

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Alexander Roux

$$a^2 = a \cdot a$$



$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\log(a^x) = x$$

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen,
Wurzeln
und
Logarithmen

Alexander Roux

Impressum

Copyright: © 2025 Alexander Roux

Alle Rechte vorbehalten

www.a-roux.de

ISBN 9798284341773

Selbstverlag, Alexander Roux

c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb: Kindle Direct Publishing

Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,

L-1855 Luxemburg

Vorwort

Dieses kleine Buch soll den Leser mit den drei sehr eng zusammenhängenden Themen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen vertraut machen.

Der Themenbereich ist besonders schön und faszinierend. Ursprünglich waren Potenzen lediglich Abkürzungen bei der Multiplikation von mehreren gleichen Zahlen. Eine mit gesundem Menschenverstand nachvollziehbare Erweiterung schließt dann Wurzeln ein. Diese erweiterten, allgemeinen Potenzen sind die Grundlage der Logarithmen, die in den vergangenen 500 Jahren ein entscheidendes Rechenhilfsmittel waren und auch zur Erfindung des genauso wichtigen Rechenschiebers geführt haben. Beides hat zum Vorsprung der europäischen Wissenschaften der Neuzeit beigetragen.

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen sind in der Mathematik und den Naturwissenschaften auch heute noch allgegenwärtig. Als Rechenhilfe sind die Logarithmen jedoch durch Rechner abgelöst worden.

Die Besonderheit dieses Buches liegt vor allem in zwei Aspekten: Erstens werden die Themen in ihrem *historischen* Zusammenhang dargestellt, was zur Verständlichkeit erheblich beiträgt. Zweitens wird alles hergeleitet und stets eine lückenlose Argumentationskette angestrebt. So wird auch ausführlich auf die *praktische Berechnung* von Potenzen, Wurzeln und Logarithmen eingegangen; es werden sogar die Exponentialreihe und Logarithmusreihen auf elementare Weise entwickelt, ohne höhere Mathematik zu benutzen. Das Buch ist dadurch relativ umfangreich.

Zusammenfassungen im Anhang helfen, den Wald trotz der vielen Bäume zu sehen. Die Lektüre des Buches erfordert nur wenige Vorkenntnisse: die vier Grundrechenarten, Bruchrechnen, negative Zahlen und an einigen Stellen auch Buchstabenrechnen und elementare Gleichungen.

Am Ende jedes Kapitels befinden sich Übungsaufgaben zu allen behandelten Themen. Die Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben ist unverzichtbar, wenn man den Stoff lernen möchte.

Es gibt eine ständig steigende Tendenz in den Schulen des Westens, die Grundideen in der Mathematik durch eine Vielzahl von vermeintlich „praktischen“ oder „alltäglichen“ Beispielen zu verdunkeln.

Der vorliegende Text soll einen Beitrag dazu leisten, die wesentlichen Gedanken wieder deutlich sichtbar zu machen.

Dank der Hinweise von Herrn Gunnar Heiden konnten zahlreiche Druckfehler korrigiert und Verbesserungen vorgenommen werden.

Dr. A. Roux
Brühl, Mai 2025

Inhalt

Vorwort	5
Inhalt	7
1. Einführung und Überblick	11
1.1 Potenzen als bloße Abkürzung.....	11
1.2 Potenzen mit den Exponenten 1, 0, -1 , -2 ,	12
1.3 Brüche und Dezimalbrüche als Exponenten	13
1.4 Anwendungen	16
Aufgaben	19
2. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	21
2.1 Was ist eine Potenz?	21
2.2 Negative Zahlen sowie 0 und 1 als Exponenten	25
2.3 Rechnen mit Potenzen.....	29
2.4 Multiplikation von Potenzen	30
2.5 Division von Potenzen	41
2.6 Potenzen von Potenzen	49
2.7 Wissenschaftliche Notation von Zahlen	52
2.8 Zusammenfassung.....	59
Aufgaben	61
3. Quadratwurzeln	65
3.1 Wozu brauchten Babylonier Wurzeln?	65
3.2 Quadratwurzel: Definition, Schreibweisen	71
3.3 Regeln für Quadratwurzeln	81
3.4 Wurzeln sind meist keine Brüche	93
3.5 Die Berechnung von Quadratwurzeln.....	105
Aufgaben	151
4. Höhere Wurzeln	155
4.1 Kubikwurzeln.....	155
4.2 Regeln für Kubikwurzeln.....	165

4.3 Kubikwurzeln sind meist keine Brüche	174
4.4 Die Berechnung von Kubikwurzeln	180
4.5 Höhere Wurzeln	191
4.6 Regeln für höhere Wurzeln	200
Aufgaben	212
5. Potenzen mit beliebigen Exponenten	215
5.1 Brüche als Exponenten	215
5.2 Beliebige Exponenten	229
Aufgaben	232
6. Die eulersche Zahl e	233
6.1. Zahlen nahe bei 1 und die eulersche Zahl	233
6.2 Potenzen von e	236
6.3 Eine Formel für e^x	240
Aufgaben	259
7. Logarithmen	262
7.1 Die Grundidee der Logarithmen	262
7.2 Logarithmen: Definition	272
7.3 Regeln für Logarithmen	281
7.4 Logarithmen mit unterschiedlichen Basen	289
Aufgaben	299
8. Erstellung von Logarithmentafeln	301
8.1 Erstellung einer Tafel von e -Potenzen	302
8.2 Eine Tafel natürlicher Logarithmen	308
8.3 Erstellung einer Zehnerlogarithmentafel	316
Aufgaben	327
9. Rechenmethoden für Computer	329
9.1 Berechnung von e -Potenzen	331
9.2 Näherungsweise Berechnung von natürlichen Logarithmen	338
9.3 Logarithmusreihen	343
Aufgaben	363

10. Anwendungen der Logarithmen	367
10.1 Exponentialgleichungen.....	368
10.2 Rechenschieber	374
10.3 Größenordnung von Zahlen	382
10.4 Informationsbegriff	383
Aufgaben	391
Lösungen	393
Anhang 1: Zusammenfassungen	411
Potenzen I.....	412
Wurzeln	414
Potenzen II	419
Zahlen nahe bei 1, eulersche Zahl.....	421
Logarithmen	424
Berechnung von Logarithmen und Potenzen	427
Anwendungen der Logarithmen	431
Anhang 2: Ausblick	435
Komplexe Zahlen	436
Eulers Zauberformel	439

1. Einführung und Überblick

1.1 Potenzen als bloße Abkürzung

Potenzen sind zunächst nur als *abkürzende Schreibweise* für Produkte mit gleichen Faktoren eingeführt worden:

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

usw.

Die rechts stehende hochgestellte Zahl wird als *Hochzahl* oder *Exponent* bezeichnet und gibt an, wie oft der Faktor im Produkt vorkommt. Als Hochzahlen kommen hier nur die glatten Zahlen

$$2, 3, 4, \dots$$

in Betracht, denn ein Produkt hat mindestens 2 Faktoren ($a \cdot a$) und man kann weitere Faktoren hinzufügen.

Es ist faszinierend zu sehen, wie man die Potenzen schrittweise auf beliebige Exponenten ausdehnen kann, was zu einigen praktischen und sehr nützlichen Anwendungen führt.

1.2 Potenzen mit den Exponenten 1, 0, -1, -2,...

Um diese Erweiterung der Potenzen zu verstehen, werfen wir einen genaueren Blick auf die obige Liste und lesen einige Regelmäßigkeiten ab:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a \cdot a & \xrightarrow{\cdot a} & a \cdot a \cdot a & \xrightarrow{\cdot a} & a \cdot a \cdot a \cdot a & \xrightarrow{\cdot a} & a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \xrightarrow{\cdot a} \dots \\
 a^2 & & a^3 & & a^4 & & a^5 \\
 2 & \xrightarrow{+1} & 3 & \xrightarrow{+1} & 4 & \xrightarrow{+1} & 5 \xrightarrow{+1} \dots
 \end{array}$$

Man gelangt zur jeweils nachfolgenden Potenz, indem man einerseits jeweils mit a multipliziert oder andererseits den Exponenten um 1 erhöht.

Wenn erweiterte Potenzen überhaupt sinnvoll sind, dann sollten auch sie die schönen Regelmäßigkeiten aufweisen. Wir unterstellen also diese Gesetzmäßigkeiten, lesen die Liste rückwärts und setzen sie nach links fort (wobei $a \neq 0$ sein muss, da man nicht durch 0 dividieren kann) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \frac{1}{a^2} & \xleftarrow{:a} & \frac{1}{a} & \xleftarrow{:a} & 1 & \xleftarrow{:a} & a & \xleftarrow{:a} & a \cdot a & \xleftarrow{:a} & a \cdot a \cdot a \\
 \dots & a^{-2} & & a^{-1} & & a^0 & & a^1 & & a^2 & & a^3 \\
 \dots & -2 & \xleftarrow{-1} & -1 & \xleftarrow{-1} & 0 & \xleftarrow{-1} & 1 & \xleftarrow{-1} & 2 & \xleftarrow{-1} & 3
 \end{array}$$

Diese Überlegungen, die zuerst von Nicolas Chuquet (geboren zwischen 1445 und 1455, gestorben 1488) angestellt worden sind, liefern uns also die folgenden neuen Potenzen mit negativen Zahlen und auch 0 und 1 als Exponenten, nämlich:

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

...

Hierbei muss $a \neq 0$ sein.

1.3 Brüche und Dezimalbrüche als Exponenten

Nicole Oresme (ca. 1320-1382) hat nicht nur die Potenzen erfunden, sondern auch Brüche als Exponenten betrachtet.



Nicole Oresme
ca.1320 - 1382

Um diese zu verstehen, benötigen wir eine weitere Regelmäßigkeit unserer ursprünglichen Potenzen. Sie zeigt sich, wenn man zwei Potenzen miteinander malnimmt:

$$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

Zum Multiplizieren zweier gleichartiger Potenzen muss man also lediglich die **Exponenten addieren** (2 Faktoren plus 3 Faktoren ergeben zusammen 5 Faktoren).

Wir wenden hier wieder die Überlegung an, dass auch die erweiterten Potenzen diese schöne Regelmäßigkeit aufweisen sollten.

Also unterstellen wir diese Gesetzmäßigkeit als allgemeingültig und multiplizieren die Potenz $a^{\frac{1}{2}}$ mit sich selbst (wobei der Hintergedanke $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ist):

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a,$$

also ist

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a.$$

Das bedeutet, dass $a^{\frac{1}{2}}$ mit sich selbst multipliziert nichts anders als a ergibt. Dies entspricht genau der Definition der Wurzel (genauer: Quadratwurzel). Daher ist

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Anders gesagt:

$$a^{0,5} = \sqrt{a}.$$

Völlig analog kommt man so auch zu den Potenzen:

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}, \quad a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}, \quad \dots$$

Nach der oben genannten Regelmäßigkeit sind nun beliebige Brüche als Exponenten möglich, zum Beispiel erhalten wir

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a},$$

also

$$\begin{aligned} a^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \\ a^{0,666\dots} &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}. \end{aligned}$$

Oder auch

$$a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a},$$

also

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{4}} &= \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \\ a^{0,75} &= \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a}. \end{aligned}$$

Da jede Kommazahl (d. h. Dezimalbruch) durch einen Bruch angenähert werden kann, sind nun auch beliebige Exponenten erlaubt, beispielsweise

$$\begin{aligned} a^{\pi} &\approx a^{3,14} \\ &= a^{3+0,14} \\ &= a^3 \cdot a^{0,14} \\ &= a^3 \cdot a^{\frac{14}{100}} \\ &= a^3 \cdot \underbrace{a^{\frac{1}{100}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{100}}}_{14\text{-mal}} \\ &= a^3 \cdot \underbrace{\sqrt[100]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[100]{a}}_{14\text{-mal}} \end{aligned}$$

1.4 Anwendungen

Die bisherigen Ergebnisse haben bereits zwei weitreichende Anwendungen:

1. Wurzeln

Man kann nun die *Wurzeln als Potenzen* auffassen und einfacher handhaben (zum Beispiel auch in der Differential- und Integralrechnung), da man lediglich die *Potenzregeln* anwenden muss.

2. Logarithmen

Ferner kann man nun **jede** (positive) **Zahl als Potenz** schreiben und dann die Potenzregeln benutzen, um die aufwendigeren höheren Rechenarten auf niedrigere zurückzuführen:

- Multiplikationen auf Additionen,
- Divisionen auf Subtraktionen,
- das Potenzieren auf das Multiplizieren und
- das Wurzelziehen auf das Dividieren.

Um eine Zahl als Potenz schreiben zu können, muss man den Exponenten finden. Da dies nun etwas aufwendiger ist, hat John Napier (1550-1617) dem Exponenten einen weiteren Namen gegeben und ihn als **Logarithmus** (d. h. „zu berechnende Zahl“) bezeichnet.. Die Werte dieser Hochzahlen sind in **Logarithmentafeln** zusammengestellt, werden heute aber von (Taschen-) Rechnern **berechnet**. Beides wird diesem Buch behandelt werden.

Um die vereinfachte Berechnung mithilfe von Logarithmen zu erläutern, betrachten wir ein sehr einfaches Beispiel (das selbstverständlich auch ohne Logarithmen und im Kopf berechnet werden kann), nämlich:

$$4 \cdot 8 = ?$$

$$4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 \quad | \text{ 4 und 8 als Potenz geschrieben (Tabelle) }$$

$$= 2^{2+3} \quad | \text{ Potenzregel benutzt }$$

$$= 2^5 \quad | \text{ 2 und 3 **addiert** }$$

$$= 32 \quad | \text{ Potenzwert (Tabelle) }$$

Bei dieser Multiplikation wird lediglich einmal *addiert* und dreimal in der folgenden Tabelle (Logarithmentafel) *nachgeschlagen* (s. schraffierte Elemente). Die früher in der Praxis benutzten Logarithmentafeln sind wesentlich umfangreicher und enthalten viele Zwischenwerte.

Tabelle

Potenzwerte 2^n	Hochzahlen n
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7

Dieses Buch verfolgt das Ziel, möglichst vieles aus den vier Grundrechenarten und mit gesundem Menschenverstand schlüssig herzuleiten. An einigen (fortgeschrittenen) Stellen werden der Umgang mit Rechenausdrücken und elementaren Gleichungen vorausgesetzt.

In diesem Buch werden folgende Themen behandelt:

- Potenzen mit natürlichen Exponenten 2, 3, 4
- Potenzen mit den Exponenten 1, 0, -1 , -2 , ...
- Wurzeln
- Potenzen mit gebrochenen Exponenten
- Logarithmen
- Imaginäre Exponenten und Trigonometrie, die Zauberformel von Euler

Das letzte Thema hat eher den Charakter eines Ausblicks und wird im Anhang kurz erläutert. Dabei gehen wir von den üblichen Zahlen zu einem erweiterten Bereich über, dem Bereich der *komplexen* Zahlen. Diese ergeben sich aus den üblichen Zahlen durch Hinzufügen der *imaginären Einheit* $i = \sqrt{-1}$. Nimmt man diese neuen Zahlen in den Exponenten, so offenbart sich ein völlig überraschender Zusammenhang zu Sinus und Kosinus, nämlich die *Zauberformel von Euler* (1707-1783):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 1.1

1. Berechne:

- a) $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$
- b) $3^2, 3^3, 3^4, 3^5$
- c) $10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$
- d) $0^2, 0^3, 0^4, 1^2, 1^3, 1^4$
- e) $0,1^2, 0,1^3, 0,1^4, 0,1^5$
- f) $(-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5, (-1)^6, (-1)^7$
- g) $(-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, (-2)^6, (-2)^7$

2. Berechne:

- a) $1,01^2, 1,01^3, 1,01^4, 1,01^5$
- b) $1,03^2, 1,03^3, 1,03^4, 1,03^5$

Aufgaben zu Kapitel 1.2

1. Bestimme die Werte:

- a) $2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$
- b) $1^0, 0^1, 1^1, (-1)^0$
- c) $10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$
- d) $1^{-2}, 1^{-3}, 1^{-4}, 1^{-5}$
- e) $0,1^1, 0,1^0, 0,1^{-1}, 0,1^{-2}, 0,1^{-3}$
- f) $(-1)^{-2}, (-1)^{-3}, (-1)^{-4}, (-1)^{-5}, (-1)^{-6}$

2. Bestimme die Werte:

a) $1,01^1$, $1,01^{-1}$, $1,01^2$, $1,01^{-2}$

b) $0,99^1$, $0,99^{-1}$, $0,99^2$, $0,99^{-2}$, $0,99^3$, $0,99^{-3}$

Aufgaben zu Kapitel 1.3

1. Bestimme die Werte:

a) $9^{0,5}$, $25^{0,5}$, $81^{0,5}$, $100^{0,5}$, $49^{0,5}$

b) $8^{\frac{1}{3}}$, $27^{\frac{1}{3}}$, $16^{\frac{1}{4}}$, $32^{0,2}$, $8^{\frac{2}{3}}$, $100\,000^{0,4}$

Aufgaben zu Kapitel 1.4

1. Benutze obige Tabelle der Zweierpotenzen, um folgende Produkte zu berechnen:

a) $2 \cdot 32$

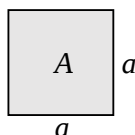
b) $8 \cdot 16$

2. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

2.1 Was ist eine Potenz?

Wir beginnen mit drei Beispielen, die ahnen lassen, warum die Potenzen als nützliche Abkürzungen ersonnen worden sind.

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist Länge mal Breite. Ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten. Daher wird der Flächeninhalt A eines Quadrates berechnet, indem man die Seitenlänge a mit sich selbst multipliziert:



$$A = a \cdot a$$

Daher wird $a \cdot a$ auch als „ a zum Quadrat“ oder meist kurz „ a Quadrat“ bezeichnet.

Das Volumen eines Würfels (lat. cubus, griechisch kubos, κύβος) mit der Kantenlänge a bekommt man, indem man nochmal mit a multipliziert:

$$V = a \cdot a \cdot a$$

Auch hier gibt es eine abkürzende sprachliche Bezeichnung für $a \cdot a \cdot a$, nämlich „ a Kubik“.

Legt man ein Guthaben von beispielsweise 200 € zu einem Zinssatz von 5 % (p.a., d.h. pro Jahr) an, so wird es jedes Jahr um 5 % auf dann 105 % wachsen. Wir betrachten die Rechnung für das erste Jahr, starten also mit 200 € (entspricht 100 %) und benutzen einen klassischen Dreisatz. Dazu berechnen wir zunächst den Wert von 1 %, indem wir das Guthaben durch 100 dividieren oder mit $\frac{1}{100}$ multiplizieren. Um 105 % zu bekommen, müssen wir anschließend noch mit 105 multiplizieren:

$$\begin{aligned}\text{Kapital nach dem ersten Jahr} &= 200 \text{ €} \cdot \frac{1}{100} \cdot 105 \\ &= 200 \text{ €} \cdot \frac{105}{100} \\ &= 200 \text{ €} \cdot 1,05\end{aligned}$$

Man muss also lediglich mit dem *Zinsfaktor* 1,05 ($= \frac{100+5}{100}$) multiplizieren. Für jedes weitere Jahr muss nochmal mit dem Zinsfaktor multipliziert werden, also:

$$\begin{aligned}\text{Kapital nach 1 Jahr} &= 200 \text{ €} \cdot 1,05 \\ \text{Kapital nach 2 Jahren} &= 200 \text{ €} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \\ \text{Kapital nach 3 Jahren} &= 200 \text{ €} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \\ \text{Kapital nach 4 Jahren} &= 200 \text{ €} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \\ &\text{ usw.}\end{aligned}$$

Für lange Laufzeiten wie 10, 20 oder sogar 30 Jahre werden die Ausdrücke so lang, dass eine Abkürzung notwendig wird.

Um $1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05$ abzukürzen, könnte man zum Beispiel sagen: Multipliziere 1,05 wiederholt mit sich selbst, der Faktor soll viermal erscheinen.

Es gab im Laufe der Zeit verschiedene abkürzende Schreibweisen, die die zwei entscheidenden Zahlen enthalten, den **Faktor** (1,05) und **wie oft** er auftritt (4-mal). Durchgesetzt hat sich die Schreibweise von René Descartes (1596-1650) in seiner *Géométrie*. Darin wird rechts neben dem Faktor an erhöhter Stelle geschrieben, wie oft der Faktor im Produkt vorkommt. Hier ist die Stelle aus der ersten Auflage der *Géométrie* aus dem Jahre 1637, wo zum ersten Mal diese Schreibweise auftaucht:

lettres, chascune par vne feule. Comme pour adioufter ^{chiffres en} la ligne B D a G H, ie nomme l'vne *a* & l'autre *b*, & escri^{Geome-}
 $a + b$; Et $a - b$, pour soustraire b d' a ; Et ab , pour les mul-
 tiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuifer a par b ; Et aa ,
 ou a^2 , pour multiplier a par soy mesme; Et a^3 , pour le
 multiplier encore vne fois par a , & ainsi a l'infini; Et

Übersetzt:

„...Um die Strecke BD zu GH hinzuzufügen, nenne ich die eine a und die andere b und schreibe $a+b$; und $a-b$, um b von a zu subtrahieren; Und ab , um sie miteinander zu multiplizieren; und $\frac{a}{b}$ um a durch b zu dividieren; und aa oder a^2 , um a mit sich selbst zu multiplizieren; und a^3 , um es noch einmal mit a zu multiplizieren und so weiter bis ins Unendliche; ...“



René Descartes (1596-1650)

Die obigen Beispiele werden dann folgendermaßen geschrieben:

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1,05^4$$

Wenn die Faktoren Buchstaben sind, wird der Multiplikationspunkt oft weggelassen und man schreibt zum Beispiel:

$$aa = a^2$$

$$aaa = a^3$$

Gebilde wie a^2 , a^3 und $1,05^4$ werden als **Potenzen** bezeichnet, der zu multiplizierende Faktor wird **Basis** oder **Grundzahl** genannt und die Anzahl des Auftretens des Faktors heißt **Exponent** oder **Hochzahl**.

Man benutzt auch das Verb **potenzieren** und sagt etwa, dass man a potenziert, und genauer, dass man a mit 3 potenziert (was a^3 ergibt) oder 1,05 mit 4 potenziert (was $1,05^4$ ergibt).

Potenz: $\underbrace{aa \dots a}_{a \text{ steht } n\text{-mal}} = a^n$ $\uparrow$ Basis $\nwarrow$ Exponent

Die Bezeichnung „Potenz“ rührt daher, dass sie sehr groß (also gewissermaßen mächtig, potent) sein kann, obwohl Grund- und Hochzahl relativ klein sind, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
 10^6 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \\
 &= 1\,000\,000 \\
 &= 1 \text{ Million}
 \end{aligned}$$

Um überhaupt multiplizieren zu können, benötigt man mindestens zwei Zahlen. Daher sind die Potenzen zunächst lediglich für die Exponenten 2, 3, 4, usw. sinnvoll.

2.2 Negative Zahlen sowie 0 und 1 als Exponenten

Der entscheidende Ansatz, um weitere Exponenten zuzulassen, ist die Betrachtung gewisser **Regelmäßigkeiten** bei unseren Potenzen. Wir *unterstellen* diese Regelmäßigkeiten nun für Potenzen mit *beliebigen* Exponenten und können daraus erkennen, was diese Potenzen sein müssen. (Irgendwie geartete Potenzen, die diese schönen und praktischen Regelmäßigkeiten nicht aufweisen, wären unbrauchbar.) Wir betrachten nachfolgend mehrere Regelmäßigkeiten. Die erste wurde, wie bereits erwähnt, von Chuquet erkannt und angewandt.

Regelmäßigkeit 1

Eine erste Regelmäßigkeit der Potenzen erkennen wir an der folgenden Liste von Potenzen mit aufsteigenden Exponenten 2,3,4, usw.:

$$a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad a^4 = aaaa, \quad a^5 = aaaaa, \quad \text{usw.}$$

Wenn man von links nach rechts liest, sieht man zweierlei:

1. Aus jeder Potenz ergibt sich die nachfolgende Potenz durch Multiplikation mit a .
2. Die Exponenten nehmen jeweils um 1 zu.

Wir haben also folgende Situation:

$$a^2 \xrightarrow{\cdot a} a^3 \xrightarrow{\cdot a} a^4 \xrightarrow{\cdot a} a^5 \xrightarrow{\cdot a} a^6 \xrightarrow{\cdot a} \dots$$

Liest man nun rückwärts (von rechts nach links), so wird nicht mehr mit a multipliziert sondern durch a dividiert (oder, was dasselbe ist, mit $\frac{1}{a}$ multipliziert):

$$a^2 \xleftarrow{:a} a^3 \xleftarrow{:a} a^4 \xleftarrow{:a} a^5 \xleftarrow{:a} a^6 \xleftarrow{:a} \dots$$

Da man nicht durch 0 dividieren kann, muss hier $a \neq 0$ sein. Die Exponenten werden in jedem Schritt um 1 vermindert.

Die gerade beschriebene erste Regelmäßigkeit legt nun nahe, wie man die Potenz-Liste nach links fortsetzen kann.

So ist

$$a^2 : a = (a \cdot a) : a = a$$

und also

$$a^1 = a$$

Ferner bekommen wir

$$a^1 : a = a : a = 1$$

und daher

$$a^0 = 1$$

Merkwürdigerweise hängt das Ergebnis *nicht* von a ab und ist stets 1.

Wir fahren fort und stoßen in den Bereich der **negativen** Exponenten vor:

$$a^0 : a = 1 : a = \frac{1}{a}, \text{ also}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{oder} \quad a^{-1} = \frac{1}{a^1}$$

Ferner

$$a^{-1} : a = \frac{1}{a} : a = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}, \text{ also}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

und

$$a^{-2} : a = \frac{1}{a^2} : a = \frac{1}{a \cdot a} : a = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}, \text{ also}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

Hier sieht man bereits, wie es weitergeht:

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4}, \quad a^{-5} = \frac{1}{a^5}, \quad a^{-6} = \frac{1}{a^6}, \quad \dots$$

Allgemein gesagt haben wir also $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, wobei a **nicht Null** sein darf. In Worten: Ist ein Exponent negativ, so bildet man den Kehrwert der Potenz und lässt das Minuszeichen weg.

Wir fassen die gewonnen Ergebnisse in einer ergänzten Liste zusammen:

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten
$\vdots$ $a^3 = aaa$ $a^2 = aa$ $a^1 = a$ $a^0 = 1$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ $\vdots$

Anmerkung zur Schreibweise

Die aufschlüsselnde Schreibweise

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n\text{-mal}}$$

gilt für $n = 1, 2, 3, \dots$, also **auch** für $n = 1$ (obwohl kein Produkt vorliegt). Denn $a^1 = a$.

Anmerkungen zur Potenz 0^0

Wie haben festgestellt, dass stets $a^0 = 1$ ist, insbesondere also auch $0^0 = 1$. Andererseits ist $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ und auch die übrigen Potenzen von 0 sind ebenfalls Null: $0^3 = 0$, $0^4 = 0$, $0^5 = 0, \dots$ Dies legt nahe, dass auch $0^0 = 0$. Wir bleiben hier jedoch bei der Festlegung: $0^0 = 1$ und befinden uns in bester Gesellschaft, denn kein geringerer als Leonhard Euler (1707-1783) hat in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ (1770) ebenfalls $0^0 = 1$ gesetzt.

Die binomischen Formeln wie

$$(a+b)^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$$

wären für $a=0$ oder $b=0$ ungültig, wenn man $0^0 = 0$ zugrunde legt:

$$\begin{aligned}(0+b)^2 &= 0^2b^0 + 2 \cdot 0^1b^1 + \underbrace{0^0}_{=0}b^2 \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Also müsste fälschlicherweise immer $b^2 = 0$ sein.

2.3 Rechnen mit Potenzen

Wir untersuchen nun, wie man mit Potenzen rechnet und welche Regelmäßigkeiten dabei gelten. Das Rechnen umfasst die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und auch die nun hinzugekommene Rechenart des Potenzierens.

Was die Addition und Subtraktion von Potenzen angeht, so gibt es keinerlei Umformung oder Vereinfachung. So können weder $a^2 + a^3$ noch $a^2 - a^3$ nennenswert umgeformt werden (abgesehen von der Vertauschung der Summanden: $a^3 + a^2$ und $-a^3 + a^2$).

Bei der Multiplikation, Division und Potenzierung gibt es jedoch schöne Regelmäßigkeiten. Diese Gesetzmäßigkeiten erkennt man besonders gut, wenn man die Potenzen mit den Exponenten 1, 2, 3, 4, usw. betrachtet. Hat man die Gesetzmäßigkeiten in diesem Sonderfall gewonnen, muss man noch prüfen, ob sie auch für alle ganzzahligen Exponenten gelten. In den nachfolgenden Abschnitten werden die Multiplikation, Division und Potenzierung von Potenzen nach dieser Methode untersucht.

2.4 Multiplikation von Potenzen

2.4.1 Gleiche Basen

Zunächst multiplizieren wir Potenzen mit **gleicher Basis**.

Beispiel 1

Berechne $a^2 \cdot a^3$.

Lösung

$$\begin{aligned}
 a^2 \cdot a^3 &= \underbrace{a \cdot a}_{2\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\text{-mal}} \\
 &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{(2+3)\text{-mal}} \\
 &= a^{2+3} \\
 &= a^5
 \end{aligned}$$

Man erkennt die Regelmäßigkeit, dass beim Multiplizieren zweier Potenzen (die die gleiche Basis haben) schlicht und einfach ihre **Exponenten addiert** werden. Diese Regel gilt auch für mehrere Potenzen:

Beispiel 2

Berechne $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$.

Lösung

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 &= (a^2 \cdot a^3) \cdot a^4 \\ &= a^{2+3} \cdot a^4 \\ &= a^{2+3+4} \\ &= a^9 \end{aligned}$$

Wendet man also die Regel für zwei Faktoren mehrfach an, so folgt die Regel für beliebig viele Faktoren. Viele Regeln, die für zwei Elemente gültig sind, lassen sich auf diese Weise auf beliebig viele Elemente erweitern. Daher werden die Regeln in der Mathematik oft nur für zwei Elemente formuliert.

Wir verallgemeinern nun Beispiel 1 und betrachten die Aussage für beliebige Exponenten im Bereich 1, 2, 3, ... Dazu ersetzen wir die konkreten Zahlen 2 und 3 durch die Buchstaben n bzw. m :

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{m\text{-mal}} \\ &= \underbrace{a \cdots a \cdot a \cdots a}_{(n+m)\text{-mal}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

Wir gelangen so zur Formulierung einer allgemeinen Regel:

Regelmäßigkeit 2

Man multipliziert zwei Potenzen mit gleichen Basen, indem man ihre Exponenten addiert:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Hierbei sind die Exponenten beliebige ganze Zahlen.

Für Exponenten im Bereich 1, 2, 3, ... haben wir dies soeben begründet. Nun müssen wir die Regel auch noch für beliebige ganzzahlige Exponenten herleiten. Um die Wichtigkeit von Beweisen zu erläutern, schieben wir einen kleinen historischen Exkurs zur Mathematik als Wissenschaft ein.

