigen haben wir bisher **Zwischenergebnisse nicht** gerundet, sondern nur Endergebnisse. Das Runden von Zwischenergebnissen kann zu großen Abweichungen im Endresultat führen.

Durch die kosmische Strahlung wird ein kleiner Teil des Stickstoffs der Atmosphäre in Kohlenstoff umgewandelt, und zwar in die radioaktive Variante (*Isotop*) C14. Diesen nehmen die Pflanzen durch die Photosynthese auf, und über die Nahrungskette erhalten alle Lebewesen einen gewissen Anteil an C14. Nachdem Tode nimmt der Anteil ab, da C14 zerfällt (dabei strahlt, radioaktiv ist) und kein Nachschub mehr durch die Photosynthese bzw. Nahrungsaufnahme geliefert wird. Aus dem Anteil des verbliebenen C14 kann der Todeszeitpunkt berechnet werden. Dies ist die berühmte Radiokarbonmethode (C14-Methode) zur Altersbestimmung von organischen Fossilien.

Der Zerfallsprozess von C14 verläuft mathematisch analog zu den bisher betrachteten Wachstumsvorgängen.

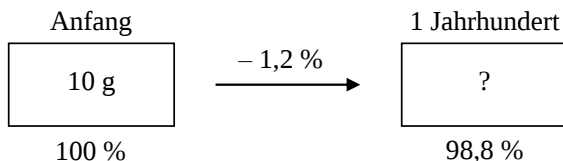
Beispiel 2

Gegeben sind 10 g des radioaktiven Kohlenstoffs C14. In einem **Jahrhundert** zerfallen etwa 1,2 % C14.

Wie viel C14 bleiben in 2000 Jahren übrig?

Lösung 1 (ausführlich)**1. Masse nach 1 Jahrhundert (100 Jahren)**

Überblick:



Die Masse in einem Jahrhundert **nimmt** um 1,2 % **ab**, es bleiben also:

$$100 \% - 1,2 \% = 98,8 \%$$

Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen für den Dreisatz:

$$\begin{array}{ll} 100 \% & \rightarrow 10 \text{ g} \\ 98,8 \% & \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{98,8 \% \cdot 10 \text{ g}}{100 \%}$$

Wir ziehen die Masse vor den Bruch. Dadurch sind die feststehenden Prozentangaben von der im Laufe der Jahre sich verändernden Masse getrennt. Ferner berechnen wir den Bruch:

$$x = 10 \text{ g} \cdot \frac{98,8 \%}{100 \%} = 10 \text{ g} \cdot \overset{\text{Zerfallsfaktor}}{\underset{\downarrow}{0,988}} = 9,88 \text{ g}$$

Rechnerisch betrachtet, ergibt sich die neue Masse durch bloßes **Multiplizieren** mit dem **Zerfallsfaktor**. Es liegt derselbe Mechanismus wie beim Sparguthaben vor.

Die C14-Masse nach einem Jahrhundert beträgt also etwa 9,88 g.

2. Masse nach 2 Jahrhunderten (200 Jahren)

Wir multiplizieren einfach mit dem Zerfallsfaktor:

$$9,88 \text{ g} \cdot \mathbf{0,988} = 9,76144 \text{ g}$$

Die C14-Masse nach 2 Jahrhunderten beträgt etwa 9,76144 g.

3. Masse nach 20 Jahrhunderten (2000 Jahren)

Für die verbleibenden 18 Jahrhunderte muss man noch 18-mal mit dem Zerfallsfaktor multiplizieren. Dies kann man mit einer Potenz abkürzen:

$$\begin{aligned} 9,76144 \text{ g} \cdot 0,988^{18} &= 9,76144 \text{ g} \cdot 0,988^{18} \\ &\approx 9,76144 \text{ g} \cdot 0,8046833265 \\ &\approx 7,854868010 \text{ g} \\ &\approx 7,9 \text{ g} \end{aligned}$$

Antwort: Die C14-Masse nach 2000 Jahren beträgt etwa 7,9 g.

Lösung 2 (mittels Formeln)

Wir übertragen die Formel für den Wachstumsfaktor auf die Schrumpfungssituation, indem wir bei der Berechnung des Zerfallsfaktors **subtrahieren**. Bei der Formel für die Masse, benutzen wir den Buchstaben M anstelle von K bzw. B .

1. Zerfallsfaktor berechnen

$$q = \frac{100 - p}{100}$$

Setze $p=1,2$ ein:

$$q = \frac{100 - 1,2}{100} = \frac{98,8}{100} = 0,988$$

Also

$$q = 0,988$$

2. Masse nach 20 Jahrhunderten (2000 Jahren)

$$M_n = M_0 \cdot q^n$$

Setze die gegebenen Größen ein, wobei zu beachten ist, dass hier n für die Anzahl der **Jahrhunderte** steht:

$$\begin{aligned} M_{20} &= 10 \text{ g} \cdot 0,988^{20} \\ &\approx 10 \text{ g} \cdot 0,7854868010 \\ &= 7,854868010 \text{ g} \\ &\approx 7,9 \text{ g} \end{aligned}$$

Antwort: Die C14-Masse nach 2000 Jahren beträgt etwa 7,9 g.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 4.1 bis 4.4

1. Berechne die Kreditzinsen:

	Kreditbetrag	Zinssatz	Laufzeit
a)	60,- €	4 %	3 Jahre
b)	112,- €	5 %	1 Jahr
c)	476,- €	3,2 %	4 Jahre
d)	1.077,- €	2,25 %	7 Jahre
e)	789,- €	4,5 %	5 Jahre
f)	1.984,- €	5,75 %	2 Jahre
g)	315,- €	6 %	6 Jahre
h)	4.096,- €	5,2 %	4 Jahre

2. Berechne die Zinsen:

	Kapital/ Kreditbetrag	Zinssatz	Laufzeit
a)	89,- €	7 %	1 Monat
b)	262,- €	4 %	4 Monate
c)	109,- €	4,5 %	7 Monate
d)	707,- €	8 %	5 Monate
e)	320,- €	9,25 %	9 Monate
f)	1.492,- €	2 %	11 Monate
g)	1.879,- €	3,1 %	8 Monate

3. Berechne die Zinsen:

	Kapital/ Kreditbetrag	Zinssatz	Laufzeit
a)	637,- €	6 %	14.02. - 04.06.
b)	322,- €	8 %	23.03. - 17.08.
c)	1.542,- €	7,5 %	03.01. - 22.04.
d)	245,- €	4,75 %	27.05. - 15.10.
e)	449,- €	6,3 %	17.04. - 24.09.
f)	2.718,- €	4,25 %	05.07. - 12.10.
g)	1.066,- €	8 %	19.05. - 16.08.

- h) 145,- € 5,2 % 08.03. - 22.05.
 i) 370,- € 3 % 27.10. - 06.12.

4. Ein Handwerksbetrieb nimmt am 15. Juni einen Kredit von 30.000,- € zu einem Zinssatz von 7 % auf. Am 10. September zahlt er den Kredit einschließlich Zinsen zurück. Wie viel hat er gezahlt?

5. Jemand bestellt bei einem Onlineshop Waren im Wert von 379,45 €. Der Besteller zahlt nicht fristgerecht und muss für den Zeitraum vom 22. April bis 15. August Verzugszinsen von 9 % zahlen. Welchen Betrag muss er überweisen?

6. Der Zinssatz für einen Kredit von 5.000,- € hat sich während der Laufzeit einmal erhöht. Vom 01.03. bis 15.05. betrug er 6 %, ab 16.5. wurde er auf 7 % angehoben. Wie viel Zinsen sind bei der Rückzahlung am 01.08. zu zahlen? [1.3. ist Zinstag, 1.8 nicht.]

7. Eine Rechnung von 4.700,- € wurde nicht innerhalb der Zahlungsfrist bis zum 15. März bezahlt. Der Käufer leistet am 1. April eine Teilzahlung von 2000,- €. Berechne den Restbetrag, der einschließlich 8 % Verzugszinsen am 15. Juni zu zahlen ist.
 [Tipp: Für den 1.4. werden 4.700,-€ zugrundegelegt.]