Anmerkung: Mathematik als Wissenschaft

Mit Thales von Milet (ca. 626/623-548/545 v. Chr.), also um 600 v. Chr. beginnt die Mathematik eine Wissenschaft zu werden, mit klaren Begriffen und Beweisen. Davor, auch bei den Mesopotamiern und Ägyptern, war sie noch ein „bloßes Herumtappen“, wie es Kant (1724-1804) in der Vorrede zur zweiten Auflage der *Kritik der reinen Vernunft* nennt. Die *Elemente* von Euklid (ca. 300 v. Chr.) sind streng wissenschaftlich geschrieben, mit klaren Definitionen, Sätzen und Beweisen. Da ein Großteil der *Elemente* der Geometrie gewidmet ist, hat es sich eingebürgert, die strenge wissenschaftliche Methode als „geometrisch“ zu bezeichnen. So lautet der Titel der berühmten *Ethik* von Spinoza (1632-1677) vollständig: *Ethik in geometrischer Ordnung dargestellt*.

Seit etwa 2600 Jahren ist es also in der Mathematik üblich, alles zu beweisen.

Wir wenden uns nun wieder der Regelmäßigkeit 2 und ihrer Herleitung zu.

Herleitung der Regelmäßigkeit 2

Die Exponenten n und m sind nun beliebige ganze Zahlen. Da es bei der Multiplikation nicht auf die Reihenfolge ankommt, können wir die zwei Potenzen immer so vertauschen, dass die erste einen kleineren (oder gleichen) Exponenten hat. Wir können also stets annehmen, dass n kleiner als (oder gleich) m ist ($n \leq m$). Dies reduziert die Anzahl der zu betrachtenden Fälle erheblich.

Entsprechend unserer Definition der Potenzen teilen wir den Bereich der ganzen Zahlen in drei Teilbereiche:

- a) Negative Zahlen: $-1, -2, -3, \dots$
- b) Null: 0
- c) Positive Zahlen: $1, 2, 3, \dots$

Wie können sich nun n und m auf diese drei Bereiche verteilen? Wir gehen systematisch vor und betrachten n , anschließend die möglichen Bereich für das größere oder gleiche m :

1. Fall: n liegt im Bereich a) der negativen Zahlen

Unterfall 1: m liegt im Bereich a) der negativen Zahlen

Unterfall 2: $m = 0$

Unterfall 3: m liegt im Bereich c) der positiven Zahlen

2. Fall: $n = 0$

Unterfall 1: $m = 0$

Unterfall 2: m liegt im Bereich c) der positiven Zahlen

3. Fall: n liegt im Bereich c) der positiven Zahlen

Unterfall 1: m liegt im Bereich c) der positiven Zahlen

Wir müssen also insgesamt sechs verschiedene Situationen behandeln. In drei von ihnen ist **einer der Exponenten Null**; diese lassen sich auf einen Schlag erledigen. In der letzten Situation (Fall 3, Unterfall 1) sind beide Exponenten positiv. Diesen Fall hatten wir bereits betrachtet. Es sind also noch drei Situationen zu behandeln.

Situation 1

Ein Exponent ist 0.

Wir berechnen beide Seiten von $a^0 \cdot a^k = a^{0+k}$:

$$a^0 \cdot a^k = 1 \cdot a^k = a^k$$

$$a^{0+k} = a^k$$

Beide Seiten sind gleich, also ist tatsächlich $a^0 \cdot a^k = a^{0+k}$.

Situation 2

Beide Exponenten n und m sind negativ.

Wir drücken die negativen Exponenten durch positive Zahlen p und q aus:

$$n = -p, \quad m = -q.$$

Wir berechnen beide Seiten von $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$\begin{aligned}
 a^n \cdot a^m &= a^{-p} \cdot a^{-q} \\
 &= \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} \\
 &= \frac{1}{a^p \cdot a^q} \\
 &= \frac{1}{a^{p+q}} \quad (p, q \text{ positiv, oben bewiesen}) \\
 a^{n+m} &= a^{-p-q} \\
 &= a^{-(p+q)} \\
 &= \frac{1}{a^{p+q}}
 \end{aligned}$$

Beide Seiten sind gleich, also ist tatsächlich $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Situation 3

Der Exponent n ist negativ und der Exponent m ist positiv.

Wir drücken den negativen Exponenten n durch die positive Zahl p aus:

$$n = -p.$$

Wir berechnen beide Seiten von $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Die linke Seite ist:

$$\begin{aligned}
 a^n \cdot a^m &= a^{-p} \cdot a^m \\
 &= \frac{1}{a^p} \cdot a^m \\
 &= \frac{a^m}{a^p} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{p\text{-mal}}}
 \end{aligned}$$

Nun kann man kürzen. Das Vorgehen dabei hängt davon ab, ob oben im Zähler mehr, weniger oder gleich viele a vorkommen als unten im Nenner, anders gesagt, ob $m > p$, $m < p$ oder $m = p$.

Wenn $m > p$, bekommen wir

$$\frac{\overbrace{a \cdots a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{p\text{-mal}}} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{p\text{-mal}} \cdot \overbrace{a \cdots a}^{(m-p)\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{p\text{-mal}}} = \overbrace{a \cdots a}^{(m-p)\text{-mal}}$$

Wenn $m = p$, ist

$$\frac{\overbrace{a \cdots a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{p\text{-mal}}} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{p\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{p\text{-mal}}} = 1$$

Wenn $m < p$, bekommen wir

$$\frac{\overbrace{a \cdots a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{p\text{-mal}}} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{(p-m)\text{-mal}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{(p-m)\text{-mal}}}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \overbrace{a \cdots a}^{(m-p)\text{-mal}} && \text{wenn } m > p \\ a^n \cdot a^m &= 1 && \text{wenn } m = p \\ a^n \cdot a^m &= \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{(p-m)\text{-mal}}} && \text{wenn } m < p \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} a^{n+m} &= a^{-p+m} \\ &= a^{m-p} \end{aligned}$$

Wenn $m > p$, ist $m - p$ eine positive ganze Zahl, daher

$$a^{m-p} = \underbrace{a \cdots a}_{(m-p)\text{-mal}}$$

Wenn $m = p$, ist $m - p = 0$ und somit

$$a^{m-p} = a^0 = 1$$

Wenn $m < p$, ist $m - p$ eine negative ganze Zahl. Wir schreiben diese Differenz mithilfe der positiven Zahl $p - m$ um als $m - p = -(p - m)$. Somit wird

$$a^{m-p} = a^{-(p-m)} = \frac{1}{a^{(p-m)}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{(p-m)\text{-mal}}}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \underbrace{a \cdots a}_{(m-p)\text{-mal}} && \text{wenn } m > p \\ a^n \cdot a^m &= 1 && \text{wenn } m = p \\ a^n \cdot a^m &= \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{(p-m)\text{-mal}}} && \text{wenn } m < p \end{aligned}$$

Dies stimmt tatsächlich mit den Ergebnissen der linken Seite überein. Damit haben wir bewiesen, dass

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

für beliebige ganzzahlige Exponenten gilt.

2.4.2 Ungleiche Basen

Wir betrachten nun die Multiplikation von Potenzen mit unterschiedlichen Basen.

Wenn die Exponenten ebenfalls verschieden sind, gibt es keine bemerkenswerten einfachen Gesetzmäßigkeiten:

$$a^n \cdot b^m.$$

Wenn die Exponenten gleich sind, ergibt sich eine vereinfachende Umformung, wie man an einem Beispiel erkennen kann:

$$\begin{aligned} a^3 \cdot b^3 &= aaa \cdot bbb && | \text{umordnen, Paare } ab \text{ bilden} \\ &= ab \cdot ab \cdot ab && . \\ &= (ab)^3 \end{aligned}$$

Weil die Anzahl der a und der b gleich sind, können alle a und b vollständig zu Paaren ab zusammengefasst werden.

Wir verallgemeinern das Beispiel auf beliebige Exponenten im Bereich 1, 2, 3, ... Dafür ersetzen wir die 3 durch den Buchstaben n :

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{b \cdots b}_{n\text{-mal}} && | \text{umordnen, Paare } ab \text{ bilden} \\ &= \underbrace{ab \cdot ab \cdots ab}_{n\text{-mal}} && . \\ &= (ab)^n \end{aligned}$$

Diese Berechnungen legen nahe, dass allgemein folgende Regel für ganzzahlige Exponenten gilt:

Regelmäßigkeit 3

Man multipliziert zwei Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man das Produkt der Basen mit dem Exponenten potenziert:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

Hierbei ist der Exponent eine beliebige ganze Zahl.

Für Exponenten im Bereich 1, 2, 3, ... haben wir dies soeben begründet. Nun müssen wir die Regel auch noch für beliebige ganzzahlige Exponenten herleiten.

Herleitung der Regelmäßigkeit 3

Der Exponent n ist nun eine beliebige ganze Zahl. Entsprechend unserer Definition der Potenzen, teilen wir den Bereich der ganzen Zahlen in drei Teilbereiche:

- a) Negative Zahlen: $-1, -2, -3, \dots$
- b) Null: 0
- c) Positive Zahlen: $1, 2, 3, \dots$

Für Exponenten im Teilbereich c) haben wir die Regel soeben hergeleitet. Es müssen nun noch die Bereiche a) und b) betrachtet werden.

a) Der Exponent n ist eine negative Zahl, $-1, -2, -3, \dots$

Um ein Gefühl für die Situation zu bekommen, betrachten wir zunächst ein Beispiel mit dem Exponenten -3 :

$$\begin{aligned}
 a^{-3} \cdot b^{-3} &= \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} && | \text{Zähler} \cdot \text{Zähler, Nenner} \cdot \text{Nenner} \\
 &= \frac{1}{a^3 \cdot b^3} && | \text{Regel für positive Exponenten} \\
 &= \frac{1}{(ab)^3} \\
 &= (ab)^{-3}
 \end{aligned}$$

Also: $a^{-3} \cdot b^{-3} = (ab)^{-3}$.

Hier wurde die Definition der Potenz für negative Exponenten dreimal angewendet:

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}.$$

Um beliebige negative Exponenten zu betrachten, ersetzen wir -3 durch den Buchstaben n . Wir schreiben n mithilfe der positiven Zahl p um:

$$n = -p$$

Dann übertragen die Umformungen des letzten Beispiels:

$$\begin{aligned}
 a^n \cdot b^n &= a^{-p} \cdot b^{-p} \\
 &= \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{b^p} && | \text{Zähler} \cdot \text{Zähler, Nenner} \cdot \text{Nenner} \\
 &= \frac{1}{a^p \cdot b^p} && | \text{Regel für positive Exponenten} \\
 &= \frac{1}{(ab)^p} \\
 &= (ab)^{-p} \\
 &= (ab)^n
 \end{aligned}$$

Also: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ für alle negativen Exponenten.

Hier wurde die Definition der Potenz für negative Exponenten wieder dreimal angewendet:

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p}.$$

b) Der Exponent n ist Null

Wir berechnen beide Seiten der behaupteten Regel $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$ getrennt, um zu bestätigen, dass sie tatsächlich gleich sind.

$$\begin{aligned}a^0 \cdot b^0 &= 1 \cdot 1 = 1 \\(ab)^0 &= 1\end{aligned}$$

Beide Seiten sind gleich, tatsächlich ist $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$.

Damit haben wir nun bewiesen, dass $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ für alle ganzzahligen Exponenten gilt.

2.5 Division von Potenzen

2.5.1 Gleiche Basen

Zunächst dividieren wir Potenzen mit gleicher Basis.

Beispiel 1

Berechne $\frac{a^5}{a^3}$.

Lösung

$$\begin{aligned}
 \frac{a^5}{a^3} &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{5\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\text{-mal}}} \\
 &= \frac{\cancel{a \cdot a \cdot a} \cdot \overbrace{a \cdot a}^{(5-3)\text{-mal}}}{\cancel{a \cdot a \cdot a}} \quad (\text{gekürzt}) \\
 &= \overbrace{a \cdot a}^{(5-3)\text{-mal}} \\
 &= a^{5-3} \\
 &= a^2
 \end{aligned}$$

Man erkennt die Regelmäßigkeit, dass beim Dividieren zweier Potenzen (die die gleiche Basis haben) schlicht und einfach ihre **Exponenten subtrahiert** werden. Wir fassen zusammen:

Regelmäßigkeit 4

Man dividiert zwei Potenzen mit gleichen Basen, indem man ihre Exponenten subtrahiert:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Hierbei sind die Exponenten beliebige ganze Zahlen.

Es gibt im Wesentlichen zwei verschiedene Ansätze, diese Regel für beliebige ganzzahlige Exponenten zu beweisen:

Erstens kann man angelehnt an Beispiel 1 und den Fall der Multiplikation vorgehen und auf die Definition der Potenzen zurückgehen. Dabei muss man mehrere Fälle unterscheiden. Dies ist umfangreich und höchstens als gute Übungsaufgabe zu empfehlen.

Zweitens kann man die Division auf die Multiplikation zurückführen und die entsprechende Regel benutzen. Dieser Ansatz führt zu wesentlich kürzeren Begründungen. Wir betrachten drei verschiedene Versionen dazu.

Begründung 1 (Probe)

Ein Bruch steht für eine Division, also:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m$$

Wir müssen beweisen, dass das Ergebnis dieser Division a^{n-m} ist, d. h.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Dies können wir durch eine Probe erreichen. In der Grundschule prüft man das Ergebnis der Rechnung $6:2=3$, indem man in der Probe das vorgegebene Ergebnis 3 mit dem Teiler 2 multipliziert. Wenn das Produkt $3 \cdot 2 = 6$ mit der Ausgangszahl 6 übereinstimmt, ist das Ergebnis 3 richtig.

Für unsere Rechnung

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

lautet die Probe also

$$\begin{aligned}a^{n-m} \cdot a^m &= a^{(n-m)+m} \\&= a^{n-m+m} \\&= a^n\end{aligned}$$

In der Tat kommt die Ausgangszahl a^n heraus. Die Rechnung $a^n : a^m = a^{n-m}$ ist somit richtig.

Begründung 2 (Regelmäßigkeit 2 umformen)

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q},$$

wobei p und q beliebige ganze Zahlen sind.

Nun dividieren wir beide Seiten durch a^q :

$$a^p = \frac{a^{p+q}}{a^q},$$

umgekehrt geschrieben:

$$\frac{a^{p+q}}{a^q} = a^p.$$

Wir sehen, dass dies übereinstimmt mit

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

wenn man $q = m$ wählt (Nenner) und $p = n - m$ nimmt (rechte Seiten). Dann ist auch $p + q = n$ (Zähler). Tatsächlich bekommen wir nun:

$$\frac{a^{p+q}}{a^q} = a^p$$

$$\frac{a^{(n-m)+m}}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^{n-m+m}}{a^m} = a^{n-m} \quad .$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

Begründung 3 (Zähler trennen, Kehrwert einer Potenz)

a) Kehrwert einer Potenz

Die Regel über die Multiplikation von Potenzen (Regelmäßigkeit 2) liefert als Sonderfall:

$$a^m \cdot a^{-m} = a^{m+(-m)}$$

$$= a^0$$

$$= 1$$

$$a^m \cdot a^{-m} = 1$$

Wir dividieren durch a^m und erhalten:

$$a^m \cdot a^{-m} = 1 \quad | : a^m$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

Der Kehrwert einer Potenz ist also die Potenz mit umgekehrtem Vorzeichen im Exponenten:

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}.$$

b) Division von Potenzen

Wir ziehen den Zähler vor den Bruch und schreiben den Kehrwert der Potenz als Potenz mit umgekehrtem Vorzeichen im Exponenten:

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{a^m} &= a^n \cdot \frac{1}{a^m} \\ &= a^n \cdot a^{-m} \\ &= a^{n+(-m)} \\ &= a^{n-m}\end{aligned}$$

Damit ist die Regel $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ wieder bewiesen, und zwar für alle ganzzahligen Exponenten.

Anmerkungen

Die Regelmäßigkeit 4, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, enthält bereits betrachtete Regeln und Definitionen als einfache Sonderfälle:

1. Kehrwert einer Potenz

Sonderfall $n = 0$:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad | n = 0 \text{ setzen}$$

$$\frac{a^0}{a^m} = a^{0-m}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

2. Potenz mit Exponent 1, a^1

Sonderfall $n = 3, m = 2$:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad | n = 3, m = 2 \text{ setzen}$$

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2}$$

$$\frac{\cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a}} = a^1$$

$$a = a^1$$

3. Potenz mit Exponent 0, a^0

Sonderfall $n = 2, m = 2$:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad | n = 2, m = 2 \text{ setzen}$$

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2}$$

$$1 = a^0$$

2.5.2 Ungleiche Basen

Wir betrachten nun die Division von Potenzen mit unterschiedlichen Basen.

Wenn die Exponenten ebenfalls verschieden sind wie bei $\frac{a^n}{b^m}$, gibt es keine einfachen Gesetzmäßigkeiten.

Wenn die Exponenten gleich sind, so ist eine vereinfachende Umformung möglich, wie man an einem Beispiel erkennen kann:

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{b^3} &= \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} && | \text{als Produkt von Brüchen schreiben} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^3\end{aligned}$$

Weil die Anzahl der a und der b gleich sind, können alle a und b vollständig zu Brüchen $\frac{a}{b}$ zusammengefasst werden. Das Beispiel legt die folgende Regel nahe.

Regelmäßigkeit 5

Man dividiert zwei Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man den Quotienten (Bruch) der Basen mit dem Exponenten potenziert:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Hierbei ist der Exponent n eine beliebige ganze Zahl.

Beweis der Regelmäßigkeit 5

Wir fassen die behauptete Formel als Divisionsaufgabe auf:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Nun machen wir die Probe, indem wir das behauptete Divisionsergebnis mit dem Teiler b^n multiplizieren, wobei die Ausgangszahl a^n herauskommen sollte:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n &= \left(\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b\right)^n \\ &= \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^n \\ &= (a)^n \\ &= a^n\end{aligned}$$

Also geht die Probe tatsächlich auf und wir haben die Regel bewiesen.

2.6 Potenzen von Potenzen

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel, das uns bereits eine allgemeine Gesetzmäßigkeit nahelegt. Die gewonnene Regel werden wir anschließend allgemein herleiten.

Beispiel 1

Berechne $(a^n)^3$.

Lösung

$$\begin{aligned}(a^n)^3 &= \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n}^{3\text{-mal}} \\ &= a^{\overbrace{n+n+n}^{3\text{-mal}}} \\ &= a^{3 \cdot n} \\ &= a^{n \cdot 3}\end{aligned}$$

Also

$$(a^n)^3 = a^{n \cdot 3}$$

Das Ergebnis legt folgende allgemeine Gesetzmäßigkeit nahe:

Regelmäßigkeit 6

Man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert:

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Hierbei sind die Exponenten n und m beliebige ganze Zahlen.

Beweis der Regelmäßigkeit 6

Gemäß der Definition der Potenzen mit ganzzahligen Exponenten müssen wir wieder drei Fälle betrachten, je nachdem ob der Exponent m positiv, 0 oder negativ ist.

Fall 1: m positiv (1, 2, 3,...)

$$\begin{aligned}(a^n)^m &= \overbrace{a^n \dots a^n}^{m\text{-mal}} \\ &= a^{\overbrace{n+\dots+n}^{m\text{-mal}}} \\ &= a^{m \cdot n} \\ &= a^{nm}\end{aligned}$$

Also

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Fall 2: $m = 0$

$$\begin{aligned}(a^n)^m &= (a^n)^0 = 1 \\ a^{nm} &= a^{n \cdot 0} = a^0 = 1\end{aligned}$$

Also

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Fall 3: m negativ (-1, -2, -3,...)

Wir schreiben die negative Zahl m als

$$m = -p,$$

wobei p eine positive Zahl ist. Ferner werden wir auf Fall 1 zurückgreifen und zudem die Regel über den Kehrwert einer Potenz nutzen ($\frac{1}{x^p} = x^{-p}$).

Nun rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}(a^n)^m &= (a^n)^{-p} \\&= \frac{1}{(a^n)^p} && | \text{nun Fall 1 anwenden} \\&= \frac{1}{a^{np}} \\&= a^{-np} \\&= a^{n(-p)} \\&= a^{nm}\end{aligned}$$

Also wieder

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Die Regelmäßigkeit 6 ist damit vollständig bewiesen.

2.7 Wissenschaftliche Notation von Zahlen

Zur Beschreibung der Wirklichkeit benötigt man sowohl sehr kleine als auch sehr große Zahlen. So hat ein Wasserstoff-Atom einen Durchmesser von etwa

$$0,000\,000\,000\,025\,\text{m} = 25\,\text{pm}$$

Eine menschliche Zelle ist ungefähr

$$0,000\,025\,\text{m} = 25\,\mu\text{m}$$

groß. Ein Mensch misst ca. 2 m. Der Erddurchmesser beträgt rund

$$12.700.000\,\text{m} = 12.700\,\text{km}$$

Und die Sonne ist etwa

$$150.000.000.000 \text{ m} = 150.000.000 \text{ km} = 150 \text{ Mio. km}$$

von der Erde entfernt. Unsere Galaxie (Milchstraße) hat einen Durchmesser von ungefähr

$$\begin{aligned} 950.000.000.000.000.000.000 \text{ m} &= 950 \text{ Billionen km} \\ &= 100.000 \text{ Lichtjahre} \end{aligned}$$

Die Lichtgeschwindigkeit beträgt ca.

$$300.000.000 \text{ m/s} = 300.000 \text{ km/s}$$

Einzelne sehr große oder sehr kleine Größen können durch Wahl einer geeigneten Einheit fassbarer gemacht werden. Sind aber mehrere Größen zu verrechnen, so muss man sie auf eine gemeinsame Einheit bringen. Die *wissenschaftliche Notation* (*Gleit- oder Fließkommazahlen*) ermöglicht es, Zahlen sehr unterschiedlicher Größe in einer kurzen und für Berechnungen praktischen Form zu schreiben. Dazu wird eine gegebene Zahl gewissermaßen durch Verschieben des Kommas in eine Zahl von 1 bis weniger als 10 (*Mantisse*) umgewandelt, was darauf hinausläuft, Zehner abzuspalten und als **Potenz** zusammenzufassen. Zur Erläuterung betrachten wir zunächst einige einfache Beispiele; anschließend schreiben wir einige der oben genannten Größen in wissenschaftlicher Notation.

Beispiel 1

Schreibe $0,34$ in wissenschaftlicher Notation.

Lösung

Das Komma muss um eine Stelle nach rechts verschoben werden. Wir multiplizieren also mit 10 und dividieren durch 10, um den Wert nicht zu verändern:

$$\begin{aligned}0,34 &= \frac{0,34 \cdot 10}{10} \\&= \frac{3,4}{10} \\&= 3,4 \cdot \frac{1}{10^1} \\&= 3,4 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

Also

$$0,34 = \underbrace{3,4}_{\text{Mantisse}} \cdot \underbrace{10^{-1}}_{10\text{er-Potenz}}$$

Beispiel 2

Schreibe 0,0018 in wissenschaftlicher Notation.

Lösung

Das Komma muss um drei Stellen nach rechts verschoben werden. Wir multiplizieren also dreimal mit 10 und dividieren dreimal durch 10, um den Wert nicht zu verändern:

$$\begin{aligned}0,0018 &= \frac{0,0018 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10} \\&= \frac{1,8}{10^3} \\&= 1,8 \cdot \frac{1}{10^3}\end{aligned}$$

$$= 1,8 \cdot 10^{-3}$$

Also

$$0,0018 = 1,8 \cdot 10^{-3}$$

Folgerung aus Beispiel 1 und 2

Die Anzahl der Nullen, versehen mit einem Minuszeichen, liefert den Exponenten in der wissenschaftlichen Notation.

Beispiel 3

Schreibe 34 in wissenschaftlicher Notation.

Lösung

Zunächst schreiben wir 34 mit einem Komma: 34,0. Das Komma muss um eine Stelle nach links verschoben werden. Wir dividieren also durch 10 und multiplizieren mit 10, um den Wert nicht zu verändern:

$$\begin{aligned} 34,0 &= \frac{34,0}{10} \cdot 10 \\ &= 3,4 \cdot 10 \\ &= 3,4 \cdot 10^1 \end{aligned}$$

Also

$$34 = 3,4 \cdot 10^1$$

Beispiel 4

Schreibe 1827,5 in wissenschaftlicher Notation.

Lösung

Das Komma muss um drei Stellen nach links verschoben werden. Wir dividieren also dreimal durch 10 und multiplizieren dreimal mit 10, um den Wert nicht zu verändern:

$$\begin{aligned} 1827,5 &= \frac{1827,5}{10 \cdot 10 \cdot 10} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 1,8275 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 1,8275 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Also

$$1827,5 = 1,8275 \cdot 10^3$$

Folgerung aus Beispiel 3 und 4

Die Anzahl der nötigen Kommaverschiebungen liefert den Exponenten in der wissenschaftlichen Notation. Die Anzahl der Kommaverschiebungen ist die um 1 verminderte Anzahl der Ziffern vor dem Komma.

Beispiel 5

Schreibe den Durchmesser eines Wasserstoff-Atoms, $0,000\,000\,000\,025\text{ m} = 25\text{ pm}$ in Meter und wissenschaftlicher Notation.

Lösung

$$\begin{aligned} 0,000\,000\,000\,025\text{ m} &= \frac{0,000\,000\,000\,025 \cdot \overbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}^{11\text{-mal}}}{\underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{11\text{-mal}}} \text{ m} \\ &= \frac{2,5}{10^{11}} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2,5 \cdot \frac{1}{10^{11}} \text{ m} \\
 &= 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Also

$$0,000\,000\,000\,025 \text{ m} = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Beispiel 6

Schreibe die Entfernung zwischen Erde und Sonne, 150.000.000.000 m = 150 Mio. km, in Metern und wissenschaftlicher Notation.

Lösung

$$\begin{aligned}
 150\,000\,000\,000,0 \text{ m} &= \frac{150\,000\,000\,000,0}{\underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{11\text{-mal}}} \cdot \overbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}^{11\text{-mal}} \text{ m} \\
 &= 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Also:

$$150\,000\,000\,000 \text{ m} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Wie schließen den Abschnitt mit einem Beispiel, das das Rechnen mit Zahlen in wissenschaftlicher Notation zeigt.

Beispiel 7

Wie lange benötigt das Licht von der Sonne zur Erde?

Lösung

1. Lichtgeschwindigkeit

Das Licht legt in einer Sekunde etwa 300.000 km zurück.

2. Entfernung Sonne-Erde

Die Sonne ist etwa 150.000.000 km von der Erde entfernt.

3. Reisedauer des Lichts

Wir müssen die Frage beantworten, wie oft 300.000 km in 150.000.000 km passen. Die Antwort gibt die Anzahl der Sekunden:

$$\begin{aligned}\frac{150.000.000}{300.000} \text{ s} &= \frac{1,5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} \text{ s} \\ &= \frac{1,5}{3} \cdot \frac{10^8}{10^5} \text{ s} \\ &= 0,5 \cdot 10^{8-5} \text{ s} \\ &= 0,5 \cdot 10^3 \text{ s} \\ &= 500 \text{ s}\end{aligned}$$

Wir rechnen in Minuten um:

$$500 \text{ s} = \frac{500}{60} \text{ min} = \frac{50}{6} \text{ min} = \frac{25}{3} \text{ min} = 8\frac{1}{3} \text{ min}$$

Also benötigt das Sonnenlicht etwa 8 Minuten, um zur Erde zu gelangen.

Anmerkung

Beispiel 7 kann selbstverständlich auch mit einem einfachen Dreisatz gelöst werden.

2.8 Zusammenfassung

Wir fassen hier die bisherigen Überlegungen und Ergebnisse in einem logischen Schema zusammen.

Potenzen als Abkürzungen
$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \text{ usw.}$ Allgemein: $a^n = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n\text{-mal}}$ Die Exponenten sind hier im Bereich 2, 3, 4, ...



Regelmäßigkeiten für Exponenten 2, 3, 4, ...	
$a^2 \xrightarrow{\cdot a} a^3 \xrightarrow{\cdot a} a^4 \xrightarrow{\cdot a} \dots$ $a^2 \xleftarrow{:a} a^3 \xleftarrow{:a} a^4 \xleftarrow{:a} \dots$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$



Vermutete Regelmäßigkeit für alle ganzzahligen Exponenten
$\dots a^{-2} \xleftarrow{:a} a^{-1} \xleftarrow{:a} a^0 \xleftarrow{:a} a^1 \xleftarrow{:a} a^2 \xleftarrow{:a} a^3 \dots$

**Vermutete Regelmäßigkeit
für alle ganzzahligen Exponenten**

$$\dots a^{-2} \xleftarrow{:a} a^{-1} \xleftarrow{:a} a^0 \xleftarrow{:a} a^1 \xleftarrow{:a} a^2 \xleftarrow{:a} a^3 \dots$$



**Potenzen
für alle ganzzahligen Exponenten**

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \text{ usw.}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \text{ usw.}$$



**Beweis der Potenzregeln
(für ganzzahlige Exponenten $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$)**

Die zu beweisenden Potenzregeln sind:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 2.1

1. Berechne das Volumen und die Oberfläche eines Würfels mit einer Kantenlänge von 3 cm.
2. Auf welchen Betrag wächst ein Sparguthaben von 500 € in vier Jahren bei einem Zinssatz von 3 % p.a.

Aufgaben zu Kapitel 2.2

1. Berechne die Potenzen von 5 für alle ganzzahligen Exponenten von -3 bis 3 .
2. Berechne die Potenzen mit den ganzzahligen Exponenten von -6 bis 6 :
 - a) $0,1$
 - b) $-0,2$
 - c) 10

Aufgaben zu Kapitel 2.3

1. Berechne:
 - a) $3^2 + 4^2$
 - b) $4^2 + 5^2$
 - c) $1^2 + 3^2$
 - d) $2^2 + 3^2$
2. Berechne:
 - a) $2^3 + 3^3$

- b) $2^3 + 2^2$
- c) $2^3 + 2^3$
- d) $3^2 + 3^2$
- e) $3^2 + 3^2 + 3^2$
- f) $10^2 + 10^4$

Aufgaben zu Kapitel 2.4

1. Berechne:

- a) $a^5 \cdot a^7$, $c^3 \cdot c^6$, $b^2 \cdot b^{11}$
- b) $a^{-4} \cdot a^6$, $d^7 \cdot d^{-10}$, $c^{-3} \cdot c^{-2}$
- c) $2^{-4} \cdot 2^5$, $3^6 \cdot 3^{-9}$, $4^{-3} \cdot 4^5$
- d) $2^{-14} \cdot 2^6 \cdot 2^{15}$, $2^7 \cdot 2^{-15} \cdot 2^4$, $3^{-3} \cdot 3^6 \cdot 3^{-8} \cdot 3^{11}$

2. Berechne:

- a) $2^{-4} \cdot 2^6 \cdot 3^5 \cdot 3^{-3}$, $3^5 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4}$, $2^{-3} \cdot 3^6 \cdot 2^{11} \cdot 3^{-8}$
- b) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7^{-4} \cdot 2^{-3} \cdot 7^2 \cdot 3^{-7} \cdot 5^{-4} \cdot 7^2$

3. Berechne:

- a) $(2 \cdot 3)^7 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-6}$, $(3 \cdot 5)^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^3$, $6^4 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-3}$
- b) $(2 \cdot ab)^2$, $(2 \cdot 3 \cdot 5)^4 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-5}$, $15^4 \cdot 3^{-4} \cdot 5^{-3}$

Aufgaben zu Kapitel 2.5

1. Berechne:

- a) $\frac{a^7}{a^5}$, $\frac{b^{12}}{b^8}$, $\frac{c^4}{c^{10}}$, $\frac{2^{12}}{2^7}$, $\frac{2^5}{2^9}$
- b) $\frac{a^{-5}}{a^{-7}}$, $\frac{c^{-3}}{c^4}$, $\frac{2^{-3}}{2^4}$, $\frac{3^2}{3^{-3}}$

- c) $\frac{2^5}{2^{-4}}, \frac{3^{-8}}{3^{-6}}, \frac{4^{-14}}{4^{-16}}$
 d) $\frac{2^{-13} \cdot 2^7}{2^{-16}}, \frac{2^8 \cdot 2^5}{2^{17}}, \frac{3^{-4} \cdot 3^5}{3^7 \cdot 3^{-12}}$

2. Berechne:

- a) $\frac{2^6 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^3}, \frac{2^7 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^4}, \frac{3^2 \cdot 2^{-3}}{2^{-4}}, \frac{2^{-3} \cdot 3^7 \cdot 5^3}{2^{-5} \cdot 3^9 \cdot 5^2}$
 b) $\frac{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7^{-5}}{2^5 \cdot 7^{-3} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^{-3}}$

3. Berechne:

- a) $\frac{(2 \cdot 3)^8}{2^4 \cdot 3^7}, \frac{6^4}{2^1 \cdot 3^3}, \frac{3^3 \cdot 5^4}{(3 \cdot 5)^5}$
 b) $\frac{(2 \cdot ab)^2}{ab}, \frac{2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-5}}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{-5}}, \frac{15^6}{3^5 \cdot 5^4}$

Aufgaben zu Kapitel 2.6

1. Berechne (wenn möglich, zusätzlich auch ohne Benutzung der Regel $(a^n)^m = a^{nm}$):

- a) $(a^2)^3, (a^2)^5, (a^3)^6, (2^3)^2, (10^4)^3$
 b) $(a^5)^{-2}, (c^{-5})^4, (2^{-3})^4, (3^{-2})^{-1}$
 c) $((-2)^5)^2, ((-2)^{-3})^{-3}, (3^{-1})^2$
 d) $((2^2)^2)^2, ((2^{-2})^3)^{-1}, (3^2)^2$

2. Berechne (wenn möglich, zusätzlich auch ohne Benutzung der Regel $(a^n)^m = a^{nm}$):

- a) $(2^4 \cdot 3^1)^2, (2^4 \cdot 3^{-2})^2, (2^4 \cdot 5^4)^3, (10^{-3})^2$
 b) $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{-1} \cdot 7^1)^2$

Aufgaben zu Kapitel 2.7

1. Schreibe die Zahlen in der üblichen Form:

- a) $1,732 \cdot 10^3$, $9,643 \cdot 10^1$, $7,643 \cdot 10^6$, $4,791 \cdot 10^9$, $3,8 \cdot 10^5$
- b) $2,61 \cdot 10^{-2}$, $8,57 \cdot 10^{-1}$, $4,73 \cdot 10^{-5}$, $6,48 \cdot 10^{-8}$, $9,5 \cdot 10^{-4}$
- c) $7,24 \cdot 10^3$, $5,38 \cdot 10^{-2}$, $6,09 \cdot 10^5$, $8,16 \cdot 10^7$, $4,11 \cdot 10^{-9}$

2. Schreibe die Zahlen in wissenschaftlicher Notation:

- a) 1879,4 84,92, 350.000, 8,12, 349.000.000
- b) 0,372, 0,0064, 0,000017, 0,075, 0,000000072
- c) 732 0,01707, 15,21, 0,0001495, 380.000.000

3. Eine menschliche Zelle ist etwa 0,000 025 m groß. Wie viele Zellen passen aneinandergereiht in zwei Metern? Benutze die wissenschaftliche Notation und die Potenzregeln zur Berechnung.

4. Die Sonne ist etwa 150 Mio. km von der Erde entfernt, der Mond etwa 380.000 km. Wievielfach ist die Sonne weiter entfernt als der Mond? Benutze die wissenschaftliche Notation und die Potenzregeln zur Berechnung.
Anmerkung: Die gesuchte Zahl kannte bereits Aristarch von Samos (250 v. Chr.).

3. Quadratwurzeln

Es gibt verschiedene Arten von Wurzeln, die einfachsten sind die Quadratwurzeln, die geometrischen Ursprungs sind und den Altbabyloniern bereits vor fast 4000 Jahren bekannt waren. Daher betrachten wir zunächst ausführlich die Quadratwurzeln. Selbstverständlich wird auch die konkrete Berechnung von Wurzeln betrachtet. Und auch die Frage, welche Quadratwurzeln Brüche sind, wird eingehend besprochen.

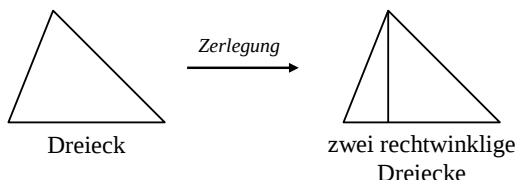
Die immer noch geometrischen Kubikwurzeln und die Wurzeln beliebiger Ordnung sind Gegenstand des vierten Kapitels.

3.1 Wozu brauchten Babylonier Wurzeln?

Nach dem Motto *teile und herrsche* lassen sich viele Figuren durch Zerlegung in Dreiecke berechnen:



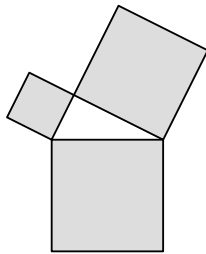
Durch das Einzeichnen einer Höhe kann ein Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden:



Für die Berechnung **rechtwinkliger** Dreiecke ist nun der **Satz von Pythagoras** ein entscheidendes Hilfsmittel. Er war den Altbabyloniern bekannt und ist nach Pythagoras (ca. 570 bis ca. 510 v. Chr.) benannt, weil ihm der erste Beweis zugeschrieben wird.

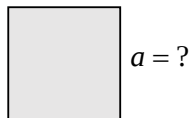
Salopp formuliert, lautet der Satz von Pythagoras:

Kathetenquadrat + Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat



Möchte man die Länge einer Seite eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen, ergibt sich zunächst lediglich die Fläche des Quadrats über der gesuchten Seite. Aus der Fläche des Quadrats muss dann die Seitenlänge berechnet werden:

Quadrat-Fläche $\rightarrow$ Seitenlänge = ?



Da der Flächeninhalt des Quadrates gegeben ist durch

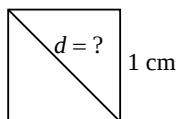
$$A = a^2,$$

muss also eine Zahl a gefunden werden, die mit sich selbst multipliziert A ergibt. Dies ist die Definition der *Quadratwurzel*, oft kurz auch als *Wurzel* bezeichnet.

Wir betrachten nun noch zwei Beispiele, die anschaulich und ohne den Satz des Pythagoras zu benutzen zeigen, dass Wurzeln unvermeidlich sind.

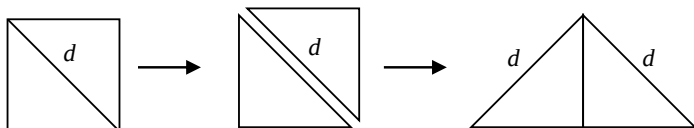
Beispiel 1

Wie lang ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 cm?

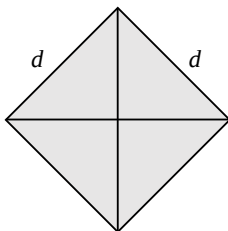


Lösung

Wir zerschneiden das Quadrat entlang der Diagonale und kleben die entstehenden Dreiecke wie folgt zusammen:



Das Ergebnis ist ein halbes Quadrat. Wir verdoppeln dieses und erhalten ein Quadrat mit Seitenlänge d (die gesuchte Diagonale). Da wir nun den Flächeninhalt ins Auge fassen, schraffieren wir das Quadrat:



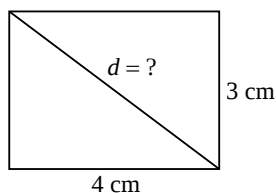
Der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrates beträgt 1 cm^2 , das neue Quadrat hat den doppelten Flächeninhalt, nämlich 2 cm^2 . Also

$$d \cdot d = 2$$

Wir suchen also eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt. Die Diagonale ist also die Quadratwurzel aus 2.

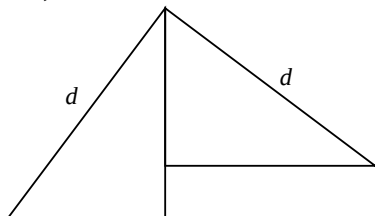
Beispiel 2

Wie lang ist die Diagonale eines Rechtecks, das 4 cm lang und 3 cm breit ist?

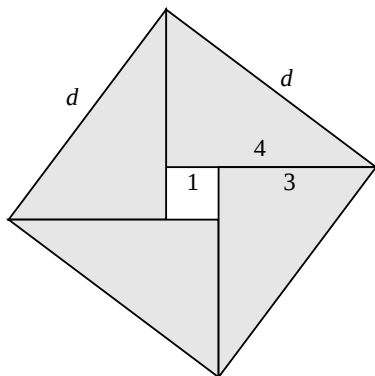


Lösung

Wie in Beispiel 1 zerschneiden wir das Rechteck entlang der Diagonale. Dann kleben wir die Dreiecke an ungleichen Seiten zusammen, denn nur so entsteht ein rechter Winkel:



Nun verdoppeln wir diese Figur und erhalten ein Quadrat mit Seitenlänge d , das ein quadratisches Loch mit der Seitenlänge 1 cm ($4 - 3 = 1$) aufweist:



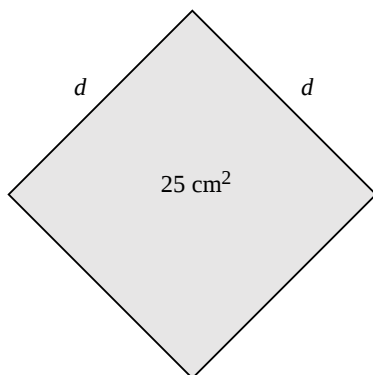
Die schraffierte Figur hat den zweifachen Flächeninhalt des Rechtecks, also

$$2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$$

Füllt man die quadratische Lücke von

$$1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$$

aus, so erhält man ein vollständiges Quadrat mit einer Fläche von 25 cm^2 und der Seitenlänge d :



Daher

$$d \cdot d = 25 \text{ cm}^2$$

Wir suchen also eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert 25 ergibt. Da nun $5 \cdot 5 = 25$, ist die Diagonale 5 cm lang.

Das Rechteck von Beispiel 2 wird auch auf einer im British Museum aufbewahrten altbabylonische Tontafel (ca. 1800 bis 1500 v. Chr.) betrachtet. Der Text lautet übersetzt:

4 ist die Länge und 5 die Diagonale. Was ist die Breite?

Ihr Maß ist nicht bekannt.

4 mal 4 ist 16.

5 mal 5 ist 25.

Ziehe 16 von 25 ab und es bleiben 9.

Wie viel mal wie viel ist 9? [Wurzel!]

3 mal 3 ist 9.

3 ist die Breite.

In dieser bestechend schlüssigen und klaren Darstellung wird der Satz von Pythagoras benutzt, entsprechend quadriert, subtrahiert und die Wurzel gezogen.

3.2 Quadratwurzel: Definition, Schreibweisen

Wir beginnen mit konkreten Beispielen und betrachten dann die allgemeine Definition und Schreibweise der Quadratwurzel.

Beispiel 1

Was ist die Quadratwurzel aus 9?

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert 9 ergibt. Anders gesagt:

Wie viel mal wie viel ist 9?

Aus dem kleinen Einmaleins wissen wir:

3 mal 3 ist 9

Also:

Die Quadratwurzel aus 9 ist 3.

Beispiel 2

Was ist die Quadratwurzel aus 16?

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert 16 ergibt:

Wie viel mal wie viel ist 16?

Das kleine Einmaleins zeigt uns:

$$4 \text{ mal } 4 \text{ ist } 16$$

Also:

Die Quadratwurzel aus 16 ist 4.

Im nächsten Beispiel werden wir einige sprachliche Ausdrücke in abgekürzter, formelmäßiger Gestalt schreiben.

So werden wir „Quadratwurzel aus 25“ als „ $\sqrt{25}$ “ abkürzen.

Beispiel 3

Was ist die Quadratwurzel aus 25?

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert 25 ergibt:

$$? \cdot ? = 25$$

Das kleine Einmaleins zeigt uns:

$$5 \cdot 5 = 25$$

Also:

$$\sqrt{25} = 5$$

Anmerkungen

In den betrachteten Beispielen sind nur **positive** Zahlen vorgekommen, was wegen der geometrischen Herkunft der Quadratwurzel nicht überrascht. Außerdem wurden die

negativen Zahlen erst etwa 2500 Jahre nach den Quadratwurzeln eingeführt, und zwar vom Inder Brahmagupta (ca. 598-670). Bezieht man hier auch negative Zahlen ein, so ergeben sich zwei Besonderheiten, die sich aus der Regel

„Minus mal Minus = Plus“,

oder genauer gesagt:

„**negative** Zahl mal **negative** Zahl = **positive** Zahl“,

ergeben.

Besonderheit 1.

Außer im Falle der Null gibt es **zwei** Zahlen (eine positive und eine negative), die mit sich selbst multipliziert eine gegebene Zahl liefern, zum Beispiel ist

$$3 \cdot 3 = 9,$$

aber auch

$$(-3) \cdot (-3) = 9.$$

Unter der **Quadratwurzel** versteht man stets die **positive** der beiden Zahlen.

Besonderheit 2.

Im Bereich der üblichen Zahlen kann man aus einer negativen Zahl keine Quadratwurzel ziehen. Denn

negative Zahl mal **negative** Zahl = **positive** Zahl,
positive Zahl mal **positive** Zahl = **positive** Zahl,
Null mal **Null** = **Null**,

ergeben niemals eine negative Zahl. Beispielsweise kann man keine Zahl finden, die mit sich selbst -9 ergibt:

$$? \cdot ? = -9$$

$$3 \cdot 3 = +9$$

$$(-3) \cdot (-3) = +9$$

Zusammenfassend halten wir fest:

- Aus negative Zahlen kann man keine Quadratwurzel ziehen.
- Quadratwurzeln sind positiv oder Null.

Die Beispiele und Erläuterungen münden in die folgende allgemeine Definition der Quadratwurzel.

Definition der Quadratwurzel

Wir betrachten eine Zahl a , die positiv oder 0 ist. Die *Quadratwurzel* aus a , geschrieben als $\sqrt{a}$, ist die (nicht negative) Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt:

$$? \cdot ? = a$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

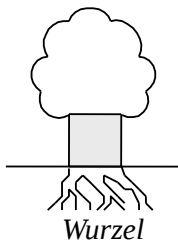
Bezeichnungen

Die Zahl aus der die Wurzel gezogen wird, bezeichnet man als *Radikand*, die Wurzel selber auch als *Radikal*. Das Verb *radizieren* bedeutet *Wurzel ziehen*. Alles geht auf *radix* (lat. *Wurzel*) zurück.

Anmerkungen zum Wort „Wurzel“

Im alten Griechenland hat man von der „Seite“ (*pleura*) gesprochen, was genau zur geometrischen Bedeutung der Wurzel als Seitenlänge eines Quadrates mit gegebenem Flächeninhalt passt. Der römische Mathematiker und Feldvermesser Marcus Junius Nipsus (2. Jahrhundert) benutzte ebenfalls das Wort „Seite“ (*latus*) und kürzte es mit *l* ab. Auch der Inder Brahmagupta bezeichnete die Wurzel als „Seite“ (*carani*) und kürzte sie mit *c* ab, zum Beispiel ist c_9 die Wurzel aus 9, also 3.

In der islamischen Welt (etwa ab 9. Jahrhundert) wurde das griechische „pleura“ (Seite) in „jidr“ übersetzt, das sowohl „Basis“ als auch „Wurzel“ einer Pflanze bedeutet. Die zwei Bedeutungen sind nicht völlig verschieden, wenn man „Wurzel“ im übertragenen Sinne auffasst als „Ursprung“ oder „Grund“; man denke da an Ausdrücke wie „die Wurzel allen Übels“. In diesem Sinne ist die Seitenlänge natürlich der Ursprung der Quadratfläche, weswegen die Bezeichnung „Wurzel“ nicht abwegig ist. Europäische Übersetzer haben sich für diese figürliche Bedeutung von „jidr“ entschieden und es als „Wurzel“ (lat. *radix*) übernommen. Gelegentlich wird dies als Übersetzungsfehler gesehen.



Anmerkungen zum Wurzelzeichen

Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ erscheint erstmals 1525 im Algebra-Buch *Die Coss* von Christoff Rudolff (ca. 1500 bis ca. 1543).

Davor wurden in Europa unterschiedliche Schreibweisen für die Wurzel benutzt. Beispielsweise erschien die Wurzel aus 9 in folgenden Varianten:

1. Mittels Abkürzungen von *radix*:

$R9$

$R\ 9$

$ra\ 9$

$r\ 9$

2. Mittels eines Punktes, teilweise mit Aufstrich:

$\bullet\ 9$

$\int 9$

Die vorherrschende und auch von Leonhard Euler (1707-1783) vertretene Ansicht ist, dass das Wurzelzeichen aus dem kleinen r entstanden ist.

Der Mathematikhistoriker Florian Cajori (1859-1930) sieht den mit Aufstrich versehenen Punkt $\int$ als Ursprung des Wurzelzeichens.

In seiner 1537 erschienenen berühmten *La Géométrie* hat René Descartes dem Wurzelzeichen den oberen horizontalen Strich hinzugefügt:

$$\sqrt{}9 \rightarrow \sqrt{9}.$$

Wir betrachten nun weitere Beispiele zur Quadratwurzel.

Beispiel 4

Was ist die Quadratwurzel aus 49?

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert 49 ergibt:

$$? \cdot ? = 49$$

Das kleine Einmaleins zeigt uns:

$$7 \cdot 7 = 49$$

Also:

$$\sqrt{49} = 7$$

Beispiel 5 (zusammengesetzte Zahl)

Was ist die Quadratwurzel aus 1225?

Lösung

Nach dem bekannten Spruch *teile und herrsche* zerlegen wir die relativ größere Zahl 1225 (die sich jenseits des Einmaleins befindet) in kleinere Zahlen.

1. Zerlegung

Wir gehen schrittweise vor. An der Endziffer 5 erkennen wir, dass 1225 durch 5 teilbar ist, womit also 5 abgespalten werden kann:

$$1225 = 245 \cdot 5 \quad | \text{denn } 1225 : 5 = 245$$

Nun ist 245 ebenfalls durch 5 teilbar, daher:

$$\begin{aligned} 1225 &= 245 \cdot 5 \\ &= 49 \cdot 5 \cdot 5 \quad | \text{denn } 245 : 5 = 49 \end{aligned}$$

Nun ist $49 = 7 \cdot 7$ aus dem Einmaleins bekannt, also:

$$\begin{aligned} 1225 &= 245 \cdot 5 \\ &= 49 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

2. Wurzel

In der Zerlegung $1225 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5$ tauchen alle Faktoren zweimal auf; im Hinblick auf die Wurzel schreiben wir

$$\begin{aligned} 1225 &= 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= \underline{7 \cdot 5} \cdot \underline{7 \cdot 5} \end{aligned}$$

Also ist $7 \cdot 5$ die Wurzel aus 1225:

$$\begin{aligned} \sqrt{1225} &= 7 \cdot 5 \\ \sqrt{1225} &= 35 \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Wurzel gefunden.

Die Berechnung der Wurzel in diesem Beispiel beruht im Wesentlichen darauf, dass die gegebene Zahl 1225 in zwei kleinere Zahlen zerlegt worden ist, die man als Quadratzahlen erkennen kann: $1225 = 49 \cdot 25$.

Beispiel 6 (Bruch)

Finde die Quadratwurzel aus $\frac{9}{16}$.

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert $\frac{9}{16}$ ergibt:

$$? \cdot ? = \frac{9}{16}$$

Die Wurzeln aus Zähler und Nenner springen ins Auge und liefern:

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$$

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man jeweils ihre Zähler und Nenner multipliziert. Also steht auf der linken Seite das Produkt zweier Brüche:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Die Wurzel aus $\frac{9}{16}$ ist daher $\frac{3}{4}$, kurz: $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

Beispiel 7 (Dezimalbruch)

Finde die Quadratwurzel aus 0,25.

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert 0,25 ergibt:

$$? \cdot ? = 0,25$$

Wir schreiben 0,25 als Bruch:

$$0,25 = \frac{25}{100}.$$

Nun springt ins Auge, dass

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}.$$

Also ist

$$\sqrt{0,25} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Im anschließenden Beispiel betrachten wir die Wurzel aus einer Potenz.

Beispiel 8 (Potenz)

Bestimme $\sqrt{4^6}$.

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert 4^6 ergibt:

$$? \cdot ? = 4^6$$

Nun schlüsseln wir die Potenz auf

$$\begin{aligned} 4^6 &= \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6\text{-mal}} \\ 4^6 &= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wurzel ist also:

$$\begin{aligned} \sqrt{4^6} &= 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ \sqrt{4^6} &= 64 \end{aligned}$$

Man kann auch die Potenzregeln nutzen, um die Berechnung kürzer zu fassen:

$$\begin{aligned}4^6 &= 4^{3+3} = 4^3 \cdot 4^3 \\ \sqrt{4^6} &= 4^3 \\ \sqrt[3]{4^6} &= 64\end{aligned}$$

An diesem Beispiel kann man erkennen, dass das Wurzelziehen aus einer Potenz den Exponenten offenbar halbiert.

Anmerkungen zu nicht glatten Wurzeln

In den bisherigen Beispielen sind alle Wurzeln glatt aufgegangen. Dies ist eher der Ausnahmefall. Bereits die oben betrachtete Länge des Einheitsquadrates hat die Länge $\sqrt{2}$, die eine Zahl zwischen 1 und 2 sein muss, denn $1 \cdot 1 = 1$ ist zu klein und $2 \cdot 2 = 4$ ist zu groß. In der Tat ist

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots$$

ein unendlicher Dezimalbruch. Wir werden Verfahren zur praktischen Berechnung von solchen Näherungswerten betrachten.

3.3 Regeln für Quadratwurzeln

Das Beispiel 5 des vorigen Abschnitts zeigt, dass man die Wurzel aus einem Produkt bestimmen kann, wenn man die Wurzel aus den Faktoren kennt. Das gleiche gilt auch für die Quadratwurzel aus einem Quotienten (Bruch), die man auf

die Wurzeln aus Zähler und Nenner zurückführen kann (Beispiel 6). Die Wurzel aus einer Potenz ist noch einfacher zu finden: Man halbiert einfach den Exponenten der Potenz, wie man in Beispiel 8 sehen kann.

Für die Wurzel aus einer Summe oder Differenz gibt es leider keine einfachen Regeln. So würde man sich wünschen, dass man bei $\sqrt{9+16}$ lediglich die Wurzeln aus 9 bzw. 16 zieht und diese dann addiert:

$$\begin{aligned}\sqrt{9+16} &= \sqrt{9} + \sqrt{16} \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

Dies ist leider falsch, denn tatsächlich ist

$$\begin{aligned}\sqrt{9+16} &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

Wir werden also drei Regeln allgemein formulieren, beweisen und mit Beispielen erläutern. Sie lösen folgende Aufgaben:

1. Gegeben: $\sqrt{a}, \sqrt{b}$. Gesucht: $\sqrt{ab}$
2. Gegeben: $\sqrt{a}, \sqrt{b}$. Gesucht: $\sqrt{\frac{a}{b}}$
3. Gegeben: a^n . Gesucht: $\sqrt{a^n}$

Regel 1: Wurzel aus einem Produkt

Man zieht die Wurzel aus einem Produkt, indem man aus jedem Faktor die Wurzel zieht:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Hierbei sind a und b nichtnegative Zahlen.

Beweis:

Um $\sqrt{ab}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert ab ergibt:

$$ab = ? \cdot ?$$

Nun drücken wir a und b mithilfe der als bekannt gedachten Wurzeln $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ aus:

$$a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$$

$$b = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$$

Wir setzen dies in ab ein und ordnen neu:

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \\ &= \underline{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \cdot \underline{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ die Wurzel aus ab , d. h. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Anmerkung

Die Regel gilt auch für mehrere Faktoren, wie man auch durch mehrfache Anwendung der Regel für zwei Faktoren sieht:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{ab \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Beispiel 1

Berechne $\sqrt{9 \cdot 16}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{9 \cdot 16} &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} \\ &= 3 \cdot 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{9 \cdot 16} = 12$.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt{a \cdot a}$.

Lösung 1 (nach Definition)

Es ist eine Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert $a \cdot a$ ergibt. Diese Zahl steht schon da: sie ist einfach a .

Also ist $\sqrt{a \cdot a} = a$.

Lösung 2 (Regel)

Wir benutzen die Regel und anschließend die Definitionsgleichung $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$:

$$\begin{aligned}\sqrt{a \cdot a} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \\ &= a\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{a \cdot a} = a$.

Beispiele 3

Betrachte die Wurzeln aus 100, 1000, 10.000, usw.

Lösung

$$\sqrt{100} = \sqrt{10 \cdot 10} = 10$$

$$\sqrt{1000} = \sqrt{100 \cdot 10} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{10} = 10 \cdot \sqrt{10}$$

$$\sqrt{10.000} = \sqrt{100 \cdot 100} = 100$$

$$\sqrt{100.000} = \sqrt{10.000 \cdot 10} = \sqrt{10.000} \cdot \sqrt{10} = 100 \cdot \sqrt{10}$$

usw.

Beispiel 4

Wir vereinfachen $\sqrt{18}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \cdot 9} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \\ &= \sqrt{2} \cdot 3 \\ &= 3 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

Also ist

$$\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

Damit haben wir $\sqrt{18}$ zurückgeführt auf die Wurzel aus 2, wobei 2 deutlich kleiner als 18 ist.

Regel 2: Wurzel aus einem Bruch

Man zieht die Wurzel aus einem Bruch, indem man aus Zähler und Nenner die Wurzel zieht:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Hierbei sind a und b nichtnegative Zahlen.

Beweis:

Um $\sqrt{\frac{a}{b}}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert $\frac{a}{b}$ ergibt:

$$\frac{a}{b} = ? \cdot ?$$

Nun drücken wir a und b mithilfe der als bekannt gedachten Wurzeln $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ aus:

$$a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$$

$$b = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$$

Wir setzen dies in $\frac{a}{b}$ ein und schreiben das Ergebnis als Produkt zweier Brüche:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Also ist $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ die Wurzel aus $\frac{a}{b}$, d. h. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt{\frac{9}{16}}$.

Lösung

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

Also ist $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

Beispiel 2 (Dezimalbruch)

Berechne $\sqrt{0,25}$.

Lösung

Wir wandeln 0,25 in einen Bruch um, kürzen ihn und ziehen dann die Wurzel:

$$\begin{aligned} 0,25 &= \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ \sqrt{0,25} &= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{0,25} = 0,5$.

Im folgenden Beispiel wird das *Rationalmachen* des Nenners vorgeführt. Der Hintergrund ist folgender. In 3.4 werden wir beweisen, dass $\sqrt{2}$ kein Bruch ist, also *irrational* (nicht *rational*) ist. Sie ist also ein unendlicher Dezimalbruch. Einen solchen im Nenner (d. h. als Teiler) zu haben, ist unangenehm. Daher wird der Bruch mit eben

dieser Wurzel erweitert, um die Wurzel aus dem Nenner zu entfernen, der somit *rational gemacht* wird.

Beispiel 3 (Rationalmachen)

Berechne $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad | \text{ mit } \sqrt{2} \text{ erweitern} \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Also ist

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Regel 3: Wurzel aus einer Potenz

Man zieht die Wurzel aus einer Potenz, indem man den Exponenten halbiert:

$$\sqrt{a^n} = a^{n/2}$$

Hierbei ist a eine nichtnegative Zahl und n eine gerade ganze Zahl (da wir bislang nur Potenzen mit ganzzahligen

Exponenten definiert haben und somit $n/2$ ganzzahlig sein sollte).

Beweis:

Um $\sqrt{a^n}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert a^n ergibt:

$$a^n = ? \cdot ?$$

Da n gerade ist, können wir es als $n = 2k$ schreiben, wobei $k = n/2$ die Hälfte von n ist. Somit

$$\begin{aligned} a^n &= a^{2k} \\ &= a^{k+k} \\ &= a^k \cdot a^k \quad (\text{Potenzregeln}) \end{aligned}$$

Wir haben also a^n in zwei gleiche Faktoren zerlegt:

$$a^n = a^k \cdot a^k$$

Folglich

$$\begin{aligned} \sqrt{a^n} &= a^k \\ \sqrt{a^n} &= a^{n/2} \end{aligned}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt{a^6}$.

Lösung

$$\begin{aligned} \sqrt{a^6} &= a^{6/2} \\ &= a^3 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{a^6} = a^3$.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt{3^8}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{3^8} &= 3^{8/2} \\ &= 3^4 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 81\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{3^8} = 81$.

Auf Rechnern werden Zahlen in der wissenschaftlichen Notation (Fließkommazahlen) dargestellt. Daher untersuchen wir in den folgenden Beispielen, wie man die Wurzel aus solchen Zahlen berechnen kann. Es zeigt sich, dass man lediglich die Wurzel aus der Mantisse oder ihrem Zehnfachen (wenn der Exponent ungerade ist) berechnen muss; bei der Potenz muss im Wesentlichen nur der Exponent halbiert werden,

Beispiel 3 (wiss. Notation, gerader Exponent)

Vereinfache $\sqrt{3,2 \cdot 10^{14}}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{3,2 \cdot 10^{14}} &= \sqrt{3,2} \cdot \sqrt{10^{14}} \\ &= \sqrt{3,2} \cdot 10^{14/2}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{3,2 \cdot 10^7}$$

Also ist

$$\sqrt{3,2 \cdot 10^{14}} = \sqrt{3,2} \cdot 10^7$$

Hierbei ist nur noch $\sqrt{3,2}$ konkret zu berechnen, deren Wert zwischen 1 und 2 liegt (denn $1 \cdot 1 = 1$ und $2 \cdot 2 = 4$).

Beispiel 4 (wiss. Notation, ungerader Exponent)

Vereinfache $\sqrt{9,5 \cdot 10^{13}}$.

Lösung

Wir spalten eine 10 von der Potenz 10^{13} ab, um einen geraden Exponenten zu bekommen: $10^{13} = 10 \cdot 10^{12}$.

Dann rechnen wir:

$$\begin{aligned}\sqrt{9,5 \cdot 10^{13}} &= \sqrt{9,5 \cdot 10 \cdot 10^{12}} \\ &= \sqrt{95 \cdot 10^{12}} \\ &= \sqrt{95} \cdot \sqrt{10^{12}} \\ &= \sqrt{95} \cdot 10^{12/2} \\ &= \sqrt{95} \cdot 10^6\end{aligned}$$

Also ist

$$\sqrt{9,5 \cdot 10^{13}} = \sqrt{95} \cdot 10^6$$

Hierbei ist nur noch $\sqrt{95}$ konkret zu berechnen, ihr Wert liegt zwischen 9 und 10.