Aufgaben zu Kapitel 4.5

1. Berechne den Kreditbetrag (auf ganze Euro gerundet):

	Zinsen	Zinssatz	Laufzeit
a)	2,08 €	7 %	67 Tage
b)	1,18 €	8 %	23 Tage
c)	107,64 €	5 %	310 Tage

2. Berechne den Zinssatz:

	Kreditbetrag	Zinsen	Rückzahlungsbetrag	Laufzeit
a)	677 €	7,07 €	-	94 Tage
b)	198 €	-	201,63 €	73 Tage
c)	184 €	7,39 €	-	241 Tage

3. Berechne die Laufzeit:

	Kreditbetrag	Zinssatz	Zinsen	Rückzahlungsbetrag
a)	310,- €	7 %	2,83 €	-
b)	4.217,- €	8,2 %	-	4.343,79
c)	1.500,- €	5 %	19,58 €	-

Aufgaben zu Kapitel 4.6

1. Berechne das Endkapital und die Gesamtzinsen (Endkapital minus Anfangskapital):

	Kapital	Zinssatz	Laufzeit
a)	600,- €	2 %	3 Jahre
b)	1.200,- €	4 %	5 Jahre
c)	476,- €	2,1 %	4 Jahre
d)	1.700,- €	1,25 %	10 Jahre
e)	789,- €	3,5 %	6 Jahre
f)	2.500,- €	4,75 %	12 Jahre
g)	320,- €	5 %	7 Jahre
h)	4.000,- €	3,2 %	9 Jahre

2. Berechne das Endkapital:

	Kapital/	Zinssatz	Laufzeit
a)	500,- €	4 %	3 Jahre und 1 Monat
b)	2.000,- €	3 %	5 Jahre und 4 Monate
c)	100,- €	1,5 %	7 Jahre und 87 Tage
d)	890,- €	2 %	6 Jahre und 112 Tage
e)	720,- €	3,25 %	5 Jahre, 2 Monate, 13 d

Aufgaben zu Kapitel 4.7

1. Im Jahre 2016 hatte das westafrikanische Land Ghana folgende Daten aufzuweisen:

- * Einwohner: 28,2 Millionen
- * Jährliches Bevölkerungswachstum: 2,4 %
- * Analphabetenrate: 21,5 %

- * Bruttoinlandsprodukt (BIP): 42,69 Mrd. US-Dollar (USD)
- * Jährliches BIP-Wachstum: 4,0 %
- * Pro-Kopf-BIP (jährlich): ca. 1.510 USD

- a) Wie viele Einwohner wird Ghana im Jahre 2026 haben?
- b) Welches BIP wird Ghana im Jahre 2026 haben?
- c) Welches Pro-Kopf-BIP wird Ghana im Jahre 2026 haben?

2. Im Jahre 2016 hatten die Niederlande folgende Daten aufzuweisen:

- * Einwohner: 17,0 Millionen
- * Jährliches Bevölkerungswachstum: 0,4 %
- * Analphabetenrate: 1,0 %
- * Bruttoinlandsprodukt (BIP): 771,1 Milliarden US-Dollar (USD)
- * Jährliches BIP-Wachstum: 2,1 %
- * Pro-Kopf-BIP (jährlich): ca. 45.400 USD

- a) Wie viele Einwohner werden die Niederlande im Jahre 2026 haben?
- b) Welches BIP werden die Niederlande im Jahre 2026 haben?
- c) Welches Pro-Kopf-BIP werden die Niederlande im Jahre 2026 haben?

3. In 100 Jahren zerfallen 1,2 % des radioaktiven Kohlenstoff-isotops ^{14}C . Betrachte 1 kg des Isotops ^{14}C .

- a) Wie viel Gramm ^{14}C bleiben nach 1000 Jahren übrig?
- b) Wie viel Gramm ^{14}C bleiben nach 5000 Jahren übrig?
- c) Wie viel Gramm ^{14}C bleiben nach 6000 Jahren übrig?
- d) Wie viel Gramm ^{14}C bleiben nach 5700 Jahren übrig?

4. Gewisse Bakterien vermehren sich unter günstigen Bedingungen um ca. 2,34 % in einer Minute. Zu Beginn gebe es 12 Mio. dieser Bakterien.

- a) Wie viele Bakterien wird es in 25 Minuten geben?
- b) Um wie viel Prozent hat die Bakterienzahl zugenommen?

5. In einem Jahr zerfallen ca. 28,516 % des radioaktiven Cäsium-Isotops ^{134}Cs . Betrachte 600 g des Isotops ^{134}Cs .

- Wie viel Gramm ^{134}Cs bleiben nach 10 Jahren übrig?
- Wie viel Gramm ^{134}Cs bleiben nach 5 Jahren übrig?
- Wie viel Gramm ^{134}Cs bleiben nach 2 Jahren übrig?
- Wie viel Gramm ^{134}Cs bleiben nach 0,5 Jahren übrig?

Die Zeit, in der die Hälfte der Masse zerfallen ist, heißt Halbwertszeit. Schätze die Halbwertszeit des Cäsium-Isotops ^{134}Cs .

6. An einem Tag zerfallen etwa 8,2791 % des radioaktiven Jod-Isotops ^{131}I . Betrachte 500 g des Isotops ^{131}I .

- Wie viel Gramm ^{131}I bleiben nach 10 Tagen übrig?
- Wie viel Gramm ^{131}I bleiben nach 8 Tagen übrig?
- Wie viel Gramm ^{131}I bleiben nach 30 Tagen übrig?
- Wie viel Gramm ^{131}I bleiben nach 365 Tagen übrig?

Die Zeit, in der die Hälfte der Masse zerfallen ist, heißt Halbwertszeit. Schätze die Halbwertszeit des Jod-Isotops ^{131}I .

7. In einer Minute zerfallen etwa 0,991 % des radioaktiven Tellur-Isotops ^{129}Te . Betrachte 100 g des Isotops ^{129}Te .

- Wie viel Gramm ^{129}Te bleiben nach 5 Minuten übrig?
- Wie viel Gramm ^{129}Te bleiben nach 20 Minuten übrig?
- Wie viel Gramm ^{129}Te bleiben nach 69 Minuten und 36 Sekunden übrig?
- Wie viel Gramm ^{129}Te bleiben nach 1 Tag übrig?

Die Zeit, in der die Hälfte der Masse zerfallen ist, heißt Halbwertszeit. Schätze die Halbwertszeit des Tellur-Isotops ^{129}Te .

8. Beim Durchgang durch einen durchsichtigen Kunststoff verliert ein Lichtstrahl bei jedem zurückgelegten Zentimeter etwa 2 % der Intensität. Beantworte die folgenden Fragen durch Probieren mithilfe der Formel:

- Nach welcher Strecke verliert das Licht die Hälfte seiner Intensität?
- Durch eine Platte aus diesem Kunststoff dringt nur 10 % des senkrecht einfallenden Lichtes. Wie dick ist die Platte?

Lösungen

Lösungen zu Kapitel 1.2

1.

- | | | | |
|---------|----------|-------------|---------|
| a) 0,5 | d) 0,75 | g) 0,333... | j) 0,81 |
| b) 1,5 | e) 0,125 | h) 0,666... | k) 1,32 |
| c) 0,25 | f) 0,6 | i) 0,4 | l) 54,7 |

2.

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|--------------------|-----------------------|
| a) $\frac{23}{100}$ | b) $\frac{71}{100}$ | c) $\frac{127}{100}$ | d) $\frac{9}{10}$ | e) $\frac{127}{1000}$ |
| f) $\frac{3}{10}$ | g) $\frac{121}{10}$ | h) $\frac{19}{10}$ | i) $\frac{7}{100}$ | j) $\frac{9}{1000}$ |

3.

- | | | | |
|--------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| a) $\frac{1}{2}$ | b) $\frac{3}{4}$ | c) $\frac{5}{3}$ | d) $\frac{17}{9}$ |
| e) $\frac{13}{15}$ | f) $\frac{6}{13}$ | g) 8 | h) 30 |

4.