Beispiel 5 (wiss. Notation, unger., negativer Exponent)

Vereinfache $\sqrt{4,3 \cdot 10^{-5}}$.

Lösung

Wir spalten wieder eine 10 von der Potenz 10^{-5} ab, um einen geraden Exponenten zu bekommen: $10^{-5} = 10 \cdot 10^{-6}$.
Dann rechnen wir:

$$\begin{aligned}\sqrt{4,3 \cdot 10^{-5}} &= \sqrt{4,3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \\ &= \sqrt{43 \cdot 10^{-6}} \\ &= \sqrt{43} \cdot \sqrt{10^{-6}} \\ &= \sqrt{43} \cdot 10^{-6/2} \\ &= \sqrt{43} \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

Also ist

$$\sqrt{4,3 \cdot 10^{-5}} = \sqrt{43} \cdot 10^{-3}$$

Hierbei ist nur noch $\sqrt{43}$ konkret zu berechnen, ihr Wert liegt zwischen 6 und 7.

Die letzten drei Beispiele zeigen, dass die Berechnung von Quadratwurzeln stets auf die Berechnung von Wurzeln aus Zahlen im Bereich von 1 bis weniger als 100 zurückgeführt werden kann.

Zum Abschluss dieses Abschnitts fassen wir die drei betrachten Wurzelregeln zusammen. Sie handeln von der Verbindung der Wurzel zu den anderen Rechenarten, nämlich Multiplikation, Division und Potenzen. Addition

und Subtraktion haben keine einfache Beziehung zur Wurzel und kommen deswegen hier nicht vor.

Wurzelregeln
$1. \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $2. \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$ $3. \quad \sqrt{a^n} = a^{n/2}$
Hierbei sind a und b nichtnegative Zahlen, n eine gerade ganze Zahl.

3.4 Wurzeln sind meist keine Brüche

Wenn man die vier Grundrechenarten mit ganzen Zahlen durchführt, ist das Ergebnis eine ganze Zahl oder ein Bruch, der auch negativ sein kann. Beispiele:

$$3+5 = 8 \quad (\text{natürliche Zahl})$$

$$3 \cdot 5 = 15 \quad (\text{natürliche Zahl})$$

$$3-5 = -2 \quad (\text{ganze Zahl, negativ})$$

$$3:5 = \frac{3}{5} \quad (\text{Bruch, d. h. rationale Zahl})$$

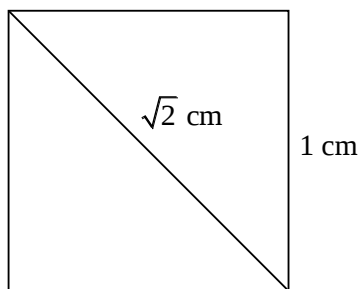
$$-2:5 = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \quad (\text{negativer Bruch})$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 2} = \frac{27}{10} \quad (\text{Bruch})$$

Die Grundrechenarten führen nicht aus dem Bereich der Brüche (auch rationalen Zahlen genannt) heraus.

Überraschenderweise ist dies bei Wurzeln völlig anders, schon die harmlos wirkende $\sqrt{2}$ ist kein Bruch, wie die Pythagoräer bereits vor 2500 Jahren bewiesen haben. Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können, bezeichnet man als *irrational* (*nicht rational*).

Eine weithin bekannte Legende besagt, dass etwa 500 v. Chr. eine Gruppe von Pythagoräern eine Bootsfahrt unternahm. Einer der Teilnehmer trug dabei einen Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ vor. Da dies nun zur Folge hat, dass die Seiten und die Diagonale eines Quadrates *inkommensurabel* sind, brach die Grundlage der gesamten griechischen Geometrie weg. Man hatte stets vorausgesetzt, dass man immer eine *gemeinsame* Längeneinheit s (Einheitsstrecke) für zwei Strecken finden kann, wodurch die Längen der Strecken *ganzzahlige* Vielfache der Längeneinheit sind (d. h. dass die Strecken *kommensurabel* sind). Aus dieser Voraussetzung folgt für das Quadrat:



$$\text{Seitenlänge} = 1 \text{ cm} = m \cdot s$$

$$\text{Diagonale} = \sqrt{2} \text{ cm} = n \cdot s$$

Die Wurzel aus 2 ist das Streckenverhältnis $\frac{\text{Diagonale}}{\text{Seitenlänge}}$:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = \frac{n \cdot s}{m \cdot s} = \frac{n}{m}$$

Also wäre $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ein Bruch, was aber auf der Bootsfahrt als unmöglich erkannt wurde. Der arme Mann, der das bewiesen hatte, wurde aus dem Boot geworfen und ertrank.

Im Folgenden werden wir die Irrationalität von $\sqrt{2}$ beweisen. Danach zeigen wir, dass auch die Wurzel aus einer Primzahl irrational ist, ebenso wie die Wurzel aus einem Produkt voneinander verschiedener Primzahlen. Wir beginnen mit einem Hilfsmittel für die Beweise: die eindeutige Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen.

3.4.1 Die Primfaktorzerlegung

Bereits im antiken Griechenland war bekannt und bewiesen, dass sich jede natürliche Zahl *eindeutig als Produkt von aufsteigenden Primzahlen* schreiben lässt, wobei „aufsteigend“ im weiteren Sinne gemeint ist und *gleiche* Primzahlen erlaubt sind. Wir werden die Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung hier nicht beweisen und begnügen uns mit einigen Beispielen.

Beispiel 1

Zerlege 12 in aufsteigende Primfaktoren.

Lösung

Wir gehen schrittweise vor, zunächst spalten wir den Teiler 3 ab. Dann zerlegen wir 4, ordnen und fassen gleiche Faktoren zu einer Potenz zusammen:

$$\begin{aligned}12 &= 3 \cdot 4 \\&= 3 \cdot 2 \cdot 2 \\&= 2 \cdot 2 \cdot 3 \\&= 2^2 \cdot 3\end{aligned}$$

Also ist $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$.

Beispiel 2

Zerlege 70 in aufsteigende Primfaktoren.

Lösung

Wir gehen wieder schrittweise vor:

$$\begin{aligned}70 &= 2 \cdot 35 \\&= 2 \cdot 5 \cdot 7\end{aligned}$$

Also ist $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Beispiel 3

Zerlege 2574 in aufsteigende Primfaktoren.

Lösung

Wir gehen wieder schrittweise vor und prüfen jeweils, ob eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... die jeweils zu betrachtende Zahl teilt. 2574 ist durch 2 teilbar, weil die Endziffer 4 gerade ist. Da die Quersumme $2 + 5 + 7 + 4 = 18$ durch 9 teilbar ist, trifft dies auch für 2574 zu, also:

$$\begin{aligned} 2574 &= 2 \cdot 1287 \\ &= 2 \cdot 9 \cdot 143 \\ &= 2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \end{aligned}$$

Also ist $2574 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$.

3.4.2 Die Irrationalität der Wurzel aus 2

Wir untersuchen, was es bedeuten würde, wenn $\sqrt{2}$ ein Bruch wäre, etwa $\frac{a}{b}$ mit natürlichen Zahlen a und $b \neq 0$.

Multipliziert man diesen Bruch mit sich selbst, so müsste 2 herauskommen:

$$2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Wir multiplizieren die Brüche, anschließend multiplizieren wir beide Seiten mit dem Nenner, um den Bruch loszuwerden:

$$2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} \quad | \cdot b \cdot b$$

$$2 \cdot b \cdot b = a \cdot a$$

Nun richten wir unser Augenmerk darauf, wie oft der Primfaktor 2 auf jeder Seite auftaucht. In a komme der Faktor 2 m -mal vor, und in b n -mal. Dann haben wir folgende Situation:

$$\underbrace{\underbrace{2 \cdot \underbrace{b \cdot b}_{n\text{-mal}}}_{2n\text{-mal}}}_{(2n+1)\text{-mal}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a}_{m\text{-mal}}}_{2m\text{-mal}}$$

Der Faktor 2 taucht auf der linken Seite $(2n+1)$ -mal auf und auf der rechten Seite $2m$ -mal. Da $2n+1$ ungerade ist und $2m$ gerade ist, können sie nicht gleich sein, weswegen auch die beiden Seiten nicht gleich sein können. Somit ist es ausgeschlossen, dass jemals

$$2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}.$$

Daher muss also $\sqrt{2}$ irrational sein.

Also kann $\sqrt{2}$ niemals ein endlicher Dezimalbruch sein, denn jeder endliche Dezimalbruch ist ein Bruch. Beispielsweise ist

$$1,414 = \frac{1,414 \cdot 1000}{1000} = \frac{1414}{1000}$$

Zwar ist 1,414 ein guter Näherungswert für $\sqrt{2}$, aber sicherlich nicht der exakte Wert. Wenn man davon spricht, die Wurzel aus 2 zu *berechnen*, so ist stets die Berechnung eines *Näherungswertes* gemeint.

3.4.3 Die Irrationalität der Wurzel aus einer Primzahl

Es sei p eine Primzahl. Wir untersuchen, was es bedeuten würde, wenn $\sqrt{p}$ ein Bruch wäre, etwa $\frac{a}{b}$ mit natürlichen Zahlen a und $b \neq 0$.

Nach Definition der Wurzel müsste gelten:

$$p = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Wir multiplizieren die Brüche, anschließend multiplizieren wir beide Seiten mit dem Nenner, um den Bruch loszuwerden:

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \\ p &= \frac{a \cdot a}{b \cdot b} & | \cdot b \cdot b \\ p \cdot b \cdot b &= a \cdot a \end{aligned}$$

Nun richten wir unser Augenmerk darauf, wie oft der Primfaktor p auf jeder Seite auftaucht. In a komme der Faktor p m -mal vor, und in b n -mal. Dann haben wir folgende Situation:

$$\underbrace{p \cdot \underbrace{b \cdot b}_{\substack{n\text{-mal} \quad n\text{-mal} \\ 2n\text{-mal}}} \cdot \underbrace{b}_{(2n+1)\text{-mal}}} = \underbrace{a \cdot a}_{\substack{m\text{-mal} \quad m\text{-mal} \\ 2m\text{-mal}}}$$

Der Faktor p taucht auf der linken Seite $(2n+1)$ -mal auf und auf der rechten Seite $2m$ -mal. Da $2n+1$ ungerade ist und $2m$ gerade ist, können sie nicht gleich sein, weswegen auch die beiden Seiten nicht gleich sein können. Somit ist es ausgeschlossen, dass jemals

$$p = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}.$$

Daher muss also $\sqrt{p}$ irrational sein.

Also kann auch $\sqrt{p}$ niemals ein endlicher Dezimalbruch sein. Die Wurzel aus p zu *berechnen* meint also die Berechnung eines *Näherungswertes*.

3.4.4 Die Quadratwurzeln aus Brüchen

Wir untersuchen nun die Quadratwurzel aus einem Bruch. Dafür benötigen wir Quadratzahlen.

Die Quadrate (zweite Potenzen) der natürlichen Zahlen werden *Quadratzahlen* genannt. Konkret sind dies folgende Zahlen:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

$$5^2 = 25$$

$$6^2 = 36$$

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

$$9^2 = 81$$

$$10^2 = 100 \text{ usw.}$$

Die Anzahl, mit der jeder Primfaktor in einer Quadratzahl vorkommt, ist stets ein Vielfaches von 2, also durch 2 teilbar, d. h. eine gerade Zahl. Denn wenn in einer natürlichen Zahl a der Primfaktor p n -mal vorkommt, kommt er in $a^2 = a \cdot a$ $2n$ -mal vor:

$$\underbrace{a \cdot a}_{\substack{n\text{-mal} \quad n\text{-mal} \\ 2n\text{-mal}}}$$

Ist eine Zahl keine Quadratzahl, so muss sie einen Primfaktor besitzen, dessen Anzahl *kein* Vielfaches von 2 ist. Die Anzahl ist also ungerade und nicht durch 2 teilbar. Beim Dividieren dieser Anzahl durch 2 wird sich also der Rest 1 ergeben, die Anzahl muss also von der Gestalt $2m+1$ sein.

Die Quadratwurzel aus einer Quadratzahl ist offenbar immer eine natürliche Zahl, beispielsweise $\sqrt{9} = 3$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ein Irrationalitätskriterium für die Quadratwurzel aus einem Bruch formulieren und beweisen:

Irrationalitätskriterium für die Quadratwurzel aus einem Bruch

Für die Quadratwurzel $\sqrt{\frac{Z}{N}}$ aus einem gekürzten Bruch $\frac{Z}{N}$ (wobei Z und N natürliche Zahlen sind) gibt es nur zwei Möglichkeiten:

1. Zähler Z und Nenner N sind beide Quadratzahlen.
Dann ist:

$$\sqrt{\frac{Z}{N}} = \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{N}} \text{ ein Bruch,}$$

also rational.

2. Von den Zahlen Z und N ist mindestens eine keine Quadratzahl. Dann ist

$$\sqrt{\frac{Z}{N}} \text{ irrational.}$$

Beweis des Kriteriums

1. Wenn Z und N beide Quadratzahlen sind, sind Ihre Quadratwurzeln $\sqrt{Z}$ und $\sqrt{N}$ natürliche Zahlen, und

$$\sqrt{\frac{Z}{N}} = \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{N}}$$

ist tatsächlich ein Bruch im herkömmlichen Sinne.

2. Wenn die Bedingung von Punkt 1 nicht erfüllt ist, so muss von den Zahlen Z und N mindestens eine keine Quadratzahl sein. Wir betrachten den Fall, dass Z keine Quadratzahl ist. (Der Fall, dass N keine Quadratzahl ist, verläuft vollkommen analog.) Da die Zahl Z keine Quadratzahl ist, enthält sie einen Primfaktor p , dessen Anzahl von der Gestalt $2k+1$ ist. Da der Bruch gekürzt ist, ist p kein Primfaktor von N .

Nun fahren wir wie gehabt fort. Wäre

$$\sqrt{\frac{Z}{N}} = \frac{a}{b},$$

so hätten wir

$$\frac{Z}{N} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\frac{Z}{N} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} \quad | \cdot b \cdot b$$

$$\frac{Z}{N} \cdot b \cdot b = a \cdot a \quad | \cdot N$$

$$Z \cdot b \cdot b = N \cdot a \cdot a$$

Nun schauen wir wieder, wie oft der Primfaktor p auf beiden Seiten vorkommt. In a komme der Faktor p m -mal vor, und in b n -mal. Dann haben wir folgende Situation:

$$\underbrace{\underbrace{Z}_{(2k+1)\text{-mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b}_{\substack{n\text{-mal} \quad n\text{-mal} \\ 2n\text{-mal}}}}_{(2(k+n)+1)\text{-mal}} = \underbrace{N \cdot \underbrace{a \cdot a}_{\substack{m\text{-mal} \quad m\text{-mal} \\ 2m\text{-mal}}}}_{2m\text{-mal}}$$

Die Anzahl des Faktors p auf der linken Seite ist $2(k+n)+1$, also nicht durch 2 teilbar, auf der rechten Seite ist die Anzahl aber durch 2 teilbar. Deswegen können die beiden Seiten nicht gleich sein. Somit ist es ausgeschlossen, dass jemals

$$\sqrt{\frac{Z}{N}} = \frac{a}{b}.$$

Also ist

$$\sqrt{\frac{Z}{N}} \text{ irrational.}$$

Wir schließen mit zwei Beispielen.

Beispiel 4 (irrationale Wurzel)

Untersuche $\sqrt{\frac{11}{300}}$

Lösung

Da 11 eine Primzahl ist und 300 nicht durch 11 teilbar ist, ist der Bruch also gekürzt. Ferner ist 11 keine Quadratzahl.

Also ist $\sqrt{\frac{11}{300}}$ irrational.

Beispiel 5 (rationale Wurzel)

Untersuche $\sqrt{\frac{48}{75}}$

Lösung

Zunächst kürzen wir den Bruch (3 ist ein gemeinsamer Teiler) soweit wie möglich. Dann wenden wir die Wurzelregeln an:

$$\sqrt{\frac{48}{75}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Also ist $\sqrt{\frac{48}{75}}$ rational.

3.5 Die Berechnung von Quadratwurzeln

Wir betrachten ein nach dem Griechen Heron (ca. 10 – 70, Alexandria) benanntes Verfahren, das jedoch im Wesentlichen schon den Altbabyloniern um 1800 v. Chr. bekannt war.

Die heutigen Taschenrechner berechnen damit die Wurzeln. Das Verfahren von Heron geht von einem (groben) Näherungswert (*Startwert*) aus. Der Wert wird dann verbessert. Diese Verbesserungsprozedur wird so lange wiederholt, bis man die gewünschte Genauigkeit (z. B. 8 richtige Stellen nach dem Komma) erreicht hat.

Zunächst erläutern wir das Verfahren anhand eines konkreten Beispiels, wobei wir lediglich den gesunden Menschenverstand und die Grundrechenarten benutzen. Anschließend wird die Methode auch geometrisch

hergeleitet. Aus den vorgeführten Berechnungen kann eine Formel abgelesen werden: sie enthält das Herzstück des Heronverfahrens. Wir betrachten außerdem zwei weitere Herleitungen dieser Formel: Die eine ist auch auf das Lösen von Gleichungen anwendbar. Die andere benutzt die Besonderheiten des Rechnens mit Zahlen, die ungefähr 1 sind, das später beim Verständnis der eulerschen Zahl und der natürlichen Logarithmen dienlich sein wird. Dann werden wir erläutern, dass das Heronverfahren *schnell* zu Ergebnissen der gewünschten Genauigkeit führt (weil es *quadratisch konvergent* ist). Schließlich betrachten wir noch eine Variante des Heronverfahrens, die ohne Divisionen auskommt. Wir behandeln also folgende Themen:

1. Das Heronverfahren rechnerisch betrachtet
2. Das Heronverfahren geometrisch betrachtet
3. Die Formel des Heronverfahren
4. Herleitung durch Addition eines Korrekturwertes
5. Herleitung durch Zahlen nahe bei 1
6. Die quadratische Konvergenz des Heronverfahrens
7. Ein Verfahren ohne Divisionen

Wie in Kapitel 3.3 schon gezeigt, kann man die Wurzel aus einer beliebigen (nichtnegativen) Zahl stets auf die Wurzel aus einer Zahl im Bereich von 1 bis weniger als 100 zurückführen. Das Heronverfahren muss also lediglich auf Zahlen in diesem Bereich angewendet werden.

3.5.1 Das Heronverfahren rechnerisch betrachtet

Die Einzelheiten werden anhand der Wurzel aus 20 erläutert.

Wir suchen eine Zahl, die mit sich selber multipliziert 20 ergibt:

$$? \cdot ? = 20$$

Eine glatte (ganze) Zahl kommt leider nicht in Frage, denn $4 \cdot 4 = 16$ ist zu klein und $5 \cdot 5 = 25$ ist zu groß. Die gesuchte Wurzel muss zwischen 4 und 5 liegen.

Geht man den pragmatischen Kompromiss ein, zunächst auf die Gleichheit der Faktoren zu verzichten, ist es leicht, 20 als Produkt zu bekommen:

$$4 \cdot 5 = 20$$

Wenn man keine so schöne Zerlegung findet, kann man immer auf die Zerlegung mit der Eins als einen der Faktoren zurückgreifen:

$$1 \cdot 20 = 20$$

Bei einer solchen *Zerlegung* ist der eine Faktor zu klein und der andere zu groß, um bei der Multiplikation mit sich selber 20 zu ergeben. Die Wahrheit liegt dazwischen. Der am einfachsten zu berechnende Zwischenwert ist der *Mittelwert*, er liegt genau in der Mitte und berechnet sich als die Summe der beiden Zahlen, dividiert durch Zwei. Genauso findet man übrigens auch die Endnote aus zwei Teilnoten.

Betrachten wir die Zerlegung

$$4 \cdot 5 = 20,$$

so sind die Faktoren 4 und 5 und ihr Mittelwert ist:

$$\frac{4+5}{2} = 4,5.$$

Den Wert 4,5 nehmen wir nun als *neuen* ersten *Faktor*. Der

zweite Faktor kann nicht frei gewählt werden, sondern muss so berechnet werden, dass das Produkt 20 ergibt:

$$4,5 \cdot ? = 20.$$

Der gesuchte zweite Faktor muss daher der Quotient $20 : 4,5$ sein. Wir schreiben den Quotienten als Bruch $\frac{20}{4,5}$ und erhalten:

$$4,5 \cdot \frac{20}{4,5} = 20.$$

Setzt man den Wert des Quotienten (auf 5 Nachkommastellen gerundet) ein, so kommen wir zur Zerlegung:

$$4,5 \cdot 4,44444 \approx 20.$$

Beide Faktoren liegen nun viel näher beieinander als bei der ursprünglichen Zerlegung. Setzt man das Verfahren fort, so gelangt man zu Faktoren, die sich beliebig nahe kommen.

Wir führen das erläuterte Verfahren nun in kurzer, schematischer Form durch, um $\sqrt{20}$ bis auf 5 Nachkommastellen zu berechnen.

1. Schritt

Zerlegung: $4 \cdot 5 = 20$ (auch möglich: $1 \cdot 20 = 20$)

Mittelwert: $\frac{4+5}{2} = 4,5$

2. Schritt

Zerlegung: $4,5 \cdot ? = 20$

$$4,5 \cdot \frac{20}{4,5} = 20$$

$$4,5 \cdot 4,44444 \approx 20$$

$$\text{Mittelwert: } \frac{4,5 + 4,44444}{2} = 4,47222$$

3. Schritt

$$\text{Zerlegung: } 4,47222 \cdot ? = 20$$

$$4,47222 \cdot \frac{20}{4,47222} = 20$$

$$4,47222 \cdot 4,47205 \approx 20$$

$$\text{Mittelwert: } \frac{4,47222 + 4,47205}{2} \approx 4,47214$$

4. Schritt

$$\text{Zerlegung: } 4,47214 \cdot ? = 20$$

$$4,47214 \cdot \frac{20}{4,47214} = 20$$

$$4,47214 \cdot 4,47213 \approx 20$$

$$\text{Mittelwert: } \frac{4,47214 + 4,47213}{2} \approx 4,47214$$

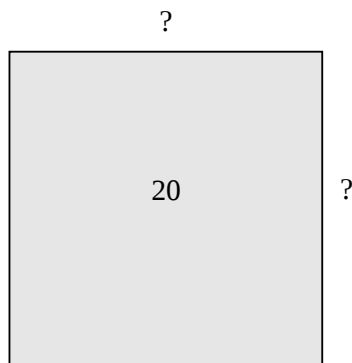
Der letzte Schritt hat keine weitere Verbesserung gebracht. Auch weitere Schritte würden wieder die Zahl 4,47214 liefern. Wir können also abbrechen und das Ergebnis festhalten:

$$\sqrt{20} \approx 4,47214$$

3.5.2 Das Heronverfahren geometrisch betrachtet

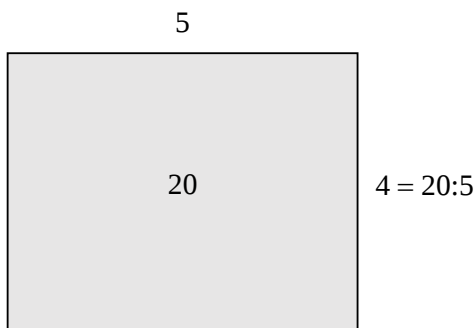
Wir erläutern die geometrische Herleitung wieder am Beispiel der Wurzel aus 20.

Zum geometrischen Ursprung der Wurzel zurückkehrend, müssen wir die Seitenlänge eines Quadrates mit 20 als Flächeninhalt finden:



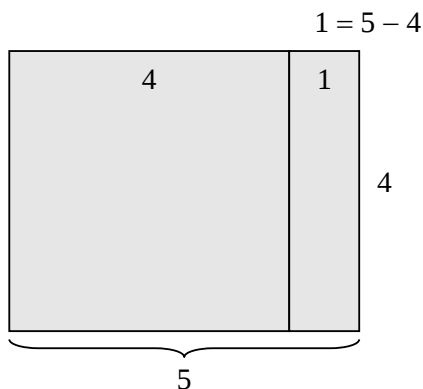
Eine glatte (ganze) Zahl kommt als Seitenlänge leider nicht in Frage, denn $4 \cdot 4 = 16$ ist zu klein und $5 \cdot 5 = 25$ ist zu groß. Die gesuchte Seitenlänge muss zwischen 4 und 5 liegen.

Geht man den pragmatischen Kompromiss ein, zunächst darauf zu verzichten, dass die Figur ein Quadrat ist, und begnügt sich mit einem Rechteck, so ist es leichter, die Seitenlängen eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 20 zu finden:

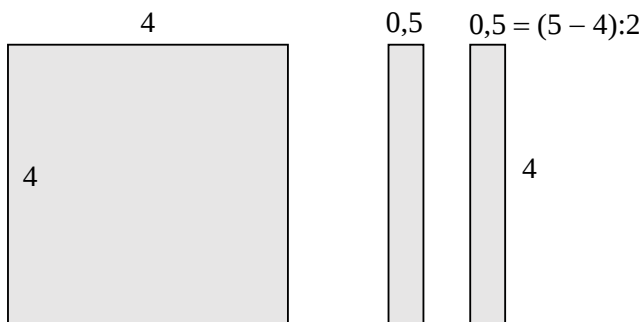


Wenn man kein so schönes Rechteck finden kann, so ist das Rechteck mit der Breite 1 eine mögliche Wahl. Die Länge wäre dann 20.

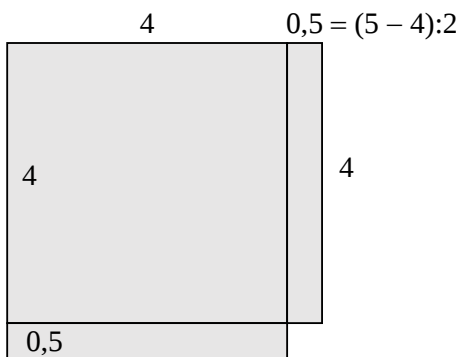
Nun wandeln wir das Rechteck in ein etwas quadratischeres Rechteck um. Dazu schneiden wir rechts etwas ab, damit ein Quadrat übrig bleibt.



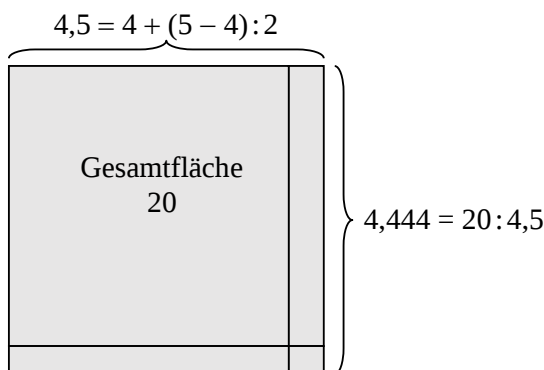
Das abgeschnittene Stück halbieren wir



und kleben die Hälften rechts und unten an das Quadrat. Es entsteht ein Quadrat mit einer offenbar sehr kleinen Lücke:



Man kann die Lücke aber füllen, indem man unten einen sehr schmalen Streifen abschneidet, umformt und in die Lücke einfügt. So bekommen wir Rechteck, dass mit dem Auge kaum von einem Quadrat zu unterscheiden ist.



Der Ausdruck

$$4 + (5 - 4) : 2 = 4 + \frac{5 - 4}{2}$$

ist übrigens nichts anderes als der Mittelwert von 4 und 5, denn

$$\begin{aligned} 4 + \frac{5 - 4}{2} &= \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{5 - 4}{2} \\ &= \frac{2 \cdot 4 + 5 - 4}{2} \\ &= \frac{2 \cdot 4 - 4 + 5}{2} \\ &= \frac{4 + 5}{2} \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen: Aus der gegebenen Rechtecksseite 5 berechnen wir die andere Seite durch Division des Flächeninhalts 20 durch 5. Die Seite des neuen, quadratischeren Rechtecks ist der Mittelwert der zwei Seiten des ursprünglichen Rechtecks.

3.5.3 Die Formel des Heronverfahren

Wir betrachten zunächst wieder das Beispiel der Wurzel aus 20. Danach werden wir die Formel auch abstrakt und allgemein mit Buchstaben schreiben.

Wir beginnen mit einem Näherungswert für die Wurzel, z. B. 4, den wir gemäß Abschnitt 1 als ersten Faktor der Zerlegung von 20 auffassen:

$$4 \cdot ? = 20$$

Im Sinne von Abschnitt 2 kann 4 auch als Seitenlänge eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 20 betrachtet werden.

Der zweite Faktor ist der Quotient $20:4=5$, den wir als Bruch schreiben:

$$4 \cdot \frac{20}{4} = 20$$

$$4 \cdot 5 = 20$$

Der verbesserte Wert ergibt sich nun als Mittelwert der beiden Faktoren, wobei wir den zweiten Faktor als Bruch stehen lassen, um seine Herkunft sichtbar zu machen:

$$\text{verbesserter Wert} = \frac{4 + \frac{20}{4}}{2}$$

Zur Vermeidung des Doppelbruches schreiben wir die Division durch 2 als Multiplikation mit $\frac{1}{2}$:

$$\text{verbesserter Wert} = \frac{1}{2} \cdot \left(4 + \frac{20}{4} \right)$$

Diese Formel können wir nun allgemein formulieren. Dazu ersetzen wir die konkreten Zahlen durch Buchstaben:

a = Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll

x = Näherungswert für die Wurzel aus a .

y = verbesserter Näherungswert für die Wurzel aus a .

Dann lautet unser Formel:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

Diese Formel ist einfach zu deuten, denn sie ist in erster Instanz der Mittelwert zweier Zahlen, nämlich x und $\frac{a}{x}$. Diese beiden Zahlen sind genau die beiden Faktoren einer Zerlegung von a :

$$x \cdot \frac{a}{x} = a$$

Hierbei ergibt sich der zweite Faktor $\frac{a}{x}$ zwangsläufig aus dem ersten Faktor x .

Es folgen zwei Beispiele zur Anwendung der Formel, beginnend mit der inzwischen vertrauten Wurzel aus 20.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt{20}$ mit einer Genauigkeit von fünf Nachkommastellen.