- | | | | | |
|------------------|------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) $\frac{1}{4}$ | b) $\frac{3}{4}$ | c) $\frac{5}{4}$ | d) $\frac{1}{2}$ | e) $\frac{1}{8}$ |
| f) $\frac{1}{5}$ | g) $\frac{2}{5}$ | h) $\frac{13}{10}$ | i) $\frac{3}{50}$ | j) $\frac{1}{125}$ |

5.

a) $\frac{8}{5}$

e) $\frac{7}{4}$

b) $\frac{11}{7}$

f) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{3}$

g) $\frac{17}{9}$

d) $\frac{9}{5}$

h) $\frac{25}{13}$

6.

a) $\frac{17}{5}$

g) $\frac{13}{5}$

b) $\frac{11}{4}$

h) $\frac{19}{6}$

c) $\frac{7}{3}$

i) $\frac{29}{6}$

d) $\frac{37}{7}$

j) $\frac{43}{8}$

e) $\frac{7}{2}$

k) $\frac{40}{13}$

f) $\frac{17}{6}$

l) $\frac{23}{3}$

7.

	echt	unecht	rein	gemischt
echt	$\frac{1}{2}$	<i>unmöglich</i>	$\frac{1}{2}$	<i>unmöglich</i>
unecht	<i>unmöglich</i>	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$1\frac{1}{2}$
rein	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	<i>unmöglich</i>
gemischt	<i>unmöglich</i>	$1\frac{1}{2}$	<i>unmöglich</i>	$1\frac{1}{2}$

Lösungen zu Kapitel 1.3

1.

a) $\frac{5}{7}$

d) $\frac{13}{15}$

g) $\frac{55}{104}$

b) $\frac{7}{12}$

e) $\frac{77}{78}$

h) $\frac{877}{924}$

c) $\frac{1}{12}$

f) $\frac{19}{63}$

2.

a) $1\frac{4}{15}$

d) $2\frac{19}{20}$

g) $\frac{8}{15}$

b) $3\frac{1}{6}$

e) $1\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{20}$

f) $2\frac{17}{21}$

3.

a) $2\frac{1}{21}$

d) $2\frac{7}{20}$

g) $\frac{13}{20}$

b) $1\frac{19}{40}$

e) $2\frac{1}{20}$

c) $\frac{1}{63}$

f) $6\frac{11}{20}$

4.

a) $3\frac{13}{21}$

e) $3\frac{23}{35}$

i) $8\frac{7}{30}$

b) $6\frac{1}{3}$

f) $9\frac{14}{15}$

j) $2\frac{1}{20}$

c) $5\frac{23}{30}$

g) $6\frac{19}{30}$

k) $4\frac{6}{35}$

d) $2\frac{1}{12}$

h) $8\frac{11}{12}$

l) $7\frac{11}{12}$

5.

a) $\frac{4}{13}$

d) $\frac{9}{17}$

g) $3\frac{7}{32}$

b) $\frac{1}{2}$

e) $2\frac{11}{15}$

h) $1\frac{4}{35}$

c) $\frac{1}{4}$

f) $\frac{3}{14}$

6.

a) $1\frac{6}{35}$

d) $3\frac{1}{5}$

g) $1\frac{1}{15}$

b) $2\frac{13}{15}$

e) $1\frac{5}{12}$

c) $\frac{3}{28}$

f) $2\frac{31}{56}$

7.

a) $\frac{13}{28}$

d) $4\frac{7}{20}$

g) $\frac{13}{20}$

b) $1\frac{31}{40}$

e) $2\frac{1}{20}$

c) $\frac{1}{63}$

f) $8\frac{11}{20}$

8.

a) $4\frac{13}{21}$

e) $4\frac{13}{84}$

i) $8\frac{7}{30}$

b) $8\frac{5}{24}$

f) $9\frac{64}{99}$

j) $3\frac{95}{238}$

c) $5\frac{23}{30}$

g) $3\frac{7}{195}$

k) $4\frac{29}{35}$

d) $1\frac{11}{12}$

h) $8\frac{11}{12}$

l) $2\frac{43}{63}$

Lösungen zu Kapitel 1.4

1.

a) 1

d) 2

g) $1\frac{5}{7}$

b) 4

e) $3\frac{1}{3}$

h) $19\frac{4}{5}$

c) 7

f) $2\frac{6}{7}$

i) $\frac{1}{2}$

2.

a) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

g) $\frac{3}{112}$

b) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{2}{15}$

h) $\frac{9}{55}$

c) $\frac{1}{7}$

f) $\frac{5}{28}$

i) $1\frac{5}{6}$

Lösungen zu Kapitel 1.5

1.

a) $\frac{2}{5}$

b) $1\frac{1}{14}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $2\frac{1}{10}$

e) $3\frac{1}{3}$

f) $1\frac{13}{27}$

g) $3\frac{11}{15}$

h) $\frac{3}{8}$

2.

a) $4\frac{2}{7}$

b) $\frac{21}{40}$

c) $\frac{20}{63}$

d) $10\frac{7}{20}$

e) $6\frac{13}{20}$

f) $10\frac{9}{20}$

g) $9\frac{7}{20}$

h) $23\frac{4}{5}$

3.

a) 3

b) $9\frac{11}{12}$

c) $8\frac{7}{30}$

d) $6\frac{17}{24}$

e) $3\frac{12}{35}$

f) $24\frac{8}{15}$

g) $10\frac{23}{30}$

h) $18\frac{5}{12}$

i) $16\frac{13}{20}$

j) $6\frac{13}{20}$

k) $4\frac{3}{35}$

l) $15\frac{1}{6}$

4.

a) $1\frac{7}{8}$

d) $4\frac{2}{7}$

g) $14\frac{2}{5}$

b) 1

e) $2\frac{2}{3}$

h) 5

c) 8

f) $2\frac{5}{17}$

i) $2\frac{1}{7}$

5.

a) $\frac{2}{5}$

b) $1\frac{1}{14}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $1\frac{13}{15}$

e) $2\frac{1}{10}$

f) $1\frac{2}{9}$

g) $3\frac{1}{21}$

h) $\frac{4}{11}$

6.

a) $27\frac{13}{16}$

e) $44\frac{5}{12}$

i) 26

b) $64\frac{59}{70}$

f) $194\frac{3}{10}$

j) $56\frac{1}{4}$

c) $47\frac{5}{6}$

g) $170\frac{7}{16}$

k) $46\frac{11}{20}$

d) $202\frac{2}{9}$

h) $45\frac{11}{28}$

l) $20\frac{5}{66}$

Lösungen zu Kapitel 1.6

1.

a) $\frac{9}{10}$

b) $2\frac{1}{10}$

c) $1\frac{1}{15}$

d) $1\frac{11}{24}$

e) $1\frac{7}{8}$

f) $\frac{8}{15}$

g) $1\frac{11}{24}$

h) $1\frac{1}{2}$

2.

a) $2\frac{16}{27}$

b) $1\frac{11}{24}$

c) $1\frac{1}{35}$

d) $2\frac{2}{45}$

e) $2\frac{6}{35}$

f) $\frac{55}{76}$

g) $1\frac{13}{55}$

h) $1\frac{22}{63}$

3.

a) $1\frac{22}{27}$

e) $\frac{63}{65}$

i) $1\frac{43}{102}$

b) $1\frac{4}{17}$

f) $1\frac{11}{69}$

j) $1\frac{21}{55}$

c) $1\frac{17}{78}$

g) $1\frac{29}{85}$

k) $1\frac{36}{55}$

d) $2\frac{4}{21}$

h) $\frac{39}{68}$

l) $1\frac{17}{39}$

Lösungen zu Kapitel 1.7

1.

a) $1\frac{1}{12} = 1,08333\dots$

e) $2\frac{43}{60} = 2,71666\dots$

b) $\frac{15}{16} = 0,9375$

f) $3\frac{17}{90} = 3,1888\dots$

c) $\frac{5}{16} = 0,3125$

g) $1\frac{1}{125} = 1,008$

d) $2\frac{94}{105} \approx 2,895$

h) $\frac{37}{60} = 0,61666\dots$

2.

a) $4\frac{157}{1440}$

c) $\frac{12}{31}$

b) $3\frac{17}{25}$

d) $4\frac{16}{33}$

3.

a) $1\frac{5}{12} = 1,41666\dots$

d) $3\frac{13}{80} = 3,1625$

b) $1\frac{29}{70} \approx 1,414285714$

e) $1\frac{71}{270} = 1,2629629629629\dots$

c) $1\frac{41}{56} \approx 1,732142857$

f) $4\frac{7}{10} = 4,7$

4.

a) $\frac{11}{30}$

e) $\frac{49}{60}$

b) 7

f) $2\frac{7}{24}$

c) $\frac{40}{81}$

g) $2\frac{2}{5}$

d) $1\frac{13}{60}$

h) $3\frac{49}{120}$

5.

a) $\frac{12}{47}$

c) $\frac{7}{10}$

b) $1\frac{439}{996}$

d) $\frac{5}{12}$

Lösungen zu Kapitel 1.8

1. $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$

2.

a) $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

3.

a) $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

d) $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$

b) $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$

e) $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$

c) $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$

4

a) $\frac{3}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$

b) $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

c) $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$

5.

a) $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$

d) $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$

b) $\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

e) $\frac{8}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$

c) $\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$

Lösungen zu Kapitel 1.9

1. 12

2. 6

3. 11

4. 23

5. 24

6. 47

7. 31

Lösungen zu Kapitel 2.2

1.

a) 1 min, 18 s

b) 20 min, 45 s

c) 17 min, 24 s

d) 53 min, 36 s

e) 45 min, 52,2 s

f) 11 min, 55,2 s

g) 35min, 6s

h) 5 min, 36,6 s

2.

a) 1 h, 18 min

b) 23 h, 15 min

c) 6 h, 30 min

d) 15 h, 36 min

e) 7 h, 48 min

f) 11 h, 54 min

g) 35 h, 45 min

h) 5 h, 6 min

3.

a) 3 d, 21 h

b) 1 d, 12 h

c) 6 d, 18 h

d) 22 d, 3 h

e) 7 d, 6 h

f) 68 d, 12 h

4.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a) 1h, 20 min, 24 s | b) 14 h, 31 min, 48 s |
| c) 6 h, 55 min, 12 s | d) 19 h, 39 min |
| e) 8 h, 15 min, 36 s | f) 11 h, 3 min |
| g) 4 h, 14 min, 24 s | h) 16 h, 22 min, 12 s |

5.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) 1 d, 9 h, 7 min, 12 s | b) 20 d, 16 h, 48 min |
| c) 17 d, 6 h, 57 min, 36 s | d) 33 d, 14 h, 9 min, 36 s |
| e) 25 d, 20 h, 52 min, 48 s | f) 11 d, 22 h, 4 min, 48 s |

6.