Lösung

1. Startwert: $x_0 = 4$ (Näherungswert für $\sqrt{20}$)

2. Verbesserungen (Iteration)

Wir wenden die Verbesserungsformel $y = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right)$ mehrfach an, zunächst für $x = x_0 = 4$, dann erhalten wir $x_1 = y$, nun setzen wir $x = x_1$ ein und erhalten $x_2 = y$, usw.:

Verbesserung 1

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 + \frac{20}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 5) = 4,5$$

Verbesserung 2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(4,5 + \frac{20}{4,5} \right) \approx \frac{1}{2} \cdot (4,5 + 4,44444) = 4,47222 \end{aligned}$$

Verbesserung 3

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(4,47222 + \frac{20}{4,47222} \right) \end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot (4,47222 + 4,47205) \approx \mathbf{4,47213}$$

Verbesserung 4

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_3 + \frac{a}{x_3} \right) \\&= \frac{1}{2} \cdot \left(4,47213 + \frac{20}{4,47213} \right) \\&\approx \frac{1}{2} \cdot (4,47213 + 4,47214) \approx \mathbf{4,47214}\end{aligned}$$

Verbesserung 5

$$\begin{aligned}x_5 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_4 + \frac{a}{x_4} \right) \\&= \frac{1}{2} \cdot \left(4,47214 + \frac{20}{4,47214} \right) \\&\approx \frac{1}{2} \cdot (4,47214 + 4,47213) \approx \mathbf{4,47214}\end{aligned}$$

Der letzte Schritt hat zu keiner weiteren Verbesserung geführt. Der zuletzt berechnete Wert ist also die gesuchte Näherung:

$$\sqrt{20} \approx 4,47214$$

Dass der letzte Schritt keine Verbesserung liefert, bedeutet in der Tat (beim Rechnen mit 5 Nachkommastellen):

$$x_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_4 + \frac{a}{x_4} \right)$$

Wir können dies als Gleichung mit der Unbekannten $x = x_4$ auffassen und lösen:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right) \quad | \cdot 2$$

$$2x = x + \frac{a}{x} \quad | - x$$

$$x = \frac{a}{x} \quad | \cdot x$$

$$x \cdot x = a$$

$$x = \sqrt{a}$$

Also ist bis auf 5 Nachkommstellen

$$x_4 = x = \sqrt{a} = \sqrt{20}$$

Als nächstes berechnen wir $\sqrt{2}$, die als Länge der Diagonale des Einheitsquadrates vorkommt und auch sonst in der Praxis oft vorkommt.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt{2}$ mit einer Genauigkeit von acht Nachkommastellen.

Lösung

1. Startwert: $x_0 = 1$ (Näherungswert für $\sqrt{2}$)

2. Verbesserungen (Iteration)

Wir wenden die Verbesserungsformel $y = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right)$ an.

Verbesserung 1

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2) = \mathbf{1,5}$$

Verbesserung 2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{1,5} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1,5 + 1,333...) = \mathbf{1,41666667} \end{aligned}$$

Verbesserung 3

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1,41666667 + \frac{2}{1,41666667} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot (1,41666667 + 1,41176470) \approx \mathbf{1,41421569} \end{aligned}$$

Verbesserung 4

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_3 + \frac{a}{x_3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1,41421569 + \frac{2}{1,41421569} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot (1,41421569 + 1,41421143) \approx \mathbf{1,41421356} \end{aligned}$$

Verbesserung 5

$$\begin{aligned}x_5 &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_4 + \frac{a}{x_4} \right) \\&= \frac{1}{2} \cdot \left(1,41421356 + \frac{2}{1,41421356} \right) \\&\approx \frac{1}{2} \cdot (1,41421356 + 1,41421356) \approx \mathbf{1,41421356}\end{aligned}$$

Der letzte Schritt hat zu keiner weiteren Verbesserung geführt. Der zuletzt berechnete Wert ist also die gesuchte Näherung:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

3.5.4 Herleitung durch Addition eines Korrekturwertes

Es sei x ein Näherungswert für $\sqrt{a}$, also:

$$x \cdot x \approx a$$

Indem wir zu x einen kleinen Korrekturwert h addieren, können wir die exakte Wurzel $x+h$ bekommen:

$$(x+h) \cdot (x+h) = a$$

Wir multiplizieren aus oder benutzen die erste binomische Formel:

$$x^2 + 2xh + h^2 = a$$

Da x als gute Näherung vorausgesetzt wird, ist der Kor-

rekturwert h klein und h^2 ist noch kleiner. Wenn beispielsweise $h = 0,01$, so ist $h^2 = h \cdot h = 0,0001$ noch wesentlich kleiner. Daher können wir h^2 vernachlässigen und weglassen (also praktisch als 0 betrachten). Es bleibt die Näherung

$$x^2 + 2xh \approx a$$

Wir lösen nach h auf und bekommen den Korrekturwert:

$$x^2 + 2xh \approx a$$

$$2xh \approx a - x^2$$

$$h \approx \frac{a - x^2}{2x}$$

Damit erhalten wir aus dem exakten Wert $x + h$ folgenden verbesserten Näherungswert für $\sqrt{a}$:

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{a - x^2}{2x} && | x \text{ auf den Nenner } 2x \text{ bringen} \\ &= \frac{2x^2}{2x} + \frac{a - x^2}{2x} \\ &= \frac{2x^2 + a - x^2}{2x} \\ &= \frac{x^2 + a}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + a}{x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{x} + \frac{a}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right) \end{aligned}$$

Also:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

Dies ist die in Abschnitt 3 bereits aufgestellte Verbesserungsformel.

3.5.5 Rechnen mit Zahlen nahe bei 1

Wir haben im Beispiel 2 aus Abschnitt 3 die Quadratwurzel aus 2 bis auf acht Nachkommastellen berechnet:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

Wir ziehen aus dem Ergebnis wieder die Wurzel, beispielsweise mit Hilfe des Heronverfahrens, und bekommen:

$$\sqrt{1,41421356} \approx 1,18920711$$

Wir wiederholen das Wurzelziehen mehrfach (was bei einer der Methoden zur Berechnung von Logarithmen angewendet wird; die Ergebnisse sind die Potenzen von 2 mit den Exponenten $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$, usw.):

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

$$\sqrt{1,41421356} \approx 1,18920711$$

$$\sqrt{1,18920711} \approx 1,09050773$$

$$\sqrt{1,09050773} \approx 1,04427378$$

$$\sqrt{1,04427378} \approx 1,02189715$$

$$\sqrt{1,02189715} \approx 1,01088929$$

$$\sqrt{1,01088929} \approx 1,00542990$$

$$\sqrt{1,00542990} \approx 1,00271127$$

Aus dieser Liste kann man zweierlei ablesen: Zahlen, die nahe bei 1 sind, tauchen in natürlicher Weise auf, und außerdem scheint die Regel zu gelten, dass beim Wurzelziehen die Zahl hinter dem Komma ungefähr halbiert wird.

Nun untersuchen wir diese nahe bei 1 liegenden Zahlen genauer.

Nahe bei 1 liegende Zahlen

Beispiele für Zahlen, die nahe bei 1 liegen, sind

$$1,02, \quad 1,003, \quad \text{und auch} \quad 0,98, \quad 0,997$$

Allgemein lassen sich alle diese Zahlen stets als

$$1 + h \quad (h \text{ klein})$$

schreiben. Die obigen Beispielzahlen können folgendermaßen geschrieben werden:

$$1,02 = 1 + 0,02 \quad (\text{hier ist } h = 0,02)$$

$$1,003 = 1 + 0,003 \quad (\text{hier ist } h = 0,003)$$

$$0,98 = 1 - 0,02 = 1 + (-0,02) \quad (\text{hier ist } h = -0,02)$$

$$0,997 = 1 - 0,003 = 1 + (-0,003) \quad (\text{hier ist } h = -0,003)$$

Man sieht, dass h sowohl positiv als auch negativ sein kann.

Das Produkt (betraglich) kleiner Zahlen ist in der Regel noch wesentlicher kleiner als die Ausgangszahlen:

$$0,02 \cdot 0,03 = 0,0006$$

$$0,003 \cdot 0,003 = 0,000009$$

$$0,0001 \cdot 0,0005 = 0,00000005$$

$$0,003 \cdot (-0,002) = -0,000006$$

Sind also h und k kleine Zahlen, so sind ihr Produkt hk und ihre Quadrate h^2, k^2 vergleichsweise noch wesentlich kleiner und daher oft zu vernachlässigen, das heißt als Null zu betrachten.

Das Rechnen mit nahe bei 1 liegenden Zahlen

Wir betrachten nun die vier Grundrechenarten, Potenzen und Quadratwurzeln von nahe bei 1 liegenden Zahlen.

Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion werden nicht vereinfacht, wenn die beteiligten Zahlen nahe bei 1 liegen. Außerdem sind Addieren und Subtrahieren nicht sonderlich aufwendig. Beispielsweise können die Rechnungen

$$1,003 + 1,004 = 2,007$$

$$1,004 - 1,003 = 0,001$$

müheles im Kopf durchgeführt werden.

Multiplikation

Nun multiplizieren wir zum Beispiel 1,003 mit 1,004.

Man kann dies schriftlich machen und bekommt:

$$\begin{aligned}1,003 \cdot 1,004 &= 1,007012 \\ &\approx 1,007\end{aligned}$$

Die Ziffer 7 ergibt sich einfach durch Addieren von 3 und 4.

Wir bestätigen dies durch Betrachten von zwei allgemeinen Zahlen, die nahe bei 1 liegen:

$$\begin{aligned}(1+h) \cdot (1+k) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot k + h \cdot 1 + h \cdot k \\ &= 1 + k + h + h \cdot k & (h \cdot k \approx 0) \\ &\approx 1 + k + h\end{aligned}$$

Damit haben wir die Näherungsformel

$$(1+h) \cdot (1+k) \approx 1 + k + h \quad (h, k \text{ klein})$$

bewiesen.

Division

Aus der Näherungsformel für die Multiplikation ergibt sich auch die entsprechende Formel für die Division, indem man beide Seiten einfach durch $1+k$ teilt:

$$\begin{aligned}(1+h) \cdot (1+k) &\approx 1 + k + h & | : (1+k) \\ 1+h &\approx \frac{1 + k + h}{1+k} \\ \frac{1 + k + h}{1+k} &\approx 1 + h\end{aligned}$$

Beim Dividieren durch $1+k$ wird also k subtrahiert. Wir

schreiben $k+h$ als $k+h=m$, dann ist $h=m-k$ und die Formel nimmt die folgende augenfälligere Gestalt an:

$$\frac{1+m}{1+k} \approx 1 + m-k \quad (m, k \text{ klein})$$

Die Probe bestätigt dieses Ergebnis, das, mit dem Teiler $1+k$ multipliziert, tatsächlich $1+m$ ergibt:

$$(1+m-k) \cdot (1+k) \approx 1 + m - k + k = 1 + m$$

Als Sonderfall ($m=0$) der Divisionsregel ergibt sich übrigens der Kehrwert:

$$\frac{1}{1+k} \approx 1-k \quad (k \text{ klein})$$

Diese Formel erlaubt es, ist Divisionen überschlagsmäßig zu berechnen:

$$\frac{a}{1+k} \approx a \cdot (1-k) \approx a - ak \quad (k \text{ klein})$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \frac{3}{1,02} &= \frac{3}{1+0,02} \\ &\approx 3(1-0,02) \\ &= 3 - 3 \cdot 0,02 \\ &= 3 - 0,06 \\ &= 2,94 \end{aligned}$$

Potenzen

Auch die Näherungsformel für Potenzen von Zahlen nahe bei 1 ergibt sich aus der entsprechenden Regel für die Multiplikation, wie man an folgenden Beispielen sehen kann:

$$(1+h)^2 \approx (1+h) \cdot (1+h) = 1+h+h = 1+2h$$

$$(1+h)^3 \approx (1+h)^2 \cdot (1+h) = 1+2h+h = 1+3h$$

$$(1+h)^4 \approx (1+h)^3 \cdot (1+h) = 1+3h+h = 1+4h$$

Man erkennt die Regelmäßigkeit, dass der Exponent als Faktor vor h rutscht:

$$(1+h)^n \approx 1 + n \cdot h \quad (h \text{ klein, } n \text{ nicht zu groß})$$

Beispiele:

$$1,03^2 = (1+0,03)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0,03 = 1,06$$

$$0,96^2 = (1-0,04)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0,04 = 0,92$$

Quadratwurzeln

Die Näherungsformel für die Quadratwurzel aus einer nahe bei 1 liegenden Zahl folgt ebenfalls aus der Formel für die Multiplikation:

$$(1+h) \cdot (1+h) \approx 1+2h \quad (h \text{ klein})$$

Nach Definition der Quadratwurzel bedeutet dies:

$$\sqrt{1+2h} \approx (1+h) \quad (h \text{ klein})$$

Schreiben wir nun k statt $2h$, so ist $h = \frac{k}{2}$ und die Formel nimmt folgende Gestalt an:

$$\sqrt{1+k} \approx \left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (k \text{ klein})$$

Beim Ziehen der Quadratwurzel muss man also lediglich k halbieren.

Beispiele:

$$\sqrt{1,06} = \sqrt{1+0,06} \approx 1 + \frac{0,06}{2} = 1,03$$

$$\sqrt{0,96} = \sqrt{1-0,04} \approx 1 - \frac{0,04}{2} = 1-0,02 = 0,98$$

Zum Abschluss des Abschnitts fassen wir die Ergebnisse in einer kleinen Tabelle zusammen:

Das Rechnen mit Zahlen nahe bei 1	
Multiplikation:	$(1+h) \cdot (1+k) \approx 1 + h+k$
Division:	$\frac{1+h}{1+k} \approx 1 + h-k$
Kehrwert:	$\frac{1}{1+k} \approx 1 - k$
Potenzen:	$(1+h)^n \approx 1 + n \cdot h$
Quadratwurzel:	$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$

3.5.6 Herleitung des Heronverfahrens durch Zahlen nahe 1

Zur Erläuterung der zugrundeliegenden Idee greifen wir wieder die Wurzel aus 20 auf.

Nun ist 20 weit von 1 entfernt. Man kann aber die benachbarte Quadratzahl 16 abspalten und dann taucht eine Zahl nahe bei 1 auf:

$$\begin{aligned}20 &= 16 \cdot \frac{20}{16} \\ &= 16 \cdot 1,25\end{aligned}$$

Jetzt kann man die Wurzel ziehen und beim rechten Faktor die Näherungsformel anwenden:

$$\begin{aligned}\sqrt{20} &= \sqrt{16 \cdot 1,25} \\ &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{1,25} \\ &= 4 \cdot \sqrt{1+0,25} \\ &\approx 4 \cdot \left(1 + \frac{0,25}{2}\right) \\ &= 4 \cdot 1,125 \\ &= 4,5\end{aligned}$$

Also

$$\sqrt{20} \approx 4,5$$

Um den Wert noch weiter zu verbessern, können wir den Vorgang wiederholen und spalten nun $4,5 \cdot 4,5 = 20,25$

von 20 ab:

$$\begin{aligned} 20 &= 20,25 \cdot \frac{20}{20,25} \\ &\approx 20,25 \cdot 0,987654 \end{aligned}$$

Wir ziehen wieder die Wurzel:

$$\begin{aligned} \sqrt{20} &\approx \sqrt{20,25 \cdot 0,987654} \\ &= \sqrt{20,25} \cdot \sqrt{0,987654} \\ &= 4,5 \cdot \sqrt{1 - 0,012346} \\ &\approx 4,5 \cdot \left(1 - \frac{0,012346}{2}\right) \\ &= 4,5 \cdot 0,993827 \\ &\approx 4,472222 \end{aligned}$$

Also

$$\sqrt{20} \approx 4,472222$$

Die zwei berechneten Näherungswerte 4,5 und 4,472222 sind oben auch beim Heron aufgetaucht. Dies lässt vermuten, dass das vorliegende Verfahren substantiell mit dem Heronverfahren übereinstimmt. Dies werden wir beweisen, indem wir unsere Berechnung allgemein, mit Buchstaben statt konkreter Zahlen durchführen:

Es sei x ein Näherungswert für $\sqrt{a}$, dann ist $x^2 \approx a$.
Wir spalten nun x^2 von a ab:

$$a = x^2 \cdot \frac{a}{x^2}$$

Wegen $x^2 \approx a$, ist $\frac{a}{x^2}$ nahe bei 1, also von der Gestalt

$$\frac{a}{x^2} = 1 + h \quad (h \text{ klein})$$

Wir lösen nach h auf:

$$h = \frac{a}{x^2} - 1$$

So kommen wir zu folgender Darstellung von $\frac{a}{x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x^2} &= 1 + h \\ &= 1 + \left(\frac{a}{x^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Daher haben wir folgende Zerlegung von a :

$$\begin{aligned} a &= x^2 \cdot \frac{a}{x^2} \\ a &= x^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{a}{x^2} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Wir ziehen die Wurzel:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a} &= \sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{a}{x^2} - 1\right)\right)} \\
 &= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{x^2} - 1\right)} \\
 &= x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{x^2} - 1\right)} \\
 &\approx x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x^2} - 1\right)\right) \\
 &= x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{x^2} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{a}{x \cdot x}\right) \\
 &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{a}{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right)
 \end{aligned}$$

Also erhalten wir den verbesserten Näherungswert:

$$\sqrt{a} \approx \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Dies stimmt überein mit der Verbesserungsformel des Heronverfahrens:

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Damit haben wir neben der geometrischen und zwei rechnerischen Herleitungen eine vierte Begründung kennengelernt.

Es sei abschließend bemerkt, dass das Heronverfahren ein Sonderfall des in der Differentialrechnung behandelten Newton-Verfahrens ist.

3.5.7 Quadratische Konvergenz des Heronverfahrens

Thema dieses Abschnitts ist die Effizienz des Heronverfahrens, die Frage, wie schnell es ein Ergebnis mit der gewünschten Genauigkeit liefert. Es wird sich zeigen, dass es *quadratisch konvergent* und damit ziemlich effizient ist.

Zur Untersuchung der Effizienz des Verfahrens vergleichen wir die Abweichung (Differenz)

$$x - \sqrt{a}$$

eines Näherungswertes $x \approx \sqrt{a}$ von dem tatsächlichen Wert $\sqrt{a}$ mit der entsprechenden Abweichung nach Anwendung der Verbesserungsformel:

$$y - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) - \sqrt{a}$$

Nun vereinfachen wir den Ausdruck. Dazu lösen wir die Klammer auf, bringen alles auf einen Nenner (nämlich $2x$) und wenden im Zähler die zweite binomische Formel an ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$):

$$\begin{aligned}
 y - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) - \sqrt{a} \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{a}{2x} - \sqrt{a} \\
 &= \frac{x^2}{2x} + \frac{a}{2x} - \frac{2x\sqrt{a}}{2x} \\
 &= \frac{x^2 - 2x\sqrt{a} + a}{2x} && | a = (\sqrt{a})^2 \\
 &= \frac{x^2 - 2x\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2}{2x} && | 2. \text{ bin. Formel} \\
 &= \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}
 \end{aligned}$$

Also ist die Abweichung des verbesserten Wertes:

$$y - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}$$

Aus dieser schönen Beziehung können folgende wichtige Schlussfolgerungen gezogen werden:

1. Nach Anwendung der Verbesserungsformel ist der Wert stets größer oder gleich der gesuchten Wurzel:

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \geq \sqrt{a}$$

2. Durch die Verbesserungsformel wird die Abweichung mindestens halbiert (wenn $x \geq \sqrt{a}$):

$$y - \sqrt{a} \leq \frac{x - \sqrt{a}}{2}$$

3. Im praktisch relevanten Bereich $a \geq 1$ sind ab dem zweiten Schritt (zweite Anwendung der Verbesserungsformel) auch die Näherungswerte ≥ 1 , und es gilt:

$$y - \sqrt{a} \leq \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2}$$

Das Quadrat in der Ungleichung im Punkt 3 bewirkt, dass die Abweichungen schnell abnehmen, und hat zum Ausdruck der *quadratischen* Konvergenz geführt. Die Einzelheiten dazu werden unten erläutert. Zunächst widmen wir uns den Beweisen der drei Schlussfolgerungen.

Beweis zu 1

Die Abweichung des verbesserten Wertes ist:

$$\begin{aligned} y - \sqrt{a} &= \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x} \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) - \sqrt{a} &= \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x} \geq 0 \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist ≥ 0 , da die Näherungswerte x positiv sind und Quadrate immer ≥ 0 sind. Also haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) - \sqrt{a} &\geq 0 && | + \sqrt{a} \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) &\geq \sqrt{a} \end{aligned}$$

Der verbesserte Näherungswert liegt daher stets oberhalb der gesuchten Wurzel.

Beweis zu 2

Die Abweichung des verbesserten Wertes ist:

$$y - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}$$

$$\underbrace{y - \sqrt{a}}_{\text{Abw. des verb. Wertes}} = \underbrace{\frac{x - \sqrt{a}}{2x}}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{(x - \sqrt{a})}_{\text{Abweichung des Näherungswertes}}$$

Wir zeigen nun, dass der Faktor $\leq \frac{1}{2}$ ist. Dazu formen wir die Ungleichung

$$\frac{x - \sqrt{a}}{2x} \leq \frac{1}{2}$$

in eine solche um, die als stets zutreffend erkannt werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{a}}{2x} &\leq \frac{1}{2} && | \cdot 2x \\ x - \sqrt{a} &\leq x && | - x \\ -\sqrt{a} &\leq 0 && | + \sqrt{a} \\ 0 &\leq \sqrt{a} \end{aligned}$$

Die Quadratwurzel ist nach Definition in der Tat stets positiv oder 0.

Beweis zu 3

Die Abweichung des verbesserten Wertes ist:

$$y - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}$$

Hier wird $x \geq 1$ vorausgesetzt. Daher wird der Bruch vergrößert, wenn wir im Nenner x durch den kleinstmöglichen Wert 1 ersetzen:

$$y - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x} \leq \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2 \cdot 1} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2}$$

Also tatsächlich

$$y - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2}$$

Damit sind alle Beweise geführt.

Erläuterungen zur quadratischen Konvergenz

Beim Heronverfahren nähern sich („konvergieren“) die Werte der gesuchten Wurzel in *quadratischer* Form, d. h. so, dass die Abweichung nach jedem Schritt höchstens das (halbe) Quadrat der vorigen Abweichung ist:

In Beispiel 2 des 3. Abschnitts von Kapitel 3.5 haben wir $\sqrt{2}$ bis auf 8 Nachkommastellen berechnet:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

Der zweite Verbesserungsschritt hatte das Ergebnis:

$$x_2 \approx 1,41666667$$

Zwei Nachkommastellen sind exakt. Die Abweichung hat also auch zwei Nullen nach dem Komma und ist

$$\begin{aligned}x_2 - \sqrt{2} &\approx 1,41666667 - 1,41421356 \\&= 0,00245311 \\&\approx 0,0025\end{aligned}$$

Der Abweichung im nächsten Schritt ist dann

$$\begin{aligned}x_3 - \sqrt{2} &\leq \frac{0,0025^2}{2} \\&= \frac{0,00000625}{2} \\&= 0,000003125\end{aligned}$$

Nach dem Komma stehen 5 Nullen, also werden auch mindestens fünf Nachkommastellen exakt sein. In der Tat ist

$$x_3 \approx 1,\underline{41421569}$$

mit der Abweichung

$$\begin{aligned}x_3 - \sqrt{2} &\approx 1,41421569 - 1,41421356 \\&= 0,00000213\end{aligned}$$

Man sieht, dass sich bei jedem Schritt die Anzahl der exakten Nachkommastellen etwa verdoppelt. Dies ist die praktische Bedeutung der quadratischen Konvergenz.

Noch ein abstrakteres Beispiel dazu:

Abweichung: 0,00005 (4 Nullen nach dem Komma)
Der **Näherungswert** hat also: 4 exakte Nachkommastellen.

Nach Anwendung der heronschen Verbesserung:

Abweichung:

$$\frac{0,00005^2}{2} = 0,00000000125 \quad (8 \text{ Nullen nach dem Komma})$$

Der **Näherungswert** hat also: 8 exakte Nachkommastellen.

3.5.8 Ein Verfahren ohne Divisionen

Das Heronverfahren hat beeindruckende Eigenschaften: Es ist einfach, gut verständlich und berechnet Quadratwurzeln sehr effizient (durch die quadratische Konvergenz bekommt man in wenigen Schritten Ergebnisse der gewünschten Genauigkeit).

Der einzige Mangel des Verfahrens ist das Auftauchen von Divisionen (Brüchen) bei der Verbesserungsformel:

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

Den Bruch $\frac{1}{2}$ kann man einfach durch 0,5 ersetzen. Es

bleibt aber immer noch der Bruch $\frac{a}{x}$:

$$y = 0,5 \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

Da die Division die bei weitem aufwendigste Grundrechenart ist, versucht man Verfahren mit möglichst wenigen Divisionen zu finden.

Wir werden das Heronverfahren nun so modifizieren, dass keine Divisionen mehr nötig sind.

Zwei Grundgedanken führen zum Ziel:

1. Die Wurzel aus dem Kehrwert $\frac{1}{a}$ berechnen.
2. Das Rechnen mit Zahlen nahe 1 nutzen, um die Division in der Heron-Formel loszuwerden.

Zu 1.

Der entscheidende Ansatz ist, nicht direkt die Wurzel aus a zu berechnen, sondern zunächst die Wurzel aus dem Kehrwert $\frac{1}{a}$. Hat man die Wurzel $\sqrt{\frac{1}{a}}$ berechnet, so muss man nur noch mit a *multiplizieren* und bekommt die eigentlich gesuchte $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot a = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot a = \frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

Zu 2.

Zur Berechnung der Wurzel aus $\frac{1}{a}$ liefert das Heronverfahren die Verbesserungsformel:

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\frac{1}{a}}{x} \right),$$

also einfach

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{ax} \right).$$

Hierbei ist x ein Näherungswert für die Wurzel aus $\frac{1}{a}$,
d. h.:

$$x \cdot x \approx \frac{1}{a}.$$

oder

$$axx \approx 1.$$

Nun erweitern wir den Bruch in der Verbesserungsformel mit x , damit axx im Nenner zu stehen kommt:

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{ax} \right).$$

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{axx} \right).$$

Wir schreiben axx in der Gestalt

$$axx = 1 + h.$$

Daher muss $h = axx - 1$ sein und somit ist:

$$axx = 1 + (axx - 1).$$

Der Kehrwert von axx ist also

$$\frac{1}{axx} = \frac{1}{1 + (axx - 1)} \approx 1 - (axx - 1) = 2 - axx.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in die Verbesserungsformel ein:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{axx} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(x + x \cdot \frac{1}{axx} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (x + x \cdot (2 - axx)) \\
 &= \frac{1}{2} (x + 2x - ax^3) \\
 &= \frac{1}{2} (3x - ax^3)
 \end{aligned}$$

Also:

$$y = \frac{1}{2} (3x - ax^3) .$$

Diese modifizierte Verbesserungsformel enthält keine Division mehr, denn wie gesagt kann der Bruch einfach durch 0,5 ersetzt werden.

Das gesamte divisionsfreie Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel ist in der Tabelle auf der folgenden Seite zusammengestellt.

Divisionsfreie Variante des Heronverfahrens
Gesucht: $\sqrt{a}$
1. Berechnung von $\sqrt{\frac{1}{a}}$: Aus einem Näherungswert x für $\sqrt{\frac{1}{a}}$ ergibt sich ein verbesserter Wert y durch: $y = \frac{1}{2}(3x - ax^3)$
2. Berechnung von $\sqrt{a}$: $\sqrt{a} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}$

Anmerkungen zur Effizienz des Verfahrens

1. Wie das ursprüngliche Heronverfahren ist auch das modifizierte Verfahren quadratisch konvergent. Konkret gilt hier für die Abweichung des verbesserten Wertes y :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - y = \left(\frac{a}{2}x + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - x \right)^2$$

Wie haben hier die Wurzel $\sqrt{\frac{1}{a}}$ in der augenfälligeren Form $\frac{1}{\sqrt{a}}$ geschrieben. Das Ergebnis bekommt man, wenn man

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - y = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2}(3x - ax^3)$$

zweimal durch $\frac{1}{\sqrt{a}} - x$ teilt (sog. *Polynomdivision*).

2. Wir betrachten a im praktisch relevanten Bereich von 1 bis 100. Mit dem Startwert $x = 0,1$ liefert das Verfahren stets Ergebnisse. Dies Wahl des Startwertes stellt sicher, dass er kleiner als $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ist (wie alle verbesserten Werte, s. u. Begründung zu 3, b)):

$$x = \frac{1}{10} = \frac{1}{\sqrt{100}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

3. Ist ein Näherungswert x höchstens $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und > 0 , so liegt der verbesserte Wert y zwischen x und $\frac{1}{\sqrt{a}}$:

$$x \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Begründung zu 3

a) Zu $x \leq y$

Wir formen die nachzuweisende Ungleichung so um, dass wir ihre Richtigkeit erkennen können:

$$x \leq y$$

$$x \leq \frac{1}{2}(3x - ax^3)$$

$$2x \leq 3x - ax^3$$

$$0 \leq x - ax^3$$

$$ax^3 \leq x \quad | : x \ (x > 0)$$

$$ax^2 \leq 1$$

$$x^2 \leq \frac{1}{a}$$

$$x \leq \sqrt{\frac{1}{a}} \quad (\text{trifft zu nach Voraussetzung})$$

b) Zu $y \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$

Dies folgt aus der Beziehung für die Abweichung des verbesserten Wertes und dem Umstand, dass sowohl x als auch alle Quadrate nichtnegativ sind:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - y = \underbrace{\left(\frac{a}{2}x + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - x\right)}_{\geq 0}^2 \geq 0$$

Also

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{a}} - y$$

$$y \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Beispielen, eines aus dem oberen Bereich (90) und eines aus dem unteren (2).

Beispiel 1

Berechne $\sqrt{90}$ mit einer Genauigkeit von fünf Nachkommastellen.

Lösung

1. Startwert: $x_0 = 0,1$

2. Verbesserungen (Iteration)

Wir benutzen die Verbesserungsformel $y = \frac{1}{2} \cdot (3x - ax^3)$.

Verbesserung 1

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (3x_0 - ax_0^3) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,1 - 90 \cdot 0,1^3) = \mathbf{0,105}$$

Verbesserung 2

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (3x_1 - ax_1^3) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,105 - 90 \cdot 0,105^3) \approx \mathbf{0,10541}$$

Verbesserung 3

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot (3x_2 - ax_2^3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,10541 - 90 \cdot 0,10541^3) \approx \mathbf{0,10541}$$

Der letzte Schritt hat zu keiner weiteren Verbesserung geführt. Der zuletzt berechnete Wert ist also die gesuchte Näherung:

$$\sqrt{\frac{1}{90}} \approx 0,10541$$

3. Multiplikation mit $a = 90$

$$\begin{aligned}\sqrt{90} &= 90 \cdot \sqrt{\frac{1}{90}} \\ &\approx 90 \cdot 0,10541 \\ &= 9,4869\end{aligned}$$

Also:

$$\sqrt{90} \approx 9,4869$$

Wir haben alle *Rechnungen* mit fünf Nachkommastellen durchgeführt. Das *Endergebnis* hat (durch die Multiplikation mit der relativ großen Zahl 90) nur 4 Nachkommastellen. Die letzte Ziffer ist übrigens um 1 zu groß. Möchte man ein genaueres *Endergebnis*, muss man die Rechnungen mit mehr Nachkommastellen durchführen.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt{2}$ mit einer Genauigkeit von fünf Nachkommastellen.

Lösung

1. Startwert: $x_0 = 0,1$

2. Verbesserungen (Iteration)

Wir benutzen die Verbesserungsformel $y = \frac{1}{2} \cdot (3x - ax^3)$.