- a) 7 Wo., 4 d, 9 h, 50 min, 24 s
- b) 6 d, 12 h, 28 min, 48 s
- c) 4 d, 5 h, 31 min, 12 s
- d) 8 d, 17 h, 31 min, 12 s
- e) 1 d, 21 h, 52 min, 12 s
- f) 15 Wo., 5 d, 3 h, 10 min, 4,8 s
- g) 1 Wo., 5 d, 12 h, 25 min, 48 s
- h) 16 h, 41 min

7.

- | | |
|------------------------|--------------------|
| a) 37,35 min | b) 18,70777... h |
| c) 2,025902777... Tage | d) 1,136904762 Wo |
| e) 1,148910384 Wo. | f) 2,541666... Wo. |

Lösungen zu Kapitel 2.3

- 1. 7,48 €
- 2. 1.336,50 €
- 3. 10,5 Akten
- 4. 437,33 €
- 5. a) 1.358 Liter b) 19.400 km

6. 71,3 m³
7. 55.200 €
8. 9,12 m
9. 6.688
10. 544 km
11. 235,60 USD
12. 3.208 km
13. 6096 m
14. 24 min 14 s
15. 13,2 Gallonen
16. 0,83 km
17. 11 h 40 min
18. ca. 390.000 km
19. ca. 144.000.000 km
20. ca. 16,3 m/s

Lösungen zu Kapitel 2.4

1. 12 Tage
2. 300 Seiten
3. ca. 31 km/h
4. ca. 18 Minuten
5. 8 Tage
6. 4 Handwerker
7. 7 Minuten und ca. 9 Sekunden
8. ca. 373 Watt
9. ca. 82 cm
10. 135 km/h
11. 28 cm
12. 336,54 €
13. 3 Stunden und 22 Minuten

Lösungen zu Kapitel 2.5

1. a) ungerade b) gerade c) gerade
2. a) ungerade b) gerade c) gerade
3. a) ungerade b) gerade c) gerade

4. a) ungerade b) ungerade c) ungerade
5. a) ungerade b) gerade c) ungerade d) gerade
e) ungerade f) gerade
6. 4.877 m
7. 51 Minuten
8. 186 Seiten
9. 39 km/h
10. 2,2 km
11. 2,51 s
12. 5 Stunden und 53 Minuten
13. 9,32 m
14. 12 m
15. 12 Minute und 49 Sekunden $\approx$ 13 Minuten'
16. 64 cm
17. 8,89 cm
18. 113 km/h
19. 8.192 Kbyte

Lösungen zu Kapitel 2.6

1. 30 Minuten
2. 10 Arbeiter
3. 23 Minuten
4. 43 Minuten, 56 Sekunden
5. ca. 45,8 km/h
6. 10 cm
7. 197 Seiten
8. 2,5 m³
9. 5 Arbeitstage, 6 Stunden und 15 Minuten

Lösungen zu Kapitel 3.2

1.
 - a) Rabatt: 5,00 €, Preis: 94,99 €
 - b) Rabatt: 2,10 €, Preis: 39,89 €
 - c) Rabatt: 1,55 €, Preis: 29,40 €
 - d) Rabatt: 0,38 €, Preis: 7,12 €

- e) Rabatt: 4,98 €, Preis: 94,52 €
- f) Rabatt: 1,37 €, Preis: 26,12 €
- g) Rabatt: 13,02 €, Preis: 247,47 €
- h) Rabatt: 3,47 €, Preis: 66,02 €
- i) Rabatt: 139,12 €, Preis: 2643,37 €
- j) Rabatt: 88,40 €, Preis: 1679,59 €

2.

- a) Rabatt: 115,28 €, Preis: 653,22 €
- b) Rabatt: 149,19 €, Preis: 596,76 €
- c) Rabatt: 137,75 €, Preis: 413,25 €
- d) Rabatt: 67,80 €, Preis: 158,19 €
- e) Rabatt: 75,77 €, Preis: 140,72 €
- f) Rabatt: 12,74 €, Preis: 38,21 €
- g) Rabatt: 1363,65 €, Preis: 3181,84 €
- h) Rabatt: 79,75 €, Preis: 717,75 €
- i) Rabatt: 493,30 €, Preis: 1973,20 €
- j) Rabatt: 274,10 €, Preis: 2466,89 €

3.

- a) 46,24 €
- b) 14,04 €
- c) 17,55 €
- d) 140,40 €
- e) 145,74 €
- f) 214,70 €
- g) 77,40 €
- h) 93,60 €
- i) 19,72 €
- j) 183,60 €

4.

- a) 121,18 €
- b) 138,03 €
- c) 21,34 €
- d) 158,99 €
- e) 12,12 €
- f) 100,77 €
- g) 27,76 €

- h) 6,27 €
- i) 94,19 €
- j) 2,16 €

5. 0,024 Liter

6. a) ca. 24,4 Mio. b) ca. 8,1 Mio. c) ca. 60,9 Mio.

7.

- 11,68 Mrd. USD
- 10,22 Mrd. USD
- 5,84 Mrd. USD
- 3,65 Mrd. USD
- 2,19 Mrd. USD
- 2,92 Mrd. USD

8.

- 21,60 Mrd. USD
- 13,60 Mrd. USD
- 8,80 Mrd. USD
- 3,20 Mrd. USD
- 4,00 Mrd. USD

Lösungen zu Kapitel 3.3

Die Ergebnisse sind in der Regel **gerundet**.

- 1. a) 5.822 Menschen b) 8,5 %
- 2. a) 0,03 € b) 4,6 %
- 3. a) 16,8%, 19,2 % b) 32,8 %
- 4. 7,9 %
- 5. 8,8 %
- 6. 20 % , 11,1%
- 7. 7,1 %
- 8. In Armut: 40 %, Analphabeten: 43 %, Stadtbev.: 39 %, Muslime: 45%, Protestanten: 26%, Katholiken: 12%.
- 9. a) 31,2 % b) 25,1 % c) 22,2 % d) 10,8 %
- 10. 98,4 %

Lösungen zu Kapitel 3.4

1. a) 45,61 Mio., 43,01 Mio. b) 41,87 Mio., 38,06 Mio.
2. 43,56 Mio.
3. 20.642.400,- €
4. 49,92 €
5. 10 Gläser
6. 83,33 Mio.
7. 2228,57 €
8. 81,2 Mio.
9. 73,00 Mrd. USD
10. 80,00 Mrd. USD
11. a) 5.000,- € b) 5.000,- €

Lösungen zu Kapitel 3.5 und 3.6

Die Lösungen sind in der Regel gerundet.

1. 4,45 €
2. 17,95 €
3. 89,24 Mio.
4. 13,56 €
5. 38,79 Mrd. US-Dollar
6. 13,5 Mrd. €
7. 51,1 Mrd. €
8. 379,50 €
9. 86,2 Millionen
10. 18,95 €, 12,50 €, 4,99 €, 37,50 €
11. 14,75 €
12. 5,5 Liter pro 100 km
13. 44,82 Mrd. US-Dollar
14. 50 Wochen
15. 3,6 Mrd. US-Dollar
16. 1.019,85 €

Lösungen der übergreifenden Aufgaben zu Kapitel 3

1. 81,34 €, 1,68 %
2. a) 0,024 l = 24 ml b) 0,0096 l = 9,6 ml c) 2,88 %

3. 35,29 €, 35,59 €, 35,88 €, 36,17 €, 0,83 %, 1,69 %, 2,51 %, 3,34 %
4. a) 88,33 % b) 91,83 %
5. 16.800 l, 44 %
6. 41,64 Mio.
7. 2,02 %
8. 5,2 %
9. Gefallen, um 0,16 %
10. 8,7 %
11. 1,3 %
12. 5,3 g, 1,8 %

Lösungen der schwierigen Aufgaben zu Kapitel 3

1. ca. 1,75 %
2. ca. 1,97 %
3. ca. 133 g
4. 80 g
5. ca. 1,218 g
6. ca. 2,030 g
7. ca. 166,667 g
8. 60 g
9. nach ca. 22,7 Jahren, also im 23. Jahr

Lösungen zu Kapitel 4.1 bis 4.4

1.
 - a) 7,20 €
 - b) 5,60 €
 - c) 60,93 €
 - d) 169,63 €
 - e) 177,53 €
 - f) 228,16 €
 - g) 113,40 €
 - h) 851,97 €

2.

- a) 0,52 €
- b) 3,49 €
- c) 2,86 €
- d) 23,57 €
- e) 22,20 €
- f) 27,35 €
- g) 38,83 €

3.

- a) 11,68 €
- b) 10,30 €
- c) 35,02 €
- d) 4,46 €
- e) 12,34 €
- f) 31,12 €
- g) 20,61 €
- h) 1,55 €
- i) 1,20 €

4. 30.495,83 €

5. 390,17 €

6. 135,56

7. 2.761,11

Lösungen zu Kapitel 4.5

1. a) 160 € b) 231 € c) 2500 €

2. a) 4 % b) 9 % c) 6 %

3.

- a) 47 Tage = 1 Monat und 17 Tage
- b) 132 Tage = 4 Monate und 12 Tage
- c) 94 Tage = 3 Monate und 4 Tage

Lösungen zu Kapitel 4.6

1.

	Endkapital	Zinsen
a)	636,72 €	36,72 €
b)	1.459,98 €	259,98 €
c)	517,26 €	41,26 €
d)	1.924,86 €	224,86 €
e)	969,88 €	180,88 €
f)	4.363,03 €	1863,03 €
g)	450,27 €	130,27 €
h)	5.311,01 €	1311,01 €

2.

- a) 564,31 €
- b) 2341,73 €
- c) 111,39 €
- d) 1.008,52 €
- e) 850,42 €

Lösungen zu Kapitel 4.7

1.

- a) ca. 35,7 Mio.
- b) ca. 63,19 Mrd. USD
- c) ca. 1.770 USD

2.

- a) ca. 17,7 Mio.
- b) ca. 949,2 Mrd. USD
- c) ca. 53.700 USD

3.

- a) ca. 886 g
- b) ca. 547 g
- c) ca. 485 g
- d) ca. 503 g

4.

a) ca. 21 Mio.

b) ca. 78 %

5.

a) ca. 20,9 g

b) ca. 112,0 g

c) ca. 306,6 g

d) ca. 507,3 g

Halbwertszeit ca. 2 Jahre.

6.

a) ca. 210,7 g

b) ca. 250,4 g

c) ca. 37,4 g

d) ca. 0,000 000 000 00999977 g $[= 9,9977 \cdot 10^{-12}]$

Halbwertszeit ca. 8 Tage.

7.

a) ca. 95,1 g

b) ca. 81,9 g

c) ca. 50,0 g

d) ca. 0,000 0591 g

Halbwertszeit ca. 69 min 36 s.

8.

a) ca. 34 cm

b) ca. 114 cm

Anhang

- **Teilbarkeitsregeln**
- **Zusammenfassung 1: Bruchrechnen**
- **Zusammenfassung 2: Dreisatz**
- **Zusammenfassung 3: Prozentrechnen**
- **Zusammenfassung 4: Zinsrechnen**
- **Ausblick: Dreisatz und Gleichungen**

Teilbarkeitsregeln

Teiler	Kriterium
3 und 9	Quersumme
2 und 5	Endziffer
4	Die letzten zwei Ziffern
8	Die letzten drei Ziffern
11	Wechselsumme der Ziffern

Beispiel

Prüfe, ob die Zahl 31.578 durch 2, 3, 4, 5, 9 teilbar ist.

Lösung

1. Teilbarkeit durch 3 und 9

Quersumme: $31.578 \rightarrow 3+1+5+7+8 = 24 \rightarrow 2+4 = 6$

6 ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9.

Also ist 31.578 durch 3 teilbar, aber nicht durch 9.

2. Teilbarkeit durch 2 und 5

Endziffer: $31.578 \rightarrow 8$

8 ist durch 2 teilbar, aber nicht durch 5.

Also ist 31.578 durch 2 teilbar, aber nicht durch 5.

3. Teilbarkeit durch 4

Die beiden letzten Ziffern: $31.578 \rightarrow 78$

78 ist nicht durch 4 teilbar (denn $78:4 = 19 \text{ Rest } 2$).

Also ist 31.578 nicht durch 4 teilbar.

Antwort

Die Zahl 31.578 ist durch 2 und 3 teilbar, aber nicht durch 4, 5 und 9.

Begründungen

Es folgen die Begründungen für die wichtigeren ersten drei Teilbarkeitsregeln.

1. Teilbarkeit durch 3 und 9

Zerlege: $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, usw.

9, 99, 999, usw. sind durch 3 und 9 teilbar.

Betrachte zum Beispiel die Zahl 732:

$$\begin{aligned} 732 &= 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 \\ &= 7 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 2 \\ &= 7 \cdot 99 + 7 + 3 \cdot 9 + 3 + 2 \\ &= \underline{7 \cdot 99 + 3 \cdot 9} + 7 + 3 + 2 \end{aligned}$$

Der unterstrichene Anteil von 732 ist stets durch 3 und 9 teilbar. Ob 732 durch 3 oder 9 teilbar ist, entscheidet sich also bei der rechts stehenden Summe der Ziffern, der sogenannten **Quersumme**.

2. Teilbarkeit durch 2 und 5

Betrachte zum Beispiel die Zahl 476:

$$\begin{aligned} 476 &= 470 + 6 \quad (\text{Einer abspalten}) \\ &= \underline{47 \cdot 10} + 6 \end{aligned}$$

Nun ist 10 durch 2 und durch 5 teilbar, also ist auch der unterstrichene Anteil von 476 durch 2 und 5 teilbar. Ob 476 durch 2 oder 5 teilbar ist, entscheidet sich also bei der rechts stehenden **letzten Ziffer** von 476.

3. Teilbarkeit durch 4

Betrachte zum Beispiel die Zahl 1724:

$$1724 = 1700 + 24 \quad (\text{Einer und Zehner abspalten})$$

$$= \underline{17 \cdot 100} + 24$$

Nun ist 100 durch 4 teilbar, also ist auch der unterstrichene Anteil von 1724 durch 4 teilbar. Ob 1724 durch 4 teilbar ist, entscheidet sich also bei der Zahl, die aus den **letzten beiden Ziffern** besteht.

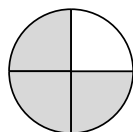
Zusammenfassung 1: Bruchrechnen

Bruch: $\frac{3}{4}$

Zähler

3 Viertel (wie 3 Äpfel)

Nenner



Bruch als Zahl: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$

Kürzen: Man teilt Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl:

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

Erweitern: Man multipliziert Zähler und Nenner mit derselben Zahl:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Addition: Brüche auf einen gemeinsamen Nenner (Nenner mal Nenner) bringen und dann die Zähler addieren:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Subtraktion: Brüche auf einen gemeinsamen Nenner (Nenner mal Nenner) bringen und dann die Zähler subtrahieren:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Multiplikation: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Bruchrechnen (Forts.)

Division: Man teilt durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

Zusammenfassung 2: Zeitumrechnung

Beispiel 1

Wandle **5,3 Minuten** in die übliche Form um (Minuten und Sekunden).

Lösung

$$\begin{aligned} 5,3 \text{ min} &= 5 \text{ min} + 0,3 \text{ min} && \text{(zerlegt)} \\ &= 5 \text{ min} + 0,3 \cdot 60 \text{ s} && \text{(umgewandelt)} \\ &= 5 \text{ min} + 18 \text{ s} \end{aligned}$$

Also: $5,3 \text{ min} = 5 \text{ min}, 18 \text{ s}$

Beispiel 2

Wandle **4,72 Stunden** in die übliche Form um.

Lösung

$$\begin{aligned} 4,72 \text{ h} &= 4 \text{ h} + 0,72 \text{ h} && \text{(zerlegt)} \\ &= 4 \text{ h} + 0,72 \cdot 60 \text{ min} && \text{(umgewandelt)} \\ &= 4 \text{ h} + 43,2 \text{ min} \\ &= 4 \text{ h} + 43 \text{ min} + 0,2 \text{ min} && \text{(zerlegt)} \\ &= 4 \text{ h} + 43 \text{ min} + 0,2 \cdot 60 \text{ s} && \text{(umgewandelt)} \\ &= 4 \text{ h} + 43 \text{ min} + 12 \text{ s} \end{aligned}$$

Also: $4,72 \text{ h} = 4 \text{ h}, 43 \text{ min}, 12 \text{ s}$

Beispiel 3

Bringe **800 min** in die übliche Form.