Verbesserung 1

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (3x_0 - ax_0^3) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,1^3) = \mathbf{0,149}$$

Verbesserung 2

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (3x_1 - ax_1^3) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,149 - 2 \cdot 0,149^3) \approx \mathbf{0,22019}$$

Verbesserung 3

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2} \cdot (3x_2 - ax_2^3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,22019 - 2 \cdot 0,22019^3) \approx \mathbf{0,31961} \end{aligned}$$

Verbesserung 4

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{2} \cdot (3x_3 - ax_3^3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,31961 - 2 \cdot 0,31961^3) \approx \mathbf{0,44677} \end{aligned}$$

Verbesserung 5

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{1}{2} \cdot (3x_4 - ax_4^3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,44677 - 2 \cdot 0,44677^3) \approx \mathbf{0,58098} \end{aligned}$$

Verbesserung 6

$$\begin{aligned}x_6 &= \frac{1}{2} \cdot (3x_5 - ax_5^3) \\&= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,58098 - 2 \cdot 0,58098^3) \approx \mathbf{0,67537}\end{aligned}$$

Verbesserung 7

$$\begin{aligned}x_7 &= \frac{1}{2} \cdot (3x_6 - ax_6^3) \\&= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,67537 - 2 \cdot 0,67537^3) \approx \mathbf{0,70500}\end{aligned}$$

Verbesserung 8

$$\begin{aligned}x_8 &= \frac{1}{2} \cdot (3x_7 - ax_7^3) \\&= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,70500 - 2 \cdot 0,70500^3) \approx \mathbf{0,70710}\end{aligned}$$

Verbesserung 9

$$\begin{aligned}x_9 &= \frac{1}{2} \cdot (3x_8 - ax_8^3) \\&= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,70710 - 2 \cdot 0,70710^3) \approx \mathbf{0,70711}\end{aligned}$$

Verbesserung 10

$$\begin{aligned}x_{10} &= \frac{1}{2} \cdot (3x_9 - ax_9^3) \\&= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,70711 - 2 \cdot 0,70711^3) \approx \mathbf{0,70711}\end{aligned}$$

Der letzte Schritt hat zu keiner weiteren Verbesserung geführt. Der zuletzt berechnete Wert ist also die gesuchte Näherung:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,70711$$

3. Multiplikation mit $a = 2$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &\approx 2 \cdot 0,70711 \\ &= 1,41422\end{aligned}$$

Also:

$$\sqrt{2} \approx 1,41422$$

Das Verfahren hat 10 Schritte benötigt. Eine geschicktere Wahl des Startwertes hätte den Aufwand reduziert. Da

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5} \geq 0,7$ (denn $0,7 \cdot 0,7 = 0,49$), hätte man 0,7 als Startwert nehmen können. Dann wären nur drei Schritte nötig gewesen.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 3.1

1. Wie lang ist die Diagonale eines 8 cm langen und 4 cm breiten Rechtecks?
2. Die Breite eines Rechtecks beträgt 5 cm und die Länge 12 cm. Was misst die Diagonale?
3. Wie lang ist die Diagonale eines Rechtecks, das 8 cm breit und 15 cm lang ist?

Aufgaben zu Kapitel 3.2

1. Finde die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen:
a) 1 b) 4 c) 36 d) 64 e) 81 f) 100 g) 10.000
2. Finde die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen:
a) 225 b) 1089
3. Finde die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen:
a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{16}{81}$ d) $\frac{9}{100}$
4. Finde die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen:
a) 0,16 b) 0,49 c) 0,09 d) 0,04
5. Finde die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen:
a) 2^4 b) 3^8 c) 5^6 d) 10^{10}

Aufgaben zu Kapitel 3.3

1. Berechne $\sqrt{36} + \sqrt{64}$ und $\sqrt{36+64}$.
2. Berechne:
 a) $\sqrt{4 \cdot 9}$ b) $\sqrt{25 \cdot 49}$ c) $\sqrt{36 \cdot 81}$ d) $\sqrt{b \cdot b}$
 e) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 16}$ f) $\sqrt{1.000.000}$
3. Vereinfache:
 a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{28}$ d) $\sqrt{a^3}$ e) $\sqrt{c^5}$
4. Berechne, vereinfache, bzw. mache rational:
 a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ b) $\sqrt{\frac{49}{36}}$ c) $\sqrt{\frac{25}{7}}$ d) $\sqrt{0,16}$ e) $\sqrt{0,09}$
 f) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ e) $\sqrt{0,9}$
5. Finde bzw. vereinfache:
 a) $\sqrt{a^4}$ b) $\sqrt{a^2}$ c) $\sqrt{5^4}$ d) $\sqrt{1,4 \cdot 10^6}$ e) $\sqrt{8,3 \cdot 10^{-4}}$

Aufgaben zu Kapitel 3.4

1. Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren:
 a) 10 b) 18 c) 22 d) 24 e) 60 f) 3630
2. Beweise, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.
3. Prüfe, ob die folgenden Wurzeln irrational sind:
 a) $\sqrt{\frac{6}{8}}$ b) $\sqrt{\frac{7}{64}}$ c) $\sqrt{\frac{18}{72}}$ d) $\sqrt{\frac{81}{80}}$ e) $\sqrt{\frac{64}{121}}$ f) $\sqrt{\frac{10}{1}}$

Aufgaben zu Kapitel 3.5

1. Berechne mit vier Nachkommastellen:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{70}$ mit den Startwerten 1 und 8.

2. Berechne näherungsweise mithilfe der Regeln für Zahlen nahe bei 1:

a) $\sqrt{1,08}$ b) $\sqrt{0,92}$ c) $\sqrt{1,002}$ d) $\sqrt{0,992}$

e) $\frac{1}{1,003}$ f) $\frac{1}{0,995}$

3. Berechne mit vier Nachkommastellen mittels der divisionsfreien Variante des Heronverfahrens:

a) $\sqrt{80}$ mit dem Startwert 0,1.

b) $\sqrt{5}$ mit den Startwerten 0,1 und 0,4.

4. Vereinfache und berechne $\sqrt{1,5 \cdot 10^3}$ mit fünf Dezimalstellen.

5. Eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Masse m (Ruhemasse m_0) hat nach Albert Einstein (1879-1955) eine Energie von $E = mc^2$, oder ausführlicher:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2.$$

Im klassischen Fall ist v wesentlich kleiner als die Licht-

geschwindigkeit c . Berechne die Näherung von E für diesen Fall mithilfe der Regeln für Zahlen nahe bei 1

.

4. Höhere Wurzeln

Die im letzten Kapitel ausgiebig behandelten Quadratwurzeln haben viele Gemeinsamkeiten mit den höheren Wurzeln. Daher können wir uns hier kürzer fassen und wiederholen gewissermaßen die bekannten Ideen, die allenfalls etwas angepasst werden müssen. Der Schwerpunkt liegt bei den zwei neuen Aspekten:

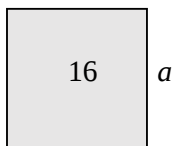
- Die Kubikwurzel kann auch aus **negativen** Zahlen gezogen werden. Dies gilt für alle Wurzeln ungerader Ordnung.
- Bei den **Wurzelregeln** tauchen zusätzlich solche auf, die die Beziehung zwischen den Wurzeln **verschiedener Ordnung** klären

Die Quadratwurzel ist der typische Vertreter für alle Wurzeln gerader Ordnung. Hingegen ist die **Kubikwurzel** der Prototyp einer Wurzel **ungerader** Ordnung. Daher werden wir mit den Kubikwurzeln beginnen

Es sei hier schon angemerkt, dass die praktische Berechnung von Wurzeln höherer Ordnung am effizientesten mittels Logarithmen durchgeführt wird, was im 7. Kapitel gezeigt wird.

4.1 Kubikwurzeln

Die Quadratwurzel hat ihren Ursprung in der Berechnung der Seitenlänge a eines Quadrates aus dem gegebenen Flächeninhalt $A = a \cdot a$, zum Beispiel 16:



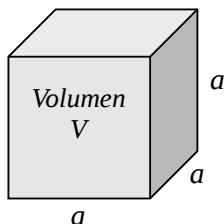
$$a = \sqrt{16} = 4$$

Möchte man nun die Seitenlänge eines Würfels (lateinisch cubus, griechisch kubos) aus seinem Volumen berechnen, so kommt man zur *Kubikwurzel*:

Bei einem Würfel sind alle Kanten gleich lang. Das Volumen V eines Würfels mit der Kantenlänge a berechnet sich durch:

$$V = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe}$$

$$V = a \cdot a \cdot a$$



Hat der Würfel zum Beispiel ein Volumen von $V = 8$, und man möchte die Kantenlänge berechnen, so ist also eine Zahl a zu finden, die zweifach mit sich multipliziert 8 ergibt:

$$a \cdot a \cdot a = 8$$

$$? \cdot ? \cdot ? = 8$$

Eine solche Zahl wird als *Kubikwurzel* oder auch als *dritte Wurzel* aus 8 bezeichnet und als

$$\sqrt[3]{8}$$

geschrieben. Diese Art, die Ordnung der Wurzel in das Wurzelzeichen zu schreiben, geht auf den Franzosen Albert Girard (1595-1632) zurück.

Die Ordnung der Wurzel entspricht der Anzahl der Faktoren (also dem Exponenten bei Potenzschreibweise) in der Ausgangsproblematik:

$$? \cdot ? \cdot ? = 8$$

$$a \cdot a \cdot a = 8$$

$$a^3 = 8$$

Übrigens kann man auch dem Quadratwurzelzeichen die Ordnung hinzufügen:

$$\sqrt[2]{} = \sqrt{}$$

Bevor wir zur allgemeinen Definition der Kubikwurzel kommen, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1

Finde $\sqrt[3]{8}$, die Kubikwurzel aus 8.

Lösung

Es ist eine Zahl zu finden, deren dritte Potenz 8 ergibt:

$$x^3 = 8$$

$$x \cdot x \cdot x = 8$$

$$? \cdot ? \cdot ? = 8$$

Nun errät man schnell, dass 2 die Bedingung erfüllt:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Also:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Beispiel 2

Finde $\sqrt[3]{64}$, die Kubikwurzel aus 64.

Lösung

Es ist eine Zahl zu finden, deren dritte Potenz 64 ergibt:

$$x^3 = 64$$

$$x \cdot x \cdot x = 64$$

$$? \cdot ? \cdot ? = 64$$

Ein Prüfen der natürlichen Kandidaten 1, 2, 3, 4, 5, usw. zeigt, dass 4 das Geforderte leistet:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$$

Also:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Beispiel 3 (negative Zahl)

Finde $\sqrt[3]{-8}$, die Kubikwurzel aus -8 .

Lösung

Es ist eine Zahl zu finden, deren dritte Potenz -8 ergibt:

$$x^3 = -8$$

$$x \cdot x \cdot x = -8$$

$$? \cdot ? \cdot ? = -8$$

Im Hinblick auf Beispiel 1 und das nun hinzukommende Minuszeichen prüfen wir -2 :

$$\begin{aligned} (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) &= 4 \cdot (-2) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Also:

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Beispiel 4 (0 und 1)

Finde $\sqrt[3]{0}$ und $\sqrt[3]{1}$.

Lösung

Zu $\sqrt[3]{0}$

Es ist eine Zahl zu finden, deren dritte Potenz 0 ergibt:

$$? \cdot ? \cdot ? = 0$$

Nun errät man schnell, dass 0 die Bedingung erfüllt:

$$0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Also:

$$\sqrt[3]{0} = 0$$

Zu $\sqrt[3]{1}$

Es ist eine Zahl zu finden, deren dritte Potenz 1 ergibt:

$$? \cdot ? \cdot ? = 1$$

Nun errät man schnell, dass 1 die Bedingung erfüllt:

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Also:

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

Die Beispiele und Erläuterung münden in der folgenden allgemeinen Definition der Kubikwurzel.

Definition der Kubikwurzel

Wir betrachten eine beliebige Zahl a . Die *Kubikwurzel* oder *dritte Wurzel* aus a , geschrieben als $\sqrt[3]{a}$, ist die Zahl, deren dritte Potenz a ergibt:

$$? \cdot ? \cdot ? = a$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

Bezeichnungen

Was zu den Quadratwurzeln gesagt wurde, gilt auch für Kubikwurzeln: Die Zahl aus der die Wurzel gezogen wird, bezeichnet man als *Radikand*, die Wurzel selber auch als *Radikal*. Das Verb *radizieren* bedeutet *Wurzel ziehen*. Alles geht auf *radix* zurück.

Beispiel 5

Was ist die Kubikwurzel aus 125?

Lösung

Man muss eine Zahl finden, deren dritte Potenz 125 ist:

$$? \cdot ? \cdot ? = 125$$

Durch Probieren findet man 5 als geeignete Zahl:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 5 \cdot 5 &= 25 \cdot 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[3]{125} = 5$.

Beispiel 6 (zusammengesetzte Zahl)

Was ist die Kubikwurzel aus $27 \cdot 64$?

Lösung

1. Zerlegung

Wir wissen bereits, dass $\sqrt[3]{27} = 3$ und $\sqrt[3]{64} = 4$.

Daher haben wir die Zerlegungen

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ und } 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Nun kann man $27 \cdot 64$ zerlegen:

$$27 \cdot 64 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

2. Wurzel

In der Zerlegung $27 \cdot 64 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ tauchen alle Faktoren dreimal auf; im Hinblick auf die Kubikwurzel schreiben wir

$$\begin{aligned} 27 \cdot 64 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= \underline{3 \cdot 4} \cdot \underline{3 \cdot 4} \cdot \underline{3 \cdot 4} \end{aligned}$$

Man kann daraus ablesen, dass $3 \cdot 4$ die Kubikwurzel aus $27 \cdot 64$ ist:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27 \cdot 64} &= 3 \cdot 4 \\ \sqrt[3]{27 \cdot 64} &= 12 \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Kubikwurzel gefunden.

Die Berechnung der Kubikwurzel in diesem Beispiel beruht im Wesentlichen darauf, dass die Kubikwurzeln von 27 und 64 bereits bekannt sind.

Beispiel 7 (Bruch)

Finde die Kubikwurzel aus $\frac{8}{125}$.

Lösung

Man muss eine Zahl finden, deren dritte Potenz $\frac{8}{125}$ ist:

$$? \cdot ? \cdot ? = \frac{8}{125}$$

Die Kubikwurzeln aus Zähler und Nenner sind bekannt (2 bzw. 5) und liefern:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$$

Brüche werden multipliziert, indem man jeweils ihre Zähler und Nenner multipliziert. Also steht auf der linken Seite das Produkt dreier Brüche:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$$

Die Wurzel aus $\frac{8}{125}$ ist daher $\frac{2}{5}$, kurz: $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$.

Im anschließenden Beispiel betrachten wir die Wurzel aus einem Dezimalbruch.

Beispiel 8 (Dezimalbruch)

Finde die Kubikwurzel aus 0,125.

Lösung

Man muss eine Zahl finden, die zweifach mit sich selbst multipliziert 0,125 ergibt:

$$? \cdot ? \cdot ? = 0,125$$

Wir schreiben 0,125 als Bruch:

$$0,125 = \frac{125}{1000}.$$

Da wir die Kubikwurzel aus 125 kennen (5) und bekanntlich $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$, haben wir:

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{125}{1000}.$$

Also ist

$$\sqrt[3]{0,125} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Beispiel 9 (Potenz)

Bestimme $\sqrt[3]{4^6}$.

Lösung

Man muss eine Zahl finden, deren dritte Potenz 4^6 ist:

$$? \cdot ? \cdot ? = 4^6$$

Nun schlüsseln wir die Potenz auf und gruppieren die Faktoren so, dass wir *drei* Blöcke bekommen:

$$4^6 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6\text{-mal}}$$

$$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Die gesuchte Wurzel ist also:

$$\sqrt[3]{4^6} = 4 \cdot 4$$

$$\sqrt[3]{4^6} = 16$$

Man kann auch die Potenzregeln nutzen, um die Berechnung kürzer zu fassen:

$$\begin{aligned}4^6 &= 4^{2+2+2} = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \\ \sqrt[3]{4^6} &= 4^2 \\ \sqrt[3]{4^6} &= 16\end{aligned}$$

An diesem Beispiel 9 kann man erkennen, dass das Kubikwurzelziehen aus einer Potenz den Exponenten offenbar *drittelt*.

4.2 Regeln für Kubikwurzeln

Das Beispiel 6 des vorigen Abschnitts zeigt, dass man die Kubikwurzel aus einem Produkt bestimmen kann, wenn man die Kubikwurzel aus den Faktoren kennt. Das gleiche gilt auch für die Kubikwurzel aus einem Quotienten (Bruch), die man auf die Kubikwurzeln aus Zähler und Nenner zurückführen kann (Beispiel 7). Die Kubikwurzel aus einer Potenz ist noch einfacher zu finden: Man drittelt einfach den Exponenten der Potenz, wie man in Beispiel 9 sehen kann.

Wie bei den Quadratwurzeln werden wir auch bei den Kubikwurzeln drei Regeln allgemein formulieren, beweisen und mit Beispielen erläutern. Sie stehen im Zusammenhang mit der Multiplikation, Division und Potenzierung und lösen folgende Aufgaben:

1. Gegeben: $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}$. Gesucht: $\sqrt[3]{ab}$
2. Gegeben: $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}$. Gesucht: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
3. Gegeben: a^n . Gesucht: $\sqrt[3]{a^n}$

Regel 1: Kubikwurzel aus einem Produkt

Man zieht die Kubikwurzel aus einem Produkt, indem man aus jedem Faktor die Kubikwurzel zieht:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Hierbei sind a und b beliebige Zahlen.

Beweis:

Um $\sqrt[3]{ab}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, die zweifach mit sich selbst multipliziert ab ergibt:

$$ab = ? \cdot ? \cdot ?$$

Nun drücken wir a und b mithilfe der als bekannt gedachten Kubikwurzeln $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[3]{b}$ aus:

$$a = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$$

$$b = \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Wir setzen dies in ab ein und ordnen neu:

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \\ &= \underline{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}} \cdot \underline{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}} \cdot \underline{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}} \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ die Kubikwurzel aus ab , d. h.
 $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

Anmerkung

Die Regel gilt auch für mehrere Faktoren, wie man durch mehrfache Anwendung der Regel für zwei Faktoren sieht:

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{ab \cdot c} = \sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c}.$$

Beispiel 1

Berechne $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8 \cdot 27} &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = 6$.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a}$, anders gesagt $\sqrt[3]{a^3}$.

Lösung 1 (nach Definition)

Es ist eine Zahl zu finden, deren dritte Potenz $a \cdot a \cdot a$ ergibt. Diese Zahl steht schon da: sie ist einfach a . Also ist $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a} = a$.

Lösung 2 (Regel)

Wir benutzen die Regel und anschließend die Definitionsgleichung $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a} &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \\ &= a\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a} = a$.

Beispiele 3

Betrachte die Kubikwurzeln aus 1000, 10.000, 1.000.000

Lösung

$$\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10$$

$$\sqrt[3]{10.000} = \sqrt[3]{1000 \cdot 10} = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{10} = 10 \cdot \sqrt[3]{10}$$

$$\sqrt[3]{1.000.000} = \sqrt[3]{100 \cdot 100 \cdot 100} = 100$$

Beispiel 4

Wir vereinfachen $\sqrt[3]{54}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54} &= \sqrt[3]{2 \cdot 27} \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{27} \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot 3 \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[3]{54} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

Damit haben wir $\sqrt[3]{54}$ zurückgeführt auf die Kubikwurzel aus 2, wobei 2 deutlich kleiner als 54 ist.

Regel 2: Kubikwurzel aus einem Bruch

Man zieht die Kubikwurzel aus einem Bruch, indem man aus Zähler und Nenner die Kubikwurzel zieht:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Hierbei sind a und b beliebige Zahlen.

Beweis:

Um $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, die zweifach mit sich selbst multipliziert $\frac{a}{b}$ ergibt:

$$\frac{a}{b} = ? \cdot ? \cdot ?$$

Nun drücken wir a und b mithilfe der als bekannt gedachten Kubikwurzeln $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[3]{b}$ aus:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \\ b &= \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \end{aligned}$$

Wir setzen dies in $\frac{a}{b}$ ein und schreiben das Ergebnis als Produkt dreier Brüche:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}} \\ \frac{a}{b} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \end{aligned}$$

Also ist $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ die Kubikwurzel aus $\frac{a}{b}$, d. h. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$.

Lösung

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$$

Also ist $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$.

Beispiel 2 (Dezimalbruch)

Berechne $\sqrt[3]{0,008}$.

Lösung

Wir wandeln 0,008 in einen Bruch um und ziehen dann die Kubikwurzel:

$$\sqrt[3]{0,008} = \sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Also ist $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$.

Im folgenden Beispiel wird das *Rationalmachen* des Nenners vorgeführt. Dabei wird der Bruch so erweitert, dass die Kubikwurzel aus dem Nenner verschwindet.

Beispiel 3 (Rationalmachen)

Berechne $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad | \text{ mit } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \text{ erweitern} \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\end{aligned}$$

Also ist

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Regel 3: Kubikwurzel aus einer Potenz

Man zieht die Kubikwurzel aus einer Potenz, indem man den Exponenten drittelt:

$$\sqrt[3]{a^n} = a^{n/3}$$

Hierbei ist a eine beliebige Zahl und n eine durch 3 teilbare ganze Zahl (da wir bislang nur Potenzen mit ganzzahligen Exponenten definiert haben und somit $n/3$ ganzzahlig sein sollte).

Beweis:

Um $\sqrt[3]{a^n}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert a^n ergibt:

$$a^n = ? \cdot ? \cdot ?$$

Da n durch 3 teilbar ist, können wir es als $n = 3k$ schreiben, wobei $k = n/3$ ein Drittel von n ist. Somit

$$\begin{aligned} a^n &= a^{3k} \\ &= a^{k+k+k} \\ &= a^k \cdot a^k \cdot a^k \quad (\text{Potenzregeln}) \end{aligned}$$

Wir haben also a^n in drei gleiche Faktoren zerlegt:

$$a^n = a^k \cdot a^k \cdot a^k$$

Folglich

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^n} &= a^k \\ \sqrt[3]{a^n} &= a^{n/3} \end{aligned}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt[3]{a^6}$.

Lösung

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^6} &= a^{6/3} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[3]{a^6} = a^2$.

Beispiel 2Berechne $\sqrt[3]{2^{15}}$.**Lösung**

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{2^{15}} &= 2^{15/3} \\
 &= 2^5 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[3]{2^{15}} = 32$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts fassen wir die drei betrachteten Wurzelregeln zusammen. Sie handeln von der Verbindung der Kubikwurzel zu anderen Rechenarten, nämlich Multiplikation, Division und Potenzen. Addition und Subtraktion haben keine einfache Beziehung zur Kubikwurzel und kommen deswegen hier nicht vor.

Kubikwurzelregeln
$ \begin{aligned} 1. \quad \sqrt[3]{ab} &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \\ 2. \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0) \\ 3. \quad \sqrt[3]{a^n} &= a^{n/3} \end{aligned} $
Hierbei sind a und b beliebige Zahlen, n eine durch 3 teilbare ganze Zahl.

4.3 Kubikwurzeln sind meist keine Brüche

Die bei den Quadratwurzeln angestellten Überlegungen sind auf die Kubikwurzeln übertragbar. Das wird bereits im einfachen Fall einer Primzahl oder ihrem Quadrat klar (1. Abschnitt). Im 2. Abschnitt betrachten wir Kubikwurzeln aus Brüchen.

4.3.1 Irrationalität der Kubikwurzel aus einer Primzahl

Es sei p eine Primzahl. Wir untersuchen, was es bedeuten würde, wenn $\sqrt[3]{p}$ ein Bruch wäre, etwa $\frac{a}{b}$ mit natürlichen Zahlen a und $b \neq 0$.

Nach Definition der Wurzel müsste gelten:

$$p = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Wir multiplizieren die Brüche, anschließend multiplizieren wir beide Seiten mit dem Nenner, um den Bruch loszuwerden:

$$p = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$$p = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} \quad | \cdot b \cdot b \cdot b$$

$$p \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot a \cdot a$$

Nun richten wir unser Augenmerk darauf, wie oft der Primfaktor p auf jeder Seite auftaucht. In a komme der Faktor p m -mal vor, und in b n -mal. Dann haben wir folgende Situation:

$$\underbrace{p \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b}_{\substack{n\text{-mal} \\ 3n\text{-mal}}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b}_{\substack{n\text{-mal} \\ 3n\text{-mal}}}}_{(3n+1)\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\substack{m\text{-mal} \\ 3m\text{-mal}}}$$

Der Faktor p taucht auf der linken Seite $(3n+1)$ -mal auf und auf der rechten Seite $3m$ -mal. Da $3n+1$ *nicht* durch 3 teilbar ist (der Rest ist 1) ist und $3m$ durch 3 *teilbar* ist, können $3n+1$ und $3m$ nicht gleich sein, weswegen auch die beiden Seiten nicht gleich sein können. Somit ist es ausgeschlossen, dass jemals

$$p = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Daher muss also $\sqrt[3]{p}$ irrational sein.

Also kann auch $\sqrt[3]{p}$ niemals ein endlicher Dezimalbruch sein. Die Kubikwurzel aus p zu *berechnen* meint also die Berechnung eines *Näherungswertes*.

Das Gesagte lässt sich auch auf die Kubikwurzel aus p^2 übertragen. Wenn wieder $\sqrt[3]{p^2} = \frac{a}{b}$ wäre, hätte man:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \\ p^2 &= \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} & | \cdot b \cdot b \cdot b \\ p^2 \cdot b \cdot b \cdot b &= a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

Nun schauen wir, wie oft der Primfaktor p auf jeder Seite auftaucht. In a komme der Faktor p m -mal vor, und in b n -mal. Dann haben wir folgende Situation:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \underbrace{b \cdot \underbrace{b \cdot b}_{n\text{-mal}}}_{n\text{-mal}}}_{\underbrace{3n\text{-mal}}_{(3n+2)\text{-mal}}} = \underbrace{a \cdot \underbrace{a \cdot a}_{m\text{-mal}}}_{3m\text{-mal}}$$

Der Faktor p taucht auf der linken Seite $(3n+2)$ -mal auf und auf der rechten Seite $3m$ -mal. Da $3n+2$ *nicht* durch 3 teilbar ist (der Rest ist 2) und $3m$ durch 3 *teilbar* ist, können $3n+2$ und $3m$ nicht gleich sein, weswegen auch die beiden Seiten nicht gleich sein können. Somit ist es ausgeschlossen, dass jemals

$$p^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Daher muss also $\sqrt[3]{p^2}$ irrational sein.

4.3.2 Die Kubikwurzeln aus Brüchen

Die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen werden *Kubikzahlen* genannt. Konkret sind dies folgende Zahlen:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$3^3 = 27$$

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125$$

$$6^3 = 216$$

$$7^3 = 343$$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$10^3 = 1000$$

usw.

Die Anzahl mit der jeder Primfaktor in einer Kubikzahl vorkommt ist stets durch 3 teilbar, also ein Vielfaches von 3. Denn wenn in einer natürlichen Zahl a der Primfaktor p n -mal vorkommt, kommt er in $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $3n$ -mal vor:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\substack{n\text{-mal} \quad n\text{-mal} \quad n\text{-mal} \\ 3n\text{-mal}}}$$

Ist eine Zahl keine Kubikzahl, so muss sie einen Primfaktor besitzen, dessen Anzahl *kein* Vielfaches von 3, d. h. nicht durch 3 teilbar ist. Beim Dividieren dieser Anzahl durch 3 kann es also nur die Reste 1 und 2 geben, die Anzahl muss also von der Gestalt $3m+1$ oder $3m+2$ sein.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ein Irrationalitätskriterium für die Kubikwurzel aus einem Bruch formulieren und beweisen:

Irrationalitätskriterium für die Kubikwurzel aus einem Bruch

Für die Kubikwurzel $\sqrt[3]{\frac{Z}{N}}$ aus dem gekürzten Bruch $\frac{Z}{N}$ gibt es nur zwei Möglichkeiten:

1. Zähler Z und Nenner N sind beide Kubikzahlen.
Dann ist:

$$\sqrt[3]{\frac{Z}{N}} = \frac{\sqrt[3]{Z}}{\sqrt[3]{N}} \quad \text{ein Bruch,}$$

also rational.

2. Von den Zahlen Z und N ist mindestens eine keine Kubikzahl. Dann ist

$$\sqrt[3]{\frac{Z}{N}} \quad \text{irrational.}$$

Beweis des Kriteriums

1. Wenn Z und N beide Kubikzahlen sind, sind Ihre Kubikwurzeln $\sqrt[3]{Z}$ und $\sqrt[3]{N}$ natürliche Zahlen, und

$$\sqrt[3]{\frac{Z}{N}} = \frac{\sqrt[3]{Z}}{\sqrt[3]{N}}$$

Ist tatsächlich ein Bruch im herkömmlichen Sinne.

2. Wenn die Bedingung von Punkt 1 nicht erfüllt ist, so muss von den Zahlen Z und N mindestens eine keine Kubikzahl sein. Wir betrachten den Fall, dass Z keine Kubikzahl ist. (Der Fall, dass N keine Kubikzahl ist, verläuft vollkommen analog.) Da die Zahl Z keine Kubikzahl ist, enthält sie einen Primfaktor p , dessen Anzahl von der Gestalt $3k+1$ oder $3k+2$ ist.

Nun fahren wir wie gehabt fort. Wäre

$$\sqrt[3]{\frac{Z}{N}} = \frac{a}{b},$$

so hätten wir

$$\begin{aligned}\frac{Z}{N} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \\ \frac{Z}{N} &= \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} & | \cdot b \cdot b \cdot b \\ \frac{Z}{N} \cdot b \cdot b \cdot b &= a \cdot a \cdot a & | \cdot N \\ Z \cdot b \cdot b \cdot b &= N \cdot a \cdot a \cdot a\end{aligned}$$

Nun schauen wir wieder, wie oft der Primfaktor auf beiden Seiten vorkommt. In a komme der Faktor p m -mal vor, und in b n -mal. Dann haben wir folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \cdot & b & \cdot & b & \cdot & b & = & N & \cdot & a & \cdot & a & \cdot & a \\ \underbrace{(3k+1)\text{-mal}}_{\text{oder}} & & \underbrace{n\text{-mal}} & & \underbrace{n\text{-mal}} & & \underbrace{n\text{-mal}} & & \text{keinmal} & & \underbrace{m\text{-mal}} & & \underbrace{m\text{-mal}} & & \underbrace{m\text{-mal}} \\ \underbrace{(3k+2)\text{-mal}} & & \underbrace{\quad\quad\quad}_{3n\text{-mal}} & & & & & & \underbrace{\quad\quad\quad}_{3m\text{-mal}} & & \underbrace{\quad\quad\quad}_{3m\text{-mal}} & & & & \\ & & \underbrace{(3(k+n)+1)\text{-mal}}_{\text{oder}} & & & & & & \underbrace{\quad\quad\quad}_{3m\text{-mal}} & & & & & & \\ & & \underbrace{(3(k+n)+2)\text{-mal}} & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Die Anzahl des Faktors p auf der linken Seite ist nicht durch 3 teilbar, auf der rechten Seite ist sie aber durch 3 teilbar. Deswegen können die beiden Seiten nicht gleich sein. Somit ist es ausgeschlossen, dass jemals

$$\sqrt[3]{\frac{Z}{N}} = \frac{a}{b}.$$

Also ist

$$\sqrt[3]{\frac{Z}{N}} \text{ irrational.}$$

Wir schließen mit zwei Beispielen.

Beispiel 1 (irrationale Wurzel)

Untersuche $\sqrt[3]{\frac{11}{300}}$

Lösung

Da 11 eine Primzahl ist und 300 nicht durch 11 teilbar ist, ist der Bruch also gekürzt. Ferner ist 11 keine Kubikzahl. Also

ist $\sqrt[3]{\frac{11}{300}}$ irrational.

Beispiel 2 (rationale Wurzel)

Untersuche $\sqrt[3]{\frac{40}{135}}$

Lösung

Zunächst kürzen wir den Bruch (5 ist ein gemeinsamer Teiler) soweit wie möglich. Dann wenden wir die Wurzelregeln an:

$$\sqrt[3]{\frac{40}{135}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

Also ist $\sqrt[3]{\frac{40}{135}}$ rational.

4.4 Die Berechnung von Kubikwurzeln

Wir passen das Heronverfahren an die Kubikwurzeln an. Der wesentliche Unterschied ist, dass bei der Zerlegung nicht mehr zwei Faktoren auftauchen, sondern *drei*.

Zunächst erläutern wir das Verfahren ausführlich an einem Beispiel. Dann formulieren wir die Verbesserungsformel allgemein und können mit ihrer Hilfe die weiteren Beispiele kürzer fassen.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt[3]{10}$ mit einer Genauigkeit von fünf Nachkommastellen.

Lösung

Da $2^3 = 8$ und $3^3 = 27$, liegt die gesuchte Wurzel zwischen 2 und 3. Wir nehmen den Näherungswert 2 als Startwert.

Startwert: 2.

Verbesserung 1

Wir suchen eine Zahl, die zweifach mit sich selber multipliziert 10 ergibt:

$$? \cdot ? \cdot ? = 10$$

Wir verzichten zunächst auf die exakte Gleichheit der Faktoren und setzen den Näherungswert 2 für die ersten *beiden* Faktoren ein. Der dritte Faktor ist damit zwangsläufig festgelegt, da das Produkt 10 ergeben soll:

$$2 \cdot 2 \cdot ? = 10$$

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{10}{2 \cdot 2} = 10$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2,5 = 10$$

Wir haben folgende **Zerlegung** der 10 bestimmt:

$$2 \cdot 2 \cdot 2,5 = 10$$

Bei dieser Zerlegung sind die Faktoren 2 zu klein und der Faktor 2,5 ist zu groß, um die Kubikwurzel zu sein. Der **Mittelwert** der *drei* Faktoren kommt der Wahrheit näher:

$$\frac{2+2+2,5}{3} = \frac{6,5}{3} \approx \mathbf{2,16667}$$

Aus dem Startwert folgt also der verbesserte Wert 2,16667. Diesen werden nun für die nächsten Verbesserung benutzen.

Verbesserung 2

Zerlegung

$$? \cdot ? \cdot ? = 10$$

$$2,16667 \cdot 2,16667 \cdot ? = 10$$

$$2,16667 \cdot 2,16667 \cdot \frac{10}{2,16667 \cdot 2,16667} = 10$$

$$2,16667 \cdot 2,16667 \cdot 2,13017 \approx 10$$

Mittelwert

$$\frac{2,16667 + 2,16667 + 2,13017}{3} \approx \mathbf{2,15450}$$

Verbesserung 3

Zerlegung

$$? \cdot ? \cdot ? = 10$$

$$2,15450 \cdot 2,15450 \cdot ? = 10$$

$$2,15450 \cdot 2,15450 \cdot \frac{10}{2,15450 \cdot 2,15450} = 10$$

$$2,15450 \cdot 2,15450 \cdot 2,15430 \approx 10$$

Mittelwert

$$\frac{2,15450 + 2,15450 + 2,15430}{3} \approx \mathbf{2,15443}$$

Verbesserung 4

Zerlegung

$$? \cdot ? \cdot ? = 10$$

$$2,15443 \cdot 2,15443 \cdot ? = 10$$

$$2,15443 \cdot 2,15443 \cdot \frac{10}{2,15443 \cdot 2,15443} = 10$$

$$2,15443 \cdot 2,15443 \cdot 2,15444 \approx 10$$

Mittelwert

$$\frac{2,15443 + 2,15443 + 2,15444}{3} \approx \mathbf{2,15443}$$

Der letzte Schritt hat keine weitere Verbesserung gebracht. Auch weitere Schritte würden wieder die Zahl 2,15443 liefern. Wir können also abbrechen und das Ergebnis festhalten:

$$\sqrt[3]{10} \approx 2,15443$$

Die Formel des Heronverfahrens

Die allgemeine Formel gewinnen wir aus dem ersten Verbesserungsschritt des vorigen Beispiels, wobei die Zahlen nun durch Buchstaben ersetzt werden:

Es sei a die Zahl, aus der die Kubikwurzel gezogen werden soll. Ferner sei x ein Näherungswert für $\sqrt[3]{a}$.

Dann zerlegen wir a in drei Faktoren und bilden den Mittelwert dieser Faktoren:

Zerlegung

$$? \cdot ? \cdot ? = a$$

$$x \cdot x \cdot ? = a$$

$$x \cdot x \cdot \frac{a}{x \cdot x} = 10$$

Mittelwert

$$\begin{aligned} \frac{x + x + \frac{a}{x \cdot x}}{3} &= \frac{2x + \frac{a}{x^2}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right) \end{aligned}$$

Wir bekommen also den verbesserten Näherungswert

$$y = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right)$$

Zusammenfassung

a = Zahl, aus der die Kubikwurzel gezogen werden soll

x = Näherungswert für die Kubikwurzel aus a .

y = verbesserter Näherungswert für die Wurzel aus a .

Dann lautet die Verbesserungsformel:

$$y = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right)$$

Diese Formel ist einfach zu deuten, denn sie ist in erster Instanz der Mittelwert dreier Zahlen, nämlich x , x und $\frac{a}{x \cdot x}$. Diese drei Zahlen sind genau die drei Faktoren einer Zerlegung von a :

$$x \cdot x \cdot \frac{a}{x \cdot x} = a$$

Hierbei ergibt sich der dritte Faktor $\frac{a}{x \cdot x}$ zwangsläufig aus den zwei ersten Faktoren x , x .

Es folgen zwei Beispiele zur Anwendung der Formel im praktisch relevanten Bereich zwischen 1 und 1000.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt[3]{2}$ mit einer Genauigkeit von fünf Nachkommastellen.

Lösung

1. Startwert: $x_0 = 1$ (Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$)

2. Verbesserungen (Iteration)

Wir wenden die Verbesserungsformel $y = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right)$.

mehrfach an, zunächst für $x = x_0 = 1$, dann erhalten wir $x_1 = y$, nun setzen wir $x = x_1$ ein und erhalten $x_2 = y$, usw.:

Verbesserung 1

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_0 + \frac{a}{x_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 1 + \frac{2}{1^2} \right) = \frac{1}{3} \cdot (2 + 2) = \mathbf{1,33333} \end{aligned}$$

Verbesserung 2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_1 + \frac{a}{x_1^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 1,33333 + \frac{2}{1,33333^2} \right) \approx \mathbf{1,26389} \end{aligned}$$

Verbesserung 3

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_2 + \frac{a}{x_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 1,26389 + \frac{2}{1,26389^2} \right) \approx \mathbf{1,25993} \end{aligned}$$

Verbesserung 4

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_3 + \frac{a}{x_3^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 1,25993 + \frac{2}{1,25993^2} \right) \approx \mathbf{1,25992}\end{aligned}$$

Verbesserung 5

$$\begin{aligned}x_5 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_4 + \frac{a}{x_4^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 1,25992 + \frac{2}{1,25992^2} \right) \approx \mathbf{1,25992}\end{aligned}$$

Der letzte Schritt hat zu keiner weiteren Verbesserung geführt. Der zuletzt berechnete Wert ist also die gesuchte Näherung:

$$\sqrt[3]{2} \approx 1,25992$$

Dass der letzte Schritt keine Verbesserung liefert, bedeutet in der Tat (beim Rechnen mit 5 Nachkommastellen):

$$x_4 = \frac{1}{3} \cdot \left(2x_4 + \frac{a}{x_4^2} \right)$$

Wir können dies als Gleichung mit der Unbekannten $x = x_4$ auffassen und lösen:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x + \frac{a}{x^2} \right) & | \cdot 3 \\3x &= 2x + \frac{a}{x^2} & | - 2x \\x &= \frac{a}{x^2} & | \cdot x^2 \\x^3 &= a \\x &= \sqrt[3]{a}\end{aligned}$$

Also ist bis auf 5 Nachkommastellen

$$x_4 = x = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2}$$

Als nächstes berechnen wir $\sqrt[3]{800}$, also die Wurzel aus einer Zahl im oberen praktischen Bereich.

Beispiel 3

Berechne $\sqrt[3]{800}$ mit einer Genauigkeit von fünf Nachkommastellen.

Lösung

1. Startwert: $x_0 = 9$ (Näherungswert für $\sqrt[3]{800}$)

2. Verbesserungen (Iteration)

Wir benutzen die Verbesserungsformel $y = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right)$.

Verbesserung 1

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_0 + \frac{a}{x_0^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 9 + \frac{800}{9^2} \right) = \frac{1}{3} \cdot (18 + 9,87654) = \mathbf{9,29218}\end{aligned}$$

Verbesserung 2

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_1 + \frac{a}{x_1^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 9,29218 + \frac{800}{9,29218^2} \right) \approx \mathbf{9,28319}\end{aligned}$$

Verbesserung 3

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_2 + \frac{a}{x_2^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 9,28319 + \frac{800}{9,28319^2} \right) \approx \mathbf{9,28318}\end{aligned}$$

Verbesserung 4

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2x_3 + \frac{a}{x_3^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 9,28318 + \frac{800}{9,28318^2} \right) \approx \mathbf{9,28318}\end{aligned}$$

Der letzte Schritt hat zu keiner weiteren Verbesserung geführt. Der zuletzt berechnete Wert ist also die gesuchte Näherung:

$$\sqrt[3]{800} \approx 9,28318$$

Anmerkungen

1. Wenn man bei den vorigen Beispielen noch einen weiteren Verbesserungsschritt macht und dabei mit 12 Nachkommastellen rechnet, bekommt man tatsächlich mindestens 10 exakte Nachkommastellen. Dies liegt daran, dass auch das angepasste Heronverfahren quadratisch konvergent ist. Es gilt nämlich

$$\frac{1}{3} \cdot \left(2x + \frac{a}{x^2} \right) - \sqrt[3]{a} = \underbrace{\frac{2x + \sqrt[3]{a}}{3x^2} \cdot (x - \sqrt[3]{a})^2}_{\geq 0}$$

Nach dem ersten Schritt ist also $x \geq \sqrt[3]{a}$ und daher

$$\frac{2x + \sqrt[3]{a}}{3x^2} \leq \frac{2x + x}{3x^2} = \frac{1}{x}$$

Im praktisch relevanten Bereich $1 \leq a < 1000$ liegen die Kubikwurzel und ihre Näherungswerte x zwischen 1 und

10. Somit sind $\frac{1}{x} \leq 1$, $\frac{2x + \sqrt[3]{a}}{3x^2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ und daher

$$\frac{1}{3} \cdot \left(2x + \frac{a}{x^2} \right) - \sqrt[3]{a} \leq (x - \sqrt[3]{a})^2$$

2. Dass bei der Kubikwurzelberechnung nur der Bereich von 1 bis 1000 praktisch relevant ist, sieht man an der wissenschaftlichen Notation der Zahlen $m \cdot 10^n$, wobei die Mantisse m im Bereich von 1 bis (unter) 10 liegt. Dividiert man den Exponenten n durch 3, so kommen als Rest nur 0, 1 und 2 in Frage, daher hat der Exponent eine der folgenden Gestalten:

$$n = 3k$$

$$n = 3k + 1$$

$$n = 3k + 2$$

Also

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{m \cdot 10^{3k}} &= \sqrt[3]{m \cdot 10^{3k}} = \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{10^{3k}} = \sqrt[3]{m} \cdot 10^k \\ \sqrt[3]{m \cdot 10^{3k+1}} &= \sqrt[3]{m \cdot 10 \cdot 10^{3k}} \\ &= \sqrt[3]{10m} \cdot \sqrt[3]{10^{3k}} = \sqrt[3]{10m} \cdot 10^k \\ \sqrt[3]{m \cdot 10^{3k+2}} &= \sqrt[3]{m \cdot 10^2 \cdot 10^{3k}} \\ &= \sqrt[3]{100m} \cdot \sqrt[3]{10^{3k}} = \sqrt[3]{100m} \cdot 10^k\end{aligned}$$

Es läuft darauf hinaus, die Kubikwurzel aus m , $10m$ und $100m$ zu berechnen. Diese Zahlen liegen im Bereich von 1 bis 1000.

4.5 Höhere Wurzeln

4.5.1 Beispiel zur Einführung

In Kapitel 2.1 wurde untersucht, wie ein Sparguthaben von 200 € bei einem Zinssatz von 5 % wächst. Für jedes Jahr muss man das Sparguthaben mit dem Zinsfaktor 1,05 ($= \frac{100+5}{100}$) multiplizieren, z. B.:

$$\begin{aligned}\text{Guthaben nach 10 Jahren} &= 200 \text{ €} \cdot \underbrace{1,05 \cdot 1,05 \cdot \dots \cdot 1,05}_{10\text{-mal}} \\ &= 200 \text{ €} \cdot 1,05^{10} \\ &= 325,78 \text{ €}\end{aligned}$$

Wir fragen nun, bei welchem *Zinssatz* sich das Guthaben in diesen 10 Jahren verdoppelt hätte. Dazu bestimmen wir zunächst den *Zinsfaktor* q :

$$\begin{aligned}\text{Guthaben nach 10 Jahren} &= 200 \text{ €} \cdot q^{10} \\ 400 \text{ €} &= 200 \text{ €} \cdot q^{10} && |:200 \text{ €} \\ 2 &= q^{10}\end{aligned}$$

Wir suchen also eine Zahl q , deren 10. Potenz 2 ist. Genau dies ist die Definition der *zehnten Wurzel* aus 2:

$$\begin{aligned}q &= \sqrt[10]{2} \\ q &\approx 1,07177\end{aligned}$$

Die Berechnung dieser Wurzel werden wir später mithilfe von Logarithmen durchführen. Der Leser kann hier allerdings zur Übung auch das Heronverfahren anpassen und anwenden. Aus dem berechneten Zinsfaktor ergibt sich nun der gesuchte Zinssatz p :

$$\begin{aligned}q &= \frac{100+p}{100} \\ 1,07177 &\approx \frac{100+p}{100} && |\cdot 100 \\ 107,177 &\approx 100+p && |-100 \\ 7,177 &\approx p \\ p &\approx 7,18\end{aligned}$$

Also wird sich bei einem Zinssatz von etwa 7,18 % das Guthaben in 10 Jahren verdoppeln.

4.5.2 Potenzen mit geraden und ungeraden Exponenten

Das Produkt von zwei negativen Zahlen ist stets positiv. Daher sind Quadrate wie x^2 stets positiv oder Null, egal ob x positiv, negativ oder 0 ist. Dies gilt auch für beliebige gerade Exponenten n , die ja stets als $n = 2k$ geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} x^n &= x^{2k} \\ &= \underbrace{(x^2)^k}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

Ist der Exponent ungerade, also von der Gestalt $n = 2k + 1$, so hat die Potenz das gleich Vorzeichen wie die Basis x :

$$x^n = x^{2k+1} = \underbrace{x^{2k}}_{\geq 0} \cdot x$$

Das Gesagte kann auch einfach folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{\geq 0} \cdot \dots \cdot \underbrace{x \cdot x}_{\geq 0} \quad (n \text{ gerade})$$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{\geq 0} \cdot \dots \cdot \underbrace{x \cdot x}_{\geq 0} \cdot x \quad (n \text{ ungerade})$$

Da $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$, ist also auch

$$(-x)^n = x^n \quad (n \text{ gerade})$$

Zum Beispiel ist $(-2)^{10} = 2^{10} = 1024$. Andererseits aber $(-2)^{11} = -2048$

4.5.3 Definition der höheren Wurzeln

Nach allen Vorbemerkungen können wir allgemein die n -te Wurzel aus einer Zahl a definieren. Die zwei Einschränkungen bei der Quadratwurzel gelten auch bei allen Wurzeln **gerader** Ordnung: Der Radikand a darf **nicht negativ** sein, und von den grundsätzlich möglichen Wurzelkandidaten (die sich nur im Vorzeichen unterscheiden) wird stets der **nichtnegative** genommen.

In den nachfolgenden zwei Tabellen sind die Definitionen der Wurzeln ungerader und gerader Ordnung zusammengestellt. Sie verallgemeinern jeweils die Quadrat- und Kubikwurzeln:

Die n -te Wurzel (n ungerade)

Es sei n eine **ungerade** natürliche Zahl. Die n -te Wurzel aus einer **beliebigen** Zahl a , geschrieben als $\sqrt[n]{a}$, ist die Zahl, deren n -te Potenz a ist:

$$\underbrace{? \cdot ? \cdot \dots \cdot ?}_{n\text{-mal}} = a$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n\text{-mal}} = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Die n -te Wurzel (n gerade)

Es sei n eine **gerade** natürliche Zahl. Die n -te Wurzel aus einer beliebigen **nichtnegativen** Zahl a , geschrieben als $\sqrt[n]{a}$, ist die **nichtnegative Zahl**, deren n -te Potenz a ist:

$$\underbrace{? \cdot ? \cdot \dots \cdot ?}_{n\text{-mal}} = a$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n\text{-mal}} = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$a \geq 0 \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a} \geq 0$$

Bezeichnungen

Die Zahl aus der die Wurzel gezogen wird, bezeichnet man als *Radikand*, die Wurzel selber auch als *Radikal*. Das Verb *radizieren* bedeutet *Wurzel ziehen*. Alles geht auf *radix* zurück. Die Zahl n im Symbol $\sqrt[n]{a}$ wird als *Ordnung* der Wurzel bezeichnet.

Beispiel 1

Finde $\sqrt[5]{32}$.

Lösung

Man muss die Zahl finden, deren 5. Potenz 32 ist:

$$? \cdot ? \cdot ? \cdot ? \cdot ? = 32$$

Wenn man die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... prüft, kommt man schnell auf 2 als Lösung:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$2^5 = 32$$

Also ist

$$\sqrt[5]{32} = 2.$$

Beispiel 2 (negative Zahl)

Finde $\sqrt[5]{-32}$.

Lösung

Aus Beispiel 1 wissen wir, dass

$$2^5 = 32.$$

Weil der Exponenten 5 ungerade ist, folgt daraus:

$$(-2)^5 = -32$$

und somit:

$$\sqrt[5]{-32} = -2.$$

Beispiel 3

Finde $\sqrt[6]{64}$.

Lösung

Wir suchen die nichtnegative Zahl, deren 6. Potenz 64 ist:

$$(?)^6 = 64$$

Wenn man die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$ prüft, kommt man schnell auf 2 als Lösung:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$2^6 = 64$$

Also ist

$$\sqrt[6]{64} = 2.$$

Das nächste Beispiel geht nicht glatt auf und man kann nur einen Näherungswert als Ergebnis erwarten.

Beispiel 4 (Näherungswert)

Finde $\sqrt[5]{40}$.

Lösung

1. Grober Näherungswert

Da $2^5 = 32$ und $3^5 = 243$, muss $\sqrt[5]{40}$ zwischen 2 und 3 liegen, eher nahe bei 2. Wir können 2 als ersten, groben Näherungswert für $\sqrt[5]{40}$ nehmen:

$$\sqrt[5]{40} \approx 2$$

2. Ein verbesserter Näherungswert

Wir wenden die Grundidee des Heron-Verfahrens an und **zerlegen** den Radikanden 40 mit Hilfe des groben Näherungswertes 2, der für alle Faktoren außer dem letzten eingesetzt wird:

$$? \cdot ? \cdot ? \cdot ? \cdot ? = 40$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ? = 40$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{40}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 40$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2,5 = 40$$

Nun bilden wir den **Mittelwert** dieser 5 Faktoren und bekommen einen verbesserten Näherungswert:

$$\frac{2 + 2 + 2 + 2 + 2,5}{5} = \mathbf{2,1}$$

Wir machen noch zwei weitere Verbesserungsschritte.

3. Eine zweite Verbesserung

Zerlegung:

$$? \cdot ? \cdot ? \cdot ? \cdot ? = 40$$

$$2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot ? = 40$$

$$2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot \frac{40}{2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1} = 40$$

$$2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,05676 \approx 40$$

Mittelwert:

$$\frac{2,1 + 2,1 + 2,1 + 2,1 + 2,05676}{5} \approx \mathbf{2,09135}$$

4. Eine dritte Verbesserung

Zerlegung:

$$? \cdot ? \cdot ? \cdot ? \cdot ? = 40$$

$$2,09135 \cdot 2,09135 \cdot 2,09135 \cdot 2,09135 \cdot \frac{40}{2,09135^4} = 40$$

$$2,09135 \cdot 2,09135 \cdot 2,09135 \cdot 2,09135 \cdot 2,09100 \approx 40$$

Mittelwert:

$$\frac{2,09135 + 2,09135 + 2,09135 + 2,09135 + 2,09100}{5}$$

$$\approx \mathbf{2,09128}$$

5. Eine vierte Verbesserung

Zerlegung:

$$? \cdot ? \cdot ? \cdot ? \cdot ? = 40$$

$$2,09128 \cdot 2,09128 \cdot 2,09128 \cdot 2,09128 \cdot \frac{40}{2,09128^4} = 40$$

$$2,09128 \cdot 2,09128 \cdot 2,09128 \cdot 2,09128 \cdot 2,09128 \approx 40$$

Mittelwert:

$$\frac{2,09128 + 2,09128 + 2,09128 + 2,09128 + 2,09128}{5}$$

$$\approx \mathbf{2,09128}$$

Der letzte Schritt hat den Wert nicht verändert. Also haben den Näherungswert:

$$\sqrt[5]{40} \approx 2,09128.$$

4.6 Regeln für höhere Wurzeln

Die bereits betrachteten Regeln für Quadrat- und Kubikwurzeln aus Produkten und Quotienten (Brüchen) gelten in gleicher Weise auch für Wurzeln beliebiger Ordnung.

Zur Berechnung der 3-ten Wurzel (Kubikwurzel) aus einer Potenz muss lediglich der Exponent durch 3 dividiert werden. Entsprechend wird die n -te Wurzel aus einer Potenz berechnet, indem man den Exponenten durch n teilt:

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{k/n}.$$

Da wir bisher nur Potenzen mit ganzzahligen Exponenten definiert haben, müssen wir bei dieser Wurzelregel einstweilen voraussetzen, dass der Exponent durch n teilbar ist.

Neu ist nun, dass wir die Wurzel aus einer Wurzel ziehen möchten. Zunächst ist es unklar, was

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = ?$$

ist. Setzen wir für a eine Potenz b^k ein, so gibt die vorige Regel einen Fingerzeig:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{b^k}} = \sqrt[n]{b^{k/m}} = b^{(k/m):n} = b^{k/(mn)}$$

Der Exponent k wird also durch mn geteilt, was nach der Regel der mn -ten Wurzel entspricht. In der Tat gilt

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},$$

was unten bewiesen wird.

Wir werden wie bei den Quadrat- und Kubikwurzeln vorgehen und die Regeln für die Wurzeln allgemein und ausführlich formulieren, beweisen und schließlich mit Beispielen vertiefen. Kurz zusammengefasst geht es um folgende vier Regeln:

$$1. \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$3. \quad \sqrt[n]{a^k} = a^{k/n}$$

$$4. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Regel 1: Wurzel aus einem Produkt

Man zieht die Wurzel aus einem Produkt, indem man aus jedem Faktor die Wurzel zieht:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Hierbei ist n eine natürliche Zahl. Wenn n ungerade ist, können a und b beliebige Zahlen sein. Wenn n **gerade** ist, müssen a und b **nichtnegative** Zahlen sein.

Beweis:

Um $\sqrt[n]{ab}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, deren n -te Potenz ab ergibt:

$$ab = (?)^n$$

Nun drücken wir a und b mithilfe der als bekannt gedachten Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$ aus:

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

$$b = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

Wir setzen dies in ab ein:

$$ab = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$ab = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n$$

Also ist $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ die Wurzel aus ab , d. h. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Anmerkung

Die Regel gilt auch für mehrere Faktoren, wie man durch mehrfache Anwendung der Regel für zwei Faktoren sieht:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{ab \cdot c} = \sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

Beispiel 1

Berechne $\sqrt[5]{32 \cdot 243}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{32 \cdot 243} &= \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{243} \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[5]{32 \cdot 243} = 6$.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt[4]{a \cdot a \cdot a \cdot a}$, anders gesagt $\sqrt[4]{a^4}$, wobei $a \geq 0$.

Lösung 1 (nach Definition)

Es ist eine Zahl zu finden, deren vierte Potenz $a \cdot a \cdot a \cdot a$ ergibt. Diese Zahl steht schon da: sie ist einfach a . Also ist $\sqrt[4]{a^4} = a$.

Lösung 2 (Regel)

Wir benutzen die Regel und anschließend die Definitionsgleichung $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a$:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a \cdot a \cdot a \cdot a} &= \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \\ &= a\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[4]{a \cdot a \cdot a \cdot a} = a$.

Beispiele 3

Betrachte die 5. Wurzel aus 1.000.000

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{1.000.000} &= \sqrt[5]{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} \\ &= \sqrt[5]{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} \cdot \sqrt[5]{10} \\ &= 10 \cdot \sqrt[5]{10}\end{aligned}$$

Damit haben wir $\sqrt[5]{1.000.000}$ zurückgeführt auf die Wurzel aus 10, wobei 10 deutlich kleiner als 1.000.000 ist.

Regel 2: Wurzel aus einem Bruch

Man zieht die Wurzel aus einem Bruch, indem man aus Zähler und Nenner die Wurzel zieht:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Hierbei ist n eine natürliche Zahl, $b \neq 0$. Wenn n ungerade ist, können a und b beliebige Zahlen sein. Wenn n **gerade** ist, müssen a und b **nichtnegative** Zahlen sein.

Beweis:

Um $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, die mit n potenziert $\frac{a}{b}$ ergibt:

$$\frac{a}{b} = (?)^n$$

Nun drücken wir a und b mithilfe der als bekannt gedachten Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$ aus:

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

$$b = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

Wir setzen dies in $\frac{a}{b}$ ein und schreiben das Ergebnis als Produkt von Brüchen:

$$\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n$$

Also ist $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ die n -te Wurzel aus $\frac{a}{b}$, d. h. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

Lösung

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$

Also ist $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$.

Beispiel 2 (Dezimalbruch)

Berechne $\sqrt[4]{0,0016}$.

Lösung

Wir wandeln 0,0016 in einen Bruch um und ziehen dann die vierte Wurzel:

$$\sqrt[4]{0,0016} = \sqrt[4]{\frac{16}{10.000}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{10.000}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Also ist $\sqrt[4]{0,0016} = 0,2$.

Regel 3: Wurzel aus einer Potenz

Man zieht die n -te Wurzel aus einer Potenz, indem man den Exponenten durch n dividiert:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Hierbei ist a eine nichtnegative Zahl und m eine durch n teilbare ganze Zahl (da wir bislang nur Potenzen mit ganzzahligen Exponenten definiert haben und somit m/n ganzzahlig sein sollte).

Beweis:

Um $\sqrt[n]{a^m}$ zu bestimmen, müssen wir eine Zahl finden, deren n -te Potenz a^m ergibt:

$$a^n = (?)^n$$

Da m durch n teilbar ist, können wir es als $m = kn$ schreiben, wobei $k = m/n$ ist. Somit

$$\begin{aligned} a^m &= a^{kn} \\ &= (a^k)^n \quad (\text{Potenzregeln}) \end{aligned}$$

Wir haben also a^m als n -te Potenz geschrieben:

$$a^m = (a^k)^n$$

Folglich

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m} &= a^k \\ \sqrt[n]{a^m} &= a^{m/n} \end{aligned}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt[6]{a^{18}}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{a^{18}} &= a^{18/6} \\ &= a^3\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[6]{a^{18}} = a^3$.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt[5]{2^{20}}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{2^{20}} &= 2^{20/5} \\ &= 2^4 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 16\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[5]{2^{20}} = 16$.

Regel 4: Wurzel aus einer Wurzel

Die n -te Wurzel aus der m -ten Wurzel ist die nm -te Wurzel:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Wenn mn ungerade ist, kann a eine beliebige Zahl sein. Wenn mn aber gerade ist, muss a eine nichtnegative Zahl sein.

Beweis:

Wir schlüsseln $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ mit Hilfe der Wurzeldefinition auf. Zunächst handelt es sich um die n -te Wurzel aus $\sqrt[m]{a}$. Das bedeutet, dass die n -te Potenz von $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ der Radikand $\sqrt[m]{a}$ ist:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n = \sqrt[m]{a}$$

Rechts steht nun $\sqrt[m]{a}$, die m -te Wurzel aus a . Nach Definition ist a die m -te Potenz von $\sqrt[m]{a}$. Auf beiden Seiten der Gleichung nehmen wir daher die m -te Potenz:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n &= \sqrt[m]{a} \\ \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right)^m &= \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \\ \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} &= a\end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} = a$$

Bedeutet nun nach Definition, dass $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ die nm -te Wurzel aus a ist:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

Beispiel 1

Berechne $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{a}} &= \sqrt[2]{\sqrt[3]{a}} \\ &= \sqrt[2 \cdot 3]{a} \\ &= \sqrt[6]{a}\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$.

Beispiel 2

Berechne $\sqrt[4]{4}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{4} &= \sqrt[2 \cdot 2]{4} \\ &= \sqrt[2]{\sqrt[2]{4}} \\ &= \sqrt{\sqrt{4}} \\ &= \sqrt{2} \\ &\approx 1,4142136\end{aligned}$$

Also ist $\sqrt[4]{4} \approx 1,4142135$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts fassen wir die betrachteten Wurzelregeln in einer Tabelle zusammen. Sie handeln von der Verbindung der Wurzel zu anderen Rechenarten, nämlich Multiplikation, Division, Potenzen und Wurzeln. Addition und Subtraktion haben keine einfache Beziehung zu Wurzeln und kommen deswegen hier nicht vor.

Wegen ihrer auch praktischen Bedeutung fügen wir die Definitions-Gleichung der Wurzel hinzu, obwohl sie keine Regel im engeren Sinne ist.

Wurzelregeln	
1.	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$
3.	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
4.	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
5.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad (\text{Definition})$
Hierbei müssen die Radikanden (a bzw. b) nichtnegativ sein, wenn die Ordnung der Wurzel gerade ist. Der Exponent m muss durch n teilbar sein.	

Anmerkung

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass Wurzeln als Potenz aufgefasst werden können. Die Wurzelregeln erweisen sich so als einfache Potenzregeln.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 4.1

1. Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit 125 cm^3 Volumen?