Lösung

Wandle zunächst die 800 min in Stunden um:

$$800 \text{ min} = (800 : 60) \text{ h} = 13,333 \dots \text{h}$$

Nun wie gehabt:

Zeitungrechnung (Forts.)

$$\begin{aligned}
 13,333\dots h &= 13 h + 0,333\dots h && \text{(zerlegt)} \\
 &= 13 h + 0,333\dots \cdot 60 \text{ min} && \text{(umgewandelt)} \\
 &= 13 h + 20 \text{ min}
 \end{aligned}$$

Also: $800 \text{ min} = 13 h + 20 \text{ min}$

Beispiel 4

Wandle 3 Stunden, 15 Minuten in eine Stundenangabe um.

Lösung

$$\begin{aligned}
 3 h \text{ und } 15 \text{ min} &= 3 h + 15 \text{ min} && \text{(15 min umwandeln in h)} \\
 &= 3 h + (15:60) h \\
 &= 3 h + 0,25 h && \text{(zusammenfassen)} \\
 &= 3,25 h
 \end{aligned}$$

Also: $3 h, 15 \text{ min} = 3,25 h$

Beispiel 5

Wandle 2 Tage, 8 Stunden, 12 Minuten in Tage um.

Lösung

$$\begin{aligned}
 2 d, 8 h, 12 \text{ min} &= 2 d + 8 h + 12 \text{ min} && \text{(12 min umw. in h)} \\
 &= 2 d + 8 h + (12:60) h \\
 &= 2 d + 8 h + 0,2 h && \text{(zusammenfassen)} \\
 &= 2 d + 8,2 h && \text{(8,2 h umw. in d)} \\
 &= 2 d + (8,2:24) d \\
 &= 2 d + 0,341666\dots d && \text{(zusammenfassen)} \\
 &= 2,341666\dots d
 \end{aligned}$$

Also: $2 d, 8 h, 12 \text{ min} = 2,341666\dots d \approx 2,3417 d$

Zusammenfassung 3: Dreisatz

Gerader (proportionaler) Dreisatz

Bei einem geraden Dreisatz stehen sich zwei Größen gegenüber, von denen jede steigt, wenn die andere steigt:

Mehr Apfelsinen kosten **mehr** Geld.

Alle geraden Dreisätze beruhen auf einem gemeinsamen Berechnungsschema. Die gesuchte Größe steht ganz rechts.

Beispiel

4 Äpfel kosten 2,40 Euro. Was kosten 10 Äpfel?

Lösung 1 (ausführlich)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

$$4 \text{ Äpfel} \rightarrow 2,40 \text{ Euro}$$

$$10 \text{ Äpfel} \rightarrow ?$$

2. Lösen des Dreisatzes

$$4 \text{ Äpfel} \rightarrow 2,40 \text{ Euro}$$

$$1 \text{ Apfel} \rightarrow \frac{2,40 \text{ Euro}}{4} = 0,60 \text{ Euro}$$

$$10 \text{ Äpfel} \rightarrow 10 \cdot 0,60 \text{ Euro} = 6 \text{ Euro}$$

Also: 10 Äpfel kosten 6,- Euro

Lösung 2 (kurz)

$$4 \text{ Äpfel} \rightarrow 2,40 \text{ Euro}$$

$$10 \text{ Äpfel} \rightarrow x$$

$$x = \frac{10 \cdot 2,40}{4} \text{ Euro} = 6 \text{ Euro}$$

Die Zahlen-Anordnung im Bruch entspricht der im Schema, nur 4 und 10 sind **vertauscht**.

Also: 10 Äpfel kosten 6,- Euro

Dreisatz (Forts.)

Ungerader (umgekehrt proportionaler) Dreisatz

Bei einem ungeraden Dreisatz stehen sich zwei Größen gegenüber, von denen eine fällt, wenn die andere steigt:

Mehr Arbeiter benötigen **weniger** Stunden.

Alle ungeraden Dreisätze beruhen auf einem gemeinsamen Berechnungsschema (ein anderes als beim geraden Dreisatz).

Beispiel

3 Angestellte zusammen erledigen eine Arbeit in 8 Stunden.
Wie lange brauchen 4 Angestellte für die Arbeit?

Lösung 1 (ausführlich)

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

3 Ang. → 8 Stunden

4 Ang. → ?

2. Lösen des Dreisatzes

3 Ang. → 8 Stunden

1 Ang. → $3 \cdot 8$ Stunden = 24 Stunden

4 Ang. → $\frac{24 \text{ Stunden}}{4} = 6$ Stunden

Also: 4 Angestellte benötigen 6 Stunden.

Lösung 2 (kurz)

3 Ang. → 8 Stunden

4 Ang. → ?

$$x = \frac{3 \cdot 8}{4} \text{ Stunden} = 6 \text{ Stunden}$$

Die Zahlen-Anordnung im Bruch entspricht exakt der im Schema.

Also: 4 Angestellte benötigen 6 Stunden.

Dreisatz (Forts.)

Zusammengesetzter Dreisatz

Beispiel

5 Angestellte bearbeiten zusammen 3 Aufträge in 48 Minuten.
Wie lange brauchen 4 Angestellte für 2 Aufträge?

Lösung

1. Die Aufgabenstellung in schematischer Form

5 Angestellte → 3 Aufträge → 48 Minuten
4 Angestellte → 2 Aufträge → ?

2. Die Verhältnisse: *gegebene Größen* → *gesuchte Größe*

a) Anzahl der Angestellten → benötigte Zeit:

Mehr Angestellte benötigen **weniger** Zeit.
Das Verhältnis ist also **ungerade**.

b) Anzahl der Aufträge → benötigte Zeit:

Mehr Aufträge erfordern auch **mehr** Zeit.
Das Verhältnis ist also **gerade**.

3. Berechnungsschema für den zusammengesetzten Dreisatz

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ungerade} & & \text{gerade} \\
 5 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 3 \text{ Aufträge} \rightarrow 48 \text{ Minuten} \\
 4 \text{ Angestellte} & \rightarrow & 2 \text{ Aufträge} \rightarrow x
 \end{array}$$

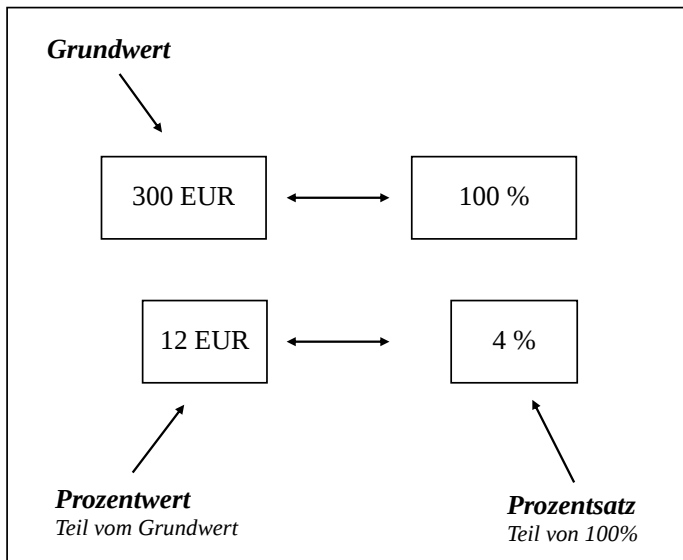
vertauscht (gerades Verhältnis)

$$x = \frac{5 \cdot 2 \cdot 48}{4 \cdot 3} \text{ Minuten} = \frac{480}{12} \text{ Minuten} = 40 \text{ Minuten}$$

Also: 4 Angestellte erledigen 2 Aufträge in 40 Minuten.

Zusammenfassung 4: Prozentrechnen

Prozentangaben dienen der anschaulichen und vergleichbaren Darstellung des Anteils an einer Gesamtheit (*Grundwert*). Dabei wird die Gesamtheit mit 100 Einheiten (100 %) gleichgesetzt. Jeder Teil der Gesamtheit entspricht dann einem *Teil von Hundert*.



Alle Aufgaben der Prozentrechnung lassen sich mithilfe von **Dreisätzen** lösen, die stets **proportional** sind.

Das Hauptproblem bei Aufgaben zur Prozentrechnung ist das Erkennen des **Grundwertes**.

Bei Änderungsprozessen ist in der Regel die **alte** Größe der **Grundwert**.

Prozentrechnen / Prozentwert

Berechnung des Prozentwertes

Beispiel

Wie viel sind 4 % von 300 €?

Lösung 1 (Dreisatz, ausführlich)

100% entsprechen dem Grundwert von 300 €. Gesucht ist der Wert, der zu dem Prozentsatz von 4 % gehört:

$$\begin{array}{rcl} 100 \% & \rightarrow & 300 \text{ €} \\ 4 \% & \rightarrow & ? \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{rcl} 100 \% & \rightarrow & 300 \text{ €} \\ 1 \% & \rightarrow & \frac{300}{100} \text{ €} = 3 \text{ €} \\ 4 \% & \rightarrow & 4 \cdot 3 \text{ €} = 12 \text{ €} \end{array}$$

Antwort: 4 % von 300 € sind 12 €

Lösung 2 (Dreisatz, kurz)

100% entsprechen dem Grundwert von 300 €. Gesucht ist der Wert, der zu dem Prozentsatz von 4 % gehört:

$$\begin{array}{rcl} 100 \% & \rightarrow & 300 \text{ €} \\ 4 \% & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{4 \cdot 300}{100} \text{ €} = 12 \text{ €}$$

Antwort: 4 % von 300 € sind 12 €

Prozentrechnen / Prozentsatz

Berechnung des Prozentsatzes

Beispiel

Wie viel Prozent sind 12 € von 300 €?

Lösung 1 (Dreisatz, ausführlich)

300 € ist der Grundwert und entspricht 100%. Gesucht ist der Prozentsatz, der zum Prozentwert von 12 € gehört:

$$\begin{array}{rcl} 300 \text{ €} & \rightarrow & 100 \% \\ 12 \text{ €} & \rightarrow & ? \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{rcl} 300 \text{ €} & \rightarrow & 100 \% \\ 1 \text{ €} & \rightarrow & \frac{100}{300} \% = 0,333... \% \\ 12 \text{ €} & \rightarrow & 12 \cdot 0,333... \% = 4 \% \end{array}$$

Antwort: 12 € sind 4 % von 300 €.

Lösung 2 (Dreisatz, kurz)

300 € ist der Grundwert und entspricht 100%. Gesucht ist der Prozentsatz, der zum Prozentwert von 12 € gehört:

$$\begin{array}{rcl} 300 \text{ €} & \rightarrow & 100 \% \\ 12 \text{ €} & \rightarrow & ? \end{array}$$

$$x = \frac{12 \cdot 100}{300} \% = 4 \%$$

Antwort: 12 € sind 4 % von 300 €.

Prozentrechnen /Grundwert

Berechnung des Grundwertes

Beispiel

In einer Stadt gibt es 2000 Analphabeten, das sind 5 % der Einwohner. Wie viele Einwohner hat die Stadt?

Lösung 1 (Dreisatz, ausführlich)

Der Prozentwert von 2000 Menschen (Analphabeten) entspricht dem Prozentsatz von 5 %. Gesucht ist der Grundwert, die Einwohnerzahl der Stadt:

$$\begin{array}{rcl} 5 \% & \rightarrow & 2000 \text{ Menschen} \\ 100 \% & \rightarrow & ? \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{rcl} 5 \% & \rightarrow & 2000 \text{ Menschen} \\ 1 \% & \rightarrow & \frac{2000}{5} \text{ Menschen} = 400 \text{ Menschen} \\ 100 \% & \rightarrow & 100 \cdot 400 \text{ Menschen} = 40.000 \text{ Menschen} \end{array}$$

Antwort: Die Stadt hat 40.000 Einwohner.

Lösung 2 (Dreisatz, kurz)

Der Prozentwert von 2000 Menschen (Analphabeten) entspricht dem Prozentsatz von 5 %. Gesucht ist der Grundwert, die Einwohnerzahl der Stadt:

$$\begin{array}{rcl} 5 \% & \rightarrow & 2000 \text{ Menschen} \\ 100 \% & \rightarrow & ? \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 2000}{5} \text{ Menschen} = 40.000 \text{ Menschen}$$

Antwort: Die Stadt hat 40.000 Einwohner.

Prozentrechnen / Vermehrter Grundwert

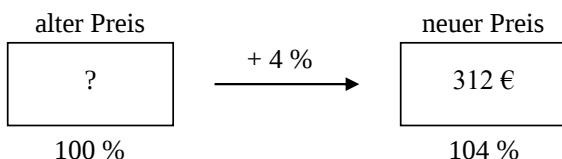
Vermehrter Grundwert

Beispiel

Nach einer Preiserhöhung um 4 % kostet ein Artikel 312 €. Wie viel kostete er vorher?

Lösung (Dreisatz, kurz)

Überblick:



Der neue Preis von 312 € entspricht $100 \% + 4 \% = 104 \%$.

Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen, um die Aufgabe mit einem Dreisatz lösen zu können:

$$104 \% \rightarrow 312 \text{ €}$$

$$100 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{100 \cdot 312}{104} \text{ €} = 300 \text{ €}$$

Antwort: Der Artikel kostete vorher 300 €.

Prozentrechnen/ Verminderter Grundwert

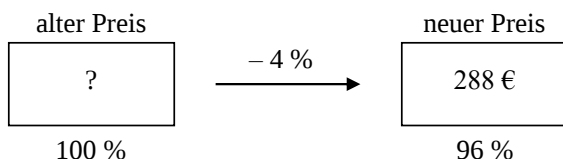
Verminderter Grundwert

Beispiel

Nach einem Rabatt von 4 % kostet ein Artikel 288 €. Wie viel kostete er vorher?

Lösung (Dreisatz, kurz)

Überblick:



Der neue Preis von 288 € entspricht $100\% - 4\% = 96\%$.

Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen, um die Aufgabe mit einem Dreisatz lösen zu können:

$$96\% \rightarrow 288\text{ €}$$

$$100\% \rightarrow x$$

$$x = \frac{100 \cdot 288}{96} \text{ €} = 300 \text{ €}$$

Antwort: Der Artikel kostete vorher 300 €.

Zusammenfassung 5: Zinsrechnen

Die vier Grundgrößen der Zinsrechnung:

- **Kapital/Kreditbetrag** K (z. B. 2000,-€)
- **Zinssatz** p (z. B. 4 %, bezogen auf ein Jahr, daher 4 % p.a.)
- **Laufzeit** (Jahre i oder n , Monate m , Tage t)
- **Zinsen** Z (Jahres-, Monats- oder Tageszinsen)

Es ist gesetzlich **verboten**, **Schuldzinsen** auf den **Kreditbetrag** aufzuschlagen.

Vereinfachter Kalender der deutschen Zinsrechnung:

1 Jahr = 360 Tage = 12 Monate

1 Monat = 30 Tage (**alle** Monate)

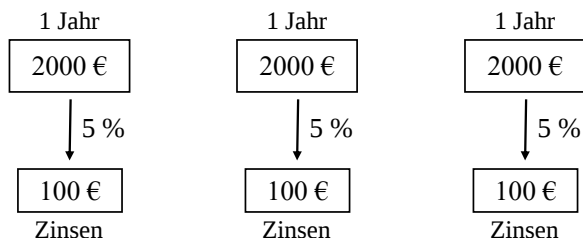
Jahreszinsen (ohne Aufschlag der Zinsen)

Beispiel

Für einen Kredit von 2000,- € werden 5% p. a. Zinsen verlangt. Der Kredit läuft 3 Jahre. Wie viel Zinsen fallen an?

Lösung 1 (Dreisatz)

Eine kleine Grafik veranschaulicht das Geschehen in den drei Jahren, in denen der Kredit läuft. In jedem der Jahre ist der Kreditbetrag gleich (2000 €), ebenso die anfallenden Zinsen:



Zinsrechnen / Jahreszinsen (Forts.)

1. Zinsen in einem Jahr:

$$100 \% \rightarrow 2000 \text{ €}$$

$$5 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{5 \cdot 2000}{100} \text{ €} = 100 \text{ €}$$

2. Zinsen in 3 Jahren:

In 3 Jahren fallen dreimal so viele Zinsen an wie in einem Jahr:

$$3 \cdot 100 \text{ €} = 300 \text{ €}$$

Antwort: Es fallen 300,- € Zinsen an.

Lösung 2 (Kip-Formel)

Wir benutzen die Kip-Formel:

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100}$$

Und setzen die gegebenen Werte ein:

$$Z = \frac{2000 \text{ €} \cdot 3 \cdot 5 \%}{100 \%} = \frac{2000 \cdot 3 \cdot 5}{100} \text{ €} = 300 \text{ €}$$

Antwort: Es fallen 300,- € Zinsen an.

Zinsrechnen / Monatszinsen

Monatszinsen

Beispiel

Gegeben: Kredit

- * Kreditbetrag: 12.000 €
- * Zinssatz: 8 % p. a.
- * Laufzeit: 7 Monate

Gesucht: Zinsen

Lösung (Dreisatz)

1. Zinsen für ein Jahr:

$$100 \% \rightarrow 12.000 \text{ €}$$

$$8 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{8 \cdot 12.000}{100} \text{ €} = 960 \text{ €}$$

2. Zinsen für 7 Monate:

$$12 \text{ Monate} \rightarrow 960 \text{ €}$$

$$1 \text{ Monat} \rightarrow \frac{960}{12} \text{ €} = 80 \text{ €}$$

$$7 \text{ Monate} \rightarrow 7 \cdot 80 \text{ €} = 560 \text{ €}$$

Antwort: Die Zinsen für den Kredit betragen 560,- €.

Anmerkung:

Die Aufgabe kann auch mithilfe der Monatszinsformel

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$$

gelöst werden.

Zinsrechnen /Tageszinsen

Tageszinsen

Beispiel

Gegeben: Kredit

- * Kreditbetrag: 2.000 €
- * Zinssatz: 9 % p. a.
- * Laufzeit: 23.03. – 19.07.

Gesucht: Zinsen

Lösung

1. Zinstage:

Zeitraum: 23.03. – 19.07.

März: 30 – 23 = 7

April: 30

Mai: 30

Juni: 30

Juli: 19

Insgesamt: $7 + 3 \cdot 30 + 19 = 116$

Es sind also 116 Zinstage zu berücksichtigen

2. Zinsen für ein Jahr:

$$100 \% \rightarrow 2.000 \text{ €}$$

$$9 \% \rightarrow x$$

$$x = \frac{9 \cdot 2.000}{100} \text{ €} = 180 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr (=360 Tage) betragen also 180 €.

Zinsrechnen / Tageszinsen (Forts.)

3. Zinsen für 116 Tage:

$$360 \text{ Tage} \rightarrow 180 \text{ €}$$

$$1 \text{ Tag} \rightarrow \frac{180}{360} \text{ €} = 0,50 \text{ €}$$

$$116 \text{ Tage} \rightarrow 116 \cdot 0,50 \text{ €} = 58 \text{ €}$$

Antwort: Die Zinsen für den Kredit betragen 58,- €.

Anmerkung:

Die Aufgabe kann auch mithilfe der Tagesszinsformel

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

gelöst werden.

Zinsrechnen / Kapital, Zinssatz, Laufzeit berechnen

Wir benutzen Dreisätze. Der erste Schritt ist hier stets die Berechnung der **Zinsen** für **ein Jahr**.

Man kann die Größen auch durch Umstellen der Tageszinsformel lösen.

Beispiel 1 (Kapital)

Gegeben: Kredit

* Zinssatz:	9 % p. a.
* Laufzeit:	18 Tage
* Zinsen:	27 €

Gesucht: Kreditbetrag (Kapital)

Lösung

1. Zinsen für ein Jahr:

18 Tage	→	27 €
360 Tage	→	x

$$x = \frac{360 \cdot 27}{18} \text{ €} = 540 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr (=360 Tage) betragen also 540 €.

2. Kreditbetrag:

9 %	→	540 €
100 %	→	x

$$x = \frac{100 \cdot 540}{9} \text{ €} = 6.000 \text{ €}$$

Antwort: Der Kreditbetrag ist 6.000,- €.

**Zinsrechnen / Kapital, Zinssatz, Laufzeit berechnen
(Fortsetzung)****Beispiel 2 (Zinssatz)**

Gegeben: Kredit

- * Kreditbetrag: 6.000 €
- * Laufzeit: 18 Tage
- * Zinsen: 27 €

Gesucht: Zinssatz

Lösung**1. Zinsen für ein Jahr:**

$$\begin{array}{lll} 18 \text{ Tage} & \rightarrow & 27 \text{ €} \\ 360 \text{ Tage} & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{360 \cdot 27}{18} \text{ €} = 540 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr (=360 Tage) betragen also 540 €.

2. Zinssatz:

$$\begin{array}{lll} 6.000 \text{ €} & \rightarrow & 100 \% \\ 540 \text{ €} & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{540 \cdot 100}{6.000} \% = 9 \%$$

Antwort: Der Zinssatz beträgt 9 %.

Zinsrechnen / Kapital, Zinssatz, Laufzeit berechnen (Fortsetzung)

Beispiel 3 (Laufzeit)

Gegeben: Kredit

* Kreditbetrag:	6.000 €
* Zinssatz:	9 %
* Zinsen:	27 €

Gesucht: Laufzeit

Lösung

1. Zinsen für ein Jahr:

100 %	→	6.000 €
9 %	→	x

$$x = \frac{9 \cdot 6.000}{100} \text{ €} = 540 \text{ €}$$

Die Zinsen für 1 Jahr betragen also 540 €.

2. Laufzeit:

540 €	→	360 Tage
27 €	→	x

$$x = \frac{27 \cdot 360}{540} \text{ Tage} = 18 \text{ Tage}$$

Antwort: Die Laufzeit beträgt 18 Tage.

Zinsrechnen / Zinseszins

Zinseszins-Formeln

Kapital nach n Jahren: $K_n = K_0 \cdot q^n$

Zinsfaktor: $q = \frac{100 + p}{100}$

Hierbei sind

p = Zinssatz

q = Zinfaktor

n = Laufzeit (in Jahren)

K_n = Kapital nach n Jahren

K_0 = Anfangskapital (Kapital nach 0 Jahren)

Beispiel

Gegeben: Sparguthaben

- * Kapital: 3.000 €
- * Zinssatz: 4 % p. a.
- * Laufzeit: 10 Jahre

Gesucht: Endguthaben

Lösung

1. Zinsfaktor berechnen

$$q = \frac{100 + p}{100}$$

Setze $p = 4$ ein:

$$q = \frac{100 + 4}{100} = \frac{104}{100} = 1,04$$

$$q = 1,04$$

Zinsrechnen / Zinseszins (Forts.)

2. Endkapital berechnen

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Setze die gegebenen Größen ein:

$$\begin{aligned} K_{10} &= 3.000 \text{ €} \cdot 1,04^{10} \\ &= 3.000 \text{ €} \cdot 1,480244285 \\ &= 4.440,732855 \text{ €} \\ &\approx 4.440,73 \text{ €} \end{aligned}$$

Antwort

Das Endguthaben beträgt 4.440,73 €.

Ausblick: Dreisatz und Gleichungen

Dreisätze kann man mit Verhältnisgleichungen lösen.

Beispiel eines proportionalen Dreisatzes

4 kg eines Artikels kosten 28 €. Wie viel kosten 3 kg?

Lösung

Aufgabenstellung:

$$4 \text{ kg} \rightarrow 28 \text{ €}$$

$$3 \text{ kg} \rightarrow x$$

Verhältnisgleichung aufstellen (Zahlenanordnung der Aufgabenstellung übernehmen) und lösen:

$$\frac{4 \text{ kg}}{3 \text{ kg}} = \frac{28 \text{ €}}{x} \quad | \text{ Kehrwert bilden}$$

$$\frac{3 \text{ kg}}{4 \text{ kg}} = \frac{x}{28 \text{ €}} \quad | \cdot 28 \text{ €}$$

$$\frac{3 \text{ kg} \cdot 28 \text{ €}}{4 \text{ kg}} = x$$

$$21 \text{ €} = x$$

Antwort: 3 kg des Artikels kosten 21 €.

Beispiel eines umgekehrt proportionalen Dreisatzes

Zwei Arbeiter erledigen einen Auftrag in 9 Tagen. Wie lange benötigen 3 Arbeiter dafür?

Lösung

Aufgabenstellung:

$$2 \text{ Arbeiter} \rightarrow 9 \text{ Tage}$$

$$3 \text{ Arbeiter} \rightarrow x$$

Dreisatz und Gleichungen (Forts.)

Wir **kehren** in der Verhältnisgleichung **einen** Bruch **um**, vorzugsweise den rechten, damit x bereits im Zähler steht:

$$\frac{2 \text{ Arbeiter}}{3 \text{ Arbeiter}} = \frac{x}{9 \text{ Tage}}$$

Nun lösen wir die Gleichung nach x auf:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{9 \text{ Tage}} \quad | \cdot (9 \text{ Tage})$$

$$\frac{2}{3} \cdot 9 \text{ Tage} = x \quad | \text{multiplizieren}$$

$$6 \text{ Tage} = x$$

Also benötigen 3 Arbeiter für den Auftrag 6 Tage.