2. Bestimme die Kubikwurzeln:

a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt[3]{512}$ d) $\sqrt[3]{729}$

3. Bestimme die Kubikwurzeln:

a) $\sqrt[3]{-1}$ b) $\sqrt[3]{216}$ c) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[3]{0,008}$

4. Bestimme die Kubikwurzeln:

a) $\sqrt[3]{512 \cdot 216}$ b) $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$ c) $\sqrt[3]{0,027}$ d) $\sqrt[3]{5^9}$

Aufgaben zu Kapitel 4.2

1. Berechne:

a) $\sqrt[3]{64 \cdot 27}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 216}$ c) $\sqrt[3]{8000}$ d) $\sqrt[3]{c \cdot c \cdot c}$

2. Vereinfache bzw. berechne:

a) $\sqrt[3]{7000}$ b) $\sqrt[3]{64.000.000}$ c) $\sqrt[3]{24}$ d) $\sqrt[3]{250}$

3. Berechne:

a) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ b) $\sqrt[3]{0,125}$ c) $\sqrt[3]{0,000512}$

4. Berechne:

a) $\sqrt[3]{10^6}$ b) $\sqrt[3]{8^9}$ c) $\sqrt[3]{a^{27}}$ d) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{15}}$

5. Mache rational:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$ c) $\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$

Aufgaben zu Kapitel 4.3

1. Beweise direkt, dass $\sqrt[3]{2}$ irrational ist.

2. Prüfe, ob die folgenden Wurzeln irrational sind:

a) $\sqrt[3]{\frac{9}{12}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{12}{96}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{37}{19}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{10}{1}}$

Aufgaben zu Kapitel 4.4

1. Berechne nachstehende Kubikwurzeln mit fünf Nachkommastellen. Zur Wahl des Startwerts betrachte eine naheliegende Kubikzahl.

a) $\sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt[3]{30}$ c) $\sqrt[3]{200}$

2. Benutze die Ergebnisse der ersten Aufgabe, um die folgenden Kubikwurzeln ohne das Heronverfahren zu finden:.

a) $\sqrt[3]{12.000}$ b) $\sqrt[3]{0,03}$ c) $\sqrt[3]{0,2}$

Aufgaben zu Kapitel 4.5

1. Bestimme die Wurzeln:

- a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[4]{625}$ c) $\sqrt[5]{243}$ d) $\sqrt[5]{-243}$
e) $\sqrt[5]{-100.000}$ f) $\sqrt[6]{64}$

2. Berechne $\sqrt[5]{2}$ mit vier Nachkommastellen.

Aufgaben zu Kapitel 4.6

1. Berechne bzw. vereinfache:

- a) $\sqrt[5]{32 \cdot 100.000}$ b) $\sqrt[5]{24.300.000}$ c) $\sqrt[4]{10.000 \cdot a^2}$
d) $\sqrt[5]{1.000.000}$

2. Berechne:

- a) $\sqrt[5]{\frac{32}{100.000}}$ b) $\sqrt[4]{0,0081}$

3. Berechne bzw. vereinfache:

- a) $\sqrt[8]{a^{24}}$ b) $\sqrt[7]{2^{21}}$ c) $\sqrt[10]{3^{20}}$

4. Berechne bzw. vereinfache:

- a) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{24}}}$ c) $\sqrt{\sqrt{a}}$

5. Potenzen mit beliebigen Exponenten

5.1 Brüche als Exponenten

5.1.1 Wurzeln als Potenzen

Wenn man grundsätzlich Potenzen mit Brüchen im Exponenten in Betracht zieht und außerdem die Gültigkeit der Potenzregeln unterstellt, stößt man bald auf Wurzeln:

Quadratwurzeln

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$$

Also:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$$

Nach Definition der Quadratwurzel ist daher

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Kubikwurzeln

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^1 = a$$

Also:

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a$$

Nach Definition der Kubikwurzel ist daher

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

n -te Wurzeln

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

Also:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a$$

Nach Definition der n -ten Wurzel ist daher

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Die angestellten Überlegungen münden in folgender

Definition

Für eine **nichtnegative** Zahl a und eine natürliche Zahl n (2, 3, 4, ...) ist die Potenz $a^{\frac{1}{n}}$ gegeben durch:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

5.1.2 Potenzen mit Brüchen als Exponenten

Nun können wir uns auf die Suche nach den Potenzen mit beliebigen Brüchen als Exponenten begeben.

Wir beziehen hier auch negative Brüche ein. Diese können stets als Brüche mit positivem Nenner geschrieben werden, zum Beispiel:

$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$$

Das Vorzeichen befindet sich also im Zähler.

Wir unterstellen wieder die Gültigkeit der Potenzregeln und rechnen nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned}a^{\frac{m}{n}} &= a^{m \cdot \frac{1}{n}} \\&= (a^m)^{\frac{1}{n}} \\&= \sqrt[n]{(a^m)} \\&= \sqrt[n]{a^m}\end{aligned}$$

Wir fassen dies zusammen in der nachstehenden

Definition

Für eine **positive** Zahl a , eine natürliche Zahl n (1, 2, 3, ...) und eine **ganze** Zahl m (die also negativ sein kann) ist $a^{\frac{m}{n}}$ gegeben durch:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Diese auf den ersten Blick klare und harmlose Definition birgt ein **Problem**: Die Darstellung von Brüchen ist nicht eindeutig, denn man kann sie beispielsweise erweitern und (wenn möglich) auch kürzen. Dadurch ändern sich Zähler und Nenner, was grundsätzlich den Wert von $\sqrt[n]{a^m}$ verändern könnte. Wir werden nun aber beweisen, dass der Wert unverändert bleibt.

Wir gehen von einem vollständig gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$ aus; jede andere Darstellung dieses Bruches ergibt sich dann durch eine Erweiterung und ist daher von der Gestalt $\frac{k \cdot m}{k \cdot n}$.

Es muss gezeigt werden, dass tatsächlich

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}.$$

Um zu prüfen, ob $\sqrt[n]{a^m}$ die kn -te Wurzel aus a^{km} ist, nehmen wir die kn -te Potenz von $\sqrt[n]{a^m}$:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a^m})^{kn} &= \left((\sqrt[n]{a^m})^n \right)^k \\ &= (a^m)^k \\ &= a^{mk} \\ &= a^{km} \end{aligned}$$

Also

$$(\sqrt[n]{a^m})^{kn} = a^{km}.$$

Nach Definition bedeutete dies, dass $\sqrt[n]{a^m}$ die kn -te Wurzel aus a^{km} ist. Daher:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}.$$

Das Problem ist damit aufgeklärt.

Wir betrachten nun einige konkrete Beispiele zu den Potenzen mit gebrochenen Exponenten:

Beispiel 1 (Wurzel als Potenz)

Berechne $9^{\frac{1}{2}}$.

Lösung

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Also ist $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

Beispiel 2 (Wurzel als Potenz)

Berechne $81^{\frac{1}{4}}$.

Lösung

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Also ist $81^{\frac{1}{4}} = 3$.

Beispiel 3 (Bruch im Exponenten)

Berechne $8^{\frac{2}{3}}$.

Lösung

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Also ist $8^{\frac{2}{3}} = 4$.

Beispiel 4 (negativer Bruch im Exponenten)

Berechne $27^{-\frac{1}{3}}$.

Lösung

$$\begin{aligned} 27^{-\frac{1}{3}} &= 27^{\frac{-1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{27^{-1}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Also ist $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

Beispiel 5 (Dezimalbruch im Exponenten)

Berechne $16^{0,25}$.

Lösung

$$\begin{aligned} 16^{0,25} &= 16^{\frac{25}{100}} \\ &= 16^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt[4]{16} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Also ist $16^{0,25} = 2$.

Beispiel 6 (Dezimalbruch im Exponenten)

Berechne $4^{1,5}$.

Lösung

$$\begin{aligned} 4^{1,5} &= 4^{\frac{15}{10}} \\ &= 4^{\frac{3}{2}} \\ &= \sqrt[2]{4^3} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Also ist $4^{1,5} = 8$.

5.1.3 Potenzregeln

Da wir unseren Potenzbegriff erweitert haben, müssen wir die Potenzregeln neu formulieren und beweisen. Da die Wurzeln nunmehr als spezielle Potenzen aufgefasst werden können ($\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$), haben wir nur noch fünf Potenzregeln; sie beziehen sich auf folgende Rechenarten:

- Multiplikation
- Division
- Potenzierung

In der folgenden Tabelle sind die Regeln zusammengestellt:

Potenzregeln
Für beliebige Brüche x und y und positive Zahlen a und b gilt: 1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 3. $(a^x)^y = a^{xy}$ 4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ 5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Nun werden wir die Regeln beweisen. Dafür schreiben wir x und y als Brüche aus:

$$x = \frac{m}{n} \quad \text{und} \quad y = \frac{p}{q},$$

wobei die Nenner n und q positive ganze Zahlen sind.

Beweis der 1. Regel

Wir bringen x und y auf einen gemeinsamen Nenner:

$$x = \frac{mq}{nq} \quad \text{und} \quad y = \frac{np}{nq}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} && \text{(Definition der Potenzen)} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} && \text{(Wurzelregeln)} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} && \text{(Potenzregeln, ganze Exp.)} \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} && \text{(Definition der Potenzen)} \\ &= a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} && \text{(Addition von Brüchen)} \\ &= a^{x+y} \end{aligned}$$

Also in der Tat $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Beweis der 2. Regel

Völlig analog zum Beweis der 1. Regel rechnen wir:

$$\begin{aligned}
 \frac{a^x}{a^y} &= \frac{a^{\frac{mq}{nq}}}{a^{\frac{np}{nq}}} \\
 &= \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} && \text{(Definition der Potenzen)} \\
 &= \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} && \text{(Wurzelregeln)} \\
 &= \sqrt[nq]{a^{mq-np}} && \text{(Potenzregeln, ganze Exp.)} \\
 &= a^{\frac{mq-np}{nq}} && \text{(Definition der Potenzen)} \\
 &= a^{\frac{mq}{nq} - \frac{np}{nq}} && \text{(Subtraktion von Brüchen)} \\
 &= a^{x-y}
 \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Beweis der 3. Regel

Wir schreiben x und y in folgender Gestalt::

$$x = \frac{m}{n} \quad \text{und} \quad y = \frac{np}{nq}$$

Hier ist der Bruch y so erweitert worden, dass sein Zähler (np) den Nenner von x als Faktor hat.

Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned}
 (a^x)^y &= \left(a^{\frac{m}{n}} \right)^{\frac{np}{nq}} \\
 &= \left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{\frac{np}{nq}} && \text{(Definition der Potenz)} \\
 &= \sqrt[nq]{\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{np}} && \text{(Definition der Potenz)} \\
 &= \sqrt[nq]{\left[\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^n \right]^p} && \text{(Potenzregeln, ganze Exp.)} \\
 &= \sqrt[nq]{[a^m]^p} && \text{(Definition der Wurzel)} \\
 &= \sqrt[nq]{a^{mp}} && \text{(Potenzregeln, ganze Exp.)} \\
 &= a^{\frac{mp}{nq}} && \text{(Definition der Potenz)} \\
 &= a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} && \text{(Multiplikation von Brüchen)} \\
 &= a^{x \cdot y}
 \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $(a^x)^y = a^{xy}$.

Beweis der 4. Regel

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
 a^x \cdot b^x &= a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \\
 &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} && \text{(Definition der Potenzen)} \\
 &= \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} && \text{(Wurzelregeln)} \\
 &= \sqrt[n]{(ab)^m} && \text{(Potenzregeln, ganze Exp.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (ab)^{\frac{m}{n}} && \text{(Definition der Potenz)} \\
 &= (ab)^x
 \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.

Beweis der 5. Regel

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{a^x}{b^x} &= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \\
 &= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} && \text{(Definition der Potenzen)} \\
 &= \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} && \text{(Wurzelregeln)} \\
 &= \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} && \text{(Potenzregeln, ganze Exp.)} \\
 &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} && \text{(Definition der Potenz)} \\
 &= \left(\frac{a}{b}\right)^x
 \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Damit sind alle Potenzregeln bewiesen.

Anmerkung 1

Aus der 1. Regel folgt auch sofort die von den ganzzahligen Exponenten bekannte Regel über negative Exponenten:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Hierbei ist a eine beliebige positive Zahl und x ein beliebiger Bruch.

Beweis

$$a^x \cdot a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1$$

$$a^x \cdot a^{-x} = 1$$

Da ihr Produkt 1 ist, können a^x und a^{-x} niemals Null sein. Man kann daher durch a^x dividieren:

$$a^x \cdot a^{-x} = 1 \quad | : a^x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Also ist in der Tat $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Anmerkung 2

Aus

$$a^x \cdot a^{-x} = 1 \quad \text{und} \quad a^x = (a^{x/2})^2 \geq 0$$

folgt, dass jede Potenz positiv ist:

$$a^x > 0$$

Anmerkung 3

Wir können nun auch die Wurzel aus einer Potenz ohne Einschränkungen formulieren und beweisen:

$$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$$

Hierbei ist n eine positive ganze Zahl, a eine beliebige positive Zahl und x ein beliebiger Bruch.

Beweis

Wir schreiben die Wurzel als Potenz und wenden die Potenzregeln an:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^x} &= (a^x)^{\frac{1}{n}} && \text{(Wurzel als Potenz)} \\ &= a^{x \cdot \frac{1}{n}} && \text{(Potenzregeln)} \\ &= a^{\frac{x}{n}}\end{aligned}$$

Also ist in der Tat $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$.

Anmerkung 4

Der aufmerksame Leser wird sicherlich bemerkt haben, dass unsere Potenz-Definition $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ abweicht von der in der Einführung betrachteten Darstellung in Beispielen wie

$$a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a},$$

die auf $a^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{a})^3$ und allgemein $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ hinauslaufen.

Die Darstellung aus der Einführung führt zum Ergebnis:

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{a})^m &= (a^{\frac{1}{n}})^m && \text{(Wurzel als Potenz)} \\&= a^{\frac{1}{n} \cdot m} && \text{(Potenzregeln)} \\&= a^{\frac{m}{n}}\end{aligned}$$

Anmerkung 5

Bei den Beweisen haben wir die Wurzelregeln mehrfach benutzt. Die Wurzelregeln stecken so gewissermaßen in den allgemeinen Potenzregeln. Indem wir die Wurzeln als Potenzen schreiben ($\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$), können wir auf die Wurzelregeln verzichten und müssen nur die leichter eingängigen Potenzregeln anwenden. Wenn man kleine ganzzahlige Exponenten nimmt, kann man die Potenzregeln relativ leicht rekapitulieren.

Wir schließen mit einem Beispiel zur Anwendung der Potenzregeln.

Beispiel 7

Berechne $2^{1,4}$.

Lösung

Wir formen zunächst den Exponenten um, spalten den ganzzahligen Anteil ab und schreiben den gebrochenen Anteil als Bruch:

$$\begin{aligned} 1,4 &= 1 + 0,4 \\ &= 1 + \frac{4}{10} \\ &= 1 + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Potenz:

$$\begin{aligned} 2^{1,4} &= 2^{1+\frac{2}{5}} \\ &= 2^1 \cdot 2^{\frac{2}{5}} \\ &= 2 \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{5}} \\ &= 2 \cdot (2^2)^{\frac{1}{5}} \\ &= 2 \cdot 4^{\frac{1}{5}} \\ &= 2 \cdot \sqrt[5]{4} \\ &\approx 2 \cdot 1,3 \quad (\text{Heron}) \\ &= 2,6 \end{aligned}$$

Also ist $2^{1,4} \approx 2,6$.

5.2 Beliebige Exponenten

5.2.1 Beliebige Zahlen

Wenn wir hier von „beliebigen“ Zahlen sprechen, sind (endliche oder unendliche) Dezimalbrüche gemeint, landläufig als *Kommazahlen* bezeichnet. Fachsprachlich werden

sie *reelle* Zahlen genannt. Brüche kann man immer als Dezimalbrüche schreiben:

$$\frac{3}{4} = 3:4 = 0,75$$

$$\frac{1}{3} = 1:3 = 0,333...$$

$$\frac{2}{11} = 2:11 = 0,181818...$$

Diese sind entweder *endlich* (eine begrenzte Anzahl von Ziffern nach dem Komma) oder *unendlich*, aber *periodisch* (unendlich viele Ziffern nach dem Komma, es wiederholt sich ein Ziffernblock).

Auch umgekehrt ist jeder unendliche periodische Dezimalbruch ein Bruch wie man an folgender Beispielrechnung erkennt:

$$0,27\,27\,27... = ?$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0,27\,27\,27... \quad | \cdot 100 \\ 100x & = & 27,27\,27\,27... \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} x & = & 0,27\,27\,27... \\ 100x & = & 27,27\,27\,27... \end{array}} \right\} \text{unten} - \text{oben}$$

$$99x = 27 \quad | :99$$

$$x = \frac{27}{99} \quad | \text{ mit 9 kürzen}$$

$$x = \frac{3}{11}$$

$$0,27\,27\,27... = \frac{3}{11}$$

Der unendliche Rattenschwanz nach dem Komma hebt sich durch die geschickte Multiplikation und Subtraktion weg.

Dass $\sqrt{2}$ und viele andere Wurzeln keine Brüche sind (und also nur durch unendliche nicht-periodische Dezimalbrüche dargestellt werden können), haben wir bereits gesehen. Sie können daher nur näherungsweise durch endliche Dezimalbrüche dargestellt werden.

5.2.2 Potenzen mit beliebige Exponenten

Jeder Dezimalbruch kann durch einen endlichen Dezimalbruch (also durch einen Bruch) beliebig genau angenähert werden. Auf diese Weise können wir auch Potenzen mit beliebigen Exponenten beliebig genau durch solche mit einem Bruch als Exponenten annähern und so grundsätzlich bestimmen. Wir betrachten dazu ein Beispiel:

Beispiel

Berechne $2^{\sqrt{2}}$.

Lösung

Wir formen zunächst den Exponenten um:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,4142135... \\ &\approx 1,4\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Potenz (vgl. Bsp. 7 in 5.1):

$$\begin{aligned}2^{\sqrt{2}} &\approx 2^{1,4} \\ &\approx 2,6\end{aligned}$$

Also ist $2^{\sqrt{2}} \approx 2,6$.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 5.1

1. Berechne:

a) $8^{\frac{1}{3}}$ b) $4^{\frac{1}{2}}$ c) $81^{\frac{1}{4}}$ d) $32^{\frac{1}{5}}$

2. Berechne:

a) $49^{0,5}$ b) $256^{0,25}$ c) $243^{0,2}$ d) $216^{0,333\dots}$

3. Berechne:

a) $36^{0,5}$ b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}$ c) $9^{-\frac{1}{2}}$ d) $625^{-0,25}$ e) $4^{-2,5}$
f) $16^{0,75}$ g) $32^{1,2}$

Aufgaben zu Kapitel 5.2

1. Berechne $3\sqrt[0,254]{}$ näherungsweise.

6. Die eulersche Zahl e

6.1. Zahlen nahe bei 1 und die eulersche Zahl

Im Kapitel 3.5 über die Berechnung von Quadratwurzeln haben wir die nahe bei 1 liegenden Zahlen betrachtet und einige Rechenregeln herausgearbeitet. Diese Regeln sind völlig analog zu den Potenzregeln, wie man in der folgenden Gegenüberstellung erkennen kann:

Zahlen nahe bei 1	Potenzen
$(1+x) \cdot (1+y) \approx 1 + x + y$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
$\frac{1+x}{1+y} \approx 1 + x - y$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\frac{1}{1+y} \approx 1 - y$	$\frac{1}{a^y} = a^{-y}$
$(1+x)^n \approx 1 + n \cdot x$	$(a^x)^n = a^{n \cdot x}$
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$	$\sqrt{a^x} = a^{\frac{x}{2}}$

Die Übereinstimmung ist beeindruckend und legt nahe, dass der Ausdruck $1+x$ für kleine Werte von x eine Potenz mit dem Exponenten x ist:

$$1+x \approx a^x \quad (x \text{ klein, } x \approx 0)$$

Die Basis a kann hierbei nicht beliebig sein. Ihr Wert ergibt sich zwangsläufig aus der Gleichung, wie wir nun sehen werden. Für die kleinen Zahlen x nehmen wir typische und anschauliche Vertreter, nämlich die Kehrwerte $\frac{1}{n}$ von großen natürlichen Zahlen n :

$$x = \frac{1}{n} \quad (n \text{ groß})$$

Dies setzen wir nun in unsere Gleichung ein: und lösen nach a auf:

$$1+x = a^x$$

$$1+\frac{1}{n} = a^{\frac{1}{n}} \quad | n\text{-te Potenz}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a$$

$$a = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n \text{ groß})$$

Mit wachsendem n nähert sich diese Basis einem bestimmten Wert; dieser wird *eulersche Zahl* genannt und als e geschrieben. Sie geht auf Leonhard Euler (1707-1783) zurück:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \text{ groß})$$

Die Umschreibung, dass n groß ist und immer mehr wächst, damit e genügend genau bestimmt ist, drückt man fachsprachlich so aus:

$$e = \text{Grenzwert von } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{wenn } n \rightarrow \text{Unendlich})$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

In der folgenden Tabelle sind einige Näherungswerte für e zusammengestellt (fünf Nachkommastellen):

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2	2,25
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71826

Die ersten zwölf Nachkommastellen sind:

$$e = 2,718281828459...$$

Wir werden dies später mit effizienteren Methoden berechnen.

Wir halten fest, dass die eulersche Zahl $e = 2,718281828\dots$ so beschaffen ist, dass

$$e^x \approx 1 + x \quad (x \text{ klein}).$$

6.2 Potenzen von e .

Um beliebige Potenzen zu berechnen, muss man nach Definition potenzieren und eine Wurzel ziehen ($a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$). Die Potenzen von e können einfacher berechnet werden, indem man die für kleine x gültige Näherungsformel $e^x \approx 1 + x$ benutzt. Nehmen wir zum Beispiel ($x = 0,01$)

$$e^{0,01} \approx 1 + 0,01$$

$$e^{0,01} \approx 1,01$$

als Ausgangspunkt. Dann können weitere Potenzen durch fortgesetztes Multiplizieren berechnet werden:

$$e^{0,01} \approx 1,01$$

$$e^{0,02} = e^{0,01} \cdot e^{0,01} \approx 1,01 \cdot 1,01 = 1,0201$$

$$e^{0,03} = e^{0,02} \cdot e^{0,01} \approx 1,0201 \cdot 1,01 = 1,030301 \approx 1,0303$$

$$e^{0,04} = e^{0,03} \cdot e^{0,01} \approx 1,0303 \cdot 1,01 = 1,040603 \approx 1,0406$$

...

$$e^{0,23} = (e^{0,01})^{23} \approx 1,01^{23} = \underbrace{1,01 \cdot \dots \cdot 1,01}_{23\text{-mal}} \approx 1,2570$$

usw.

Die nachfolgende Tabelle enthält alle Potenzen

$$e^{0,01}, e^{0,02}, e^{0,03}, \dots, e^{0,99}, e^{1,00}$$

mit zwei Nachkommastellen. Die Multiplikationen wurden jedoch mit vier Nachkommastellen durchgeführt.

x	e ^x	x	e ^x	x	e ^x	x	e ^x
0,01	1,01	0,26	1,30	0,51	1,66	0,76	2,13
0,02	1,02	0,27	1,31	0,52	1,68	0,77	2,15
0,03	1,03	0,28	1,32	0,53	1,69	0,78	2,17
0,04	1,04	0,29	1,33	0,54	1,71	0,79	2,19
0,05	1,05	0,30	1,35	0,55	1,73	0,80	2,22
0,06	1,06	0,31	1,36	0,56	1,75	0,81	2,24
0,07	1,07	0,32	1,37	0,57	1,76	0,82	2,26
0,08	1,08	0,33	1,39	0,58	1,78	0,83	2,28
0,09	1,09	0,34	1,40	0,59	1,80	0,84	2,31
0,10	1,10	0,35	1,42	0,60	1,82	0,85	2,33
0,11	1,12	0,36	1,43	0,61	1,83	0,86	2,35
0,12	1,13	0,37	1,44	0,62	1,85	0,87	2,38
0,13	1,14	0,38	1,46	0,63	1,87	0,88	2,40
0,14	1,15	0,39	1,47	0,64	1,89	0,89	2,42
0,15	1,16	0,40	1,49	0,65	1,91	0,90	2,45
0,16	1,17	0,41	1,50	0,66	1,93	0,91	2,47
0,17	1,18	0,42	1,52	0,67	1,95	0,92	2,50
0,18	1,20	0,43	1,53	0,68	1,97	0,93	2,52
0,19	1,21	0,44	1,55	0,69	1,99	0,94	2,55
0,20	1,22	0,45	1,56	0,70	2,01	0,95	2,57
0,21	1,23	0,46	1,58	0,71	2,03	0,96	2,60
0,22	1,24	0,47	1,60	0,72	2,05	0,97	2,62
0,23	1,26	0,48	1,61	0,73	2,07	0,98	2,65
0,24	1,27	0,49	1,63	0,74	2,09	0,99	2,68
0,25	1,28	0,50	1,64	0,75	2,11	1,00	2,70

Bei 50 von den Einträgen gibt es Abweichungen (um 0,01 bis 0,02) vom wahren Wert. Dafür gibt es zwei Gründe:

- Der Ausgangswert 1,01 ist kein exakter Wert, denn

$$e^{0,01} \approx 1,01$$

ist nur eine (wenn auch gute) Näherungsformel.

- Beim Multiplizieren und Runden können weitere Abweichungen entstehen.

Dementsprechend bieten sich zur Verringerung der Abweichungen drei Möglichkeiten an:

1. Möglichkeit (Bürgi): Basis e ersetzen
2. Möglichkeit: Bessere Näherung für $e^{0,01} \approx 1,01$
3. Möglichkeit: Multiplikationen optimieren

Wir betrachten nun diese drei Ansätze genauer.

Zur ersten Möglichkeit

Die Näherung

$$e^{0,01} \approx 1,01$$

bedeutet (mit 100 potenziert):

$$\begin{aligned}(e^{0,01})^{100} &\approx 1,01^{100} \\ e &\approx 1,01^{100}\end{aligned}$$

Wir haben also für die eulersche Zahl e die Näherung

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{mit } n = 100$$

genommen. Nun können wir die Basis e ersetzen durch

$$e \rightarrow B = 1,01^{100}.$$

Dann haben wir die **exakte** Beziehung

$$B^{0,01} = 1,01.$$

Die entsprechend modifizierte Potenztabelle lautet nun:

x	B ^x	x	B ^x	x	B ^x	x	B ^x
0,01	1,01	0,26	1,30	0,51	1,66	0,76	2,13
0,02	1,02	0,27	1,31	0,52	1,68	0,77	2,15
0,03	1,03	0,28	1,32	0,53	1,69	0,78	2,17
0,04	1,04	0,29	1,33	0,54	1,71	0,79	2,19
0,05	1,05	0,30	1,35	0,55	1,73	0,80	2,22
0,06	1,06	0,31	1,36	0,56	1,75	0,81	2,24
0,07	1,07	0,32	1,37	0,57	1,76	0,82	2,26
0,08	1,08	0,33	1,39	0,58	1,78	0,83	2,28
0,09	1,09	0,34	1,40	0,59	1,80	0,84	2,31
0,10	1,10	0,35	1,42	0,60	1,82	0,85	2,33
0,11	1,12	0,36	1,43	0,61	1,83	0,86	2,35
0,12	1,13	0,37	1,44	0,62	1,85	0,87	2,38
0,13	1,14	0,38	1,46	0,63	1,87	0,88	2,40
0,14	1,15	0,39	1,47	0,64	1,89	0,89	2,42
0,15	1,16	0,40	1,49	0,65	1,91	0,90	2,45
0,16	1,17	0,41	1,50	0,66	1,93	0,91	2,47
0,17	1,18	0,42	1,52	0,67	1,95	0,92	2,50
0,18	1,20	0,43	1,53	0,68	1,97	0,93	2,52
0,19	1,21	0,44	1,55	0,69	1,99	0,94	2,55
0,20	1,22	0,45	1,56	0,70	2,01	0,95	2,57
0,21	1,23	0,46	1,58	0,71	2,03	0,96	2,60

0,22	1,24	0,47	1,60	0,72	2,05	0,97	2,62
0,23	1,26	0,48	1,61	0,73	2,07	0,98	2,65
0,24	1,27	0,49	1,63	0,74	2,09	0,99	2,68
0,25	1,28	0,50	1,64	0,75	2,11	1,00	2,70

Hierbei gibt es nur zwei Abweichungen um 0,01 (die aber die Folge von Abweichungen von lediglich 0,001 sind):

Tabelle: $B^{0,37} = 1,44$, tatsächlicher Wert: $B^{0,37} = 1,45$

Tabelle: $B^{0,97} = 2,62$, tatsächlicher Wert: $B^{0,97} = 2,63$

Zur zweiten Möglichkeit

Man kann den Ausgangswert $e^{0,01} \approx 1,01$ verbessern, indem man beispielsweise

$$e^{0,001} \approx 1,001$$

oder

$$e^{0,0001} \approx 1,0001$$

nimmt.

Zur dritten Möglichkeit

Man kann die Abweichungen bei den Multiplikationen verringern, indem man mit mehr Dezimalstellen rechnet.

6.3 Eine Formel für e^x

6.3.1 Wie man auf den Ansatz kommt

Für kleine Exponenten h hatten wir unsere grundlegende Näherungsformel

$$e^h \approx 1 + h,$$

die umso genauer wird, je kleiner h ist.

Einen nicht notwendigerweise kleinen Exponenten x kann man verkleinern, indem man ihn durch eine große natürliche Zahl n teilt. Dann kann man die Näherungsformel anwenden:

$$\begin{aligned} e^x &= e^{\frac{x}{n} \cdot n} \\ &= \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^n \\ &\approx \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \end{aligned}$$

Wir haben also die Näherungsformel:

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Sie wird umso genauer, je größer n ist.

Nun könnte man an dieser Stelle den (fortgeschrittenen) allgemeinen binomischen Lehrsatz benutzen, n immer größer werden lassen und so eine Formel für e^x gewinnen. Dieses Vorgehen würde den Umfang des Buch weiter wachsen lassen und dem angestrebten elementaren Charakter zuwiderlaufen. Wir betrachten die Beispiele $n = 2$ und $n = 3$, die den Ansatz nachvollziehbar machen:

Wir beginnen mit $n = 2$:

$$\begin{aligned}
 e^x &\approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\
 &= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \\
 &= \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) \quad . \\
 &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \\
 &= 1 + x + \frac{1}{4} \cdot x^2
 \end{aligned}$$

Nun betrachten wir $n = 3$:

$$\begin{aligned}
 e^x &\approx \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 \\
 &= \left(1 + \frac{x}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3}\right) \quad . \\
 &= \left(1 + \frac{x}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) \\
 &= 1 + x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{27}x^3
 \end{aligned}$$

In beiden Fällen beginnen die Formeln mit $1 + x$. Würde man weitere Werte für n wählen, so würden auch weitere Potenzen von x hinzukommen. Da n beliebig wachsen kann, würden letztendlich unendlich viele Potenzen auftauchen. Die Vorzeichen der Potenzen stabilisieren sich und es liegt nahe, dass das Endergebnis folgende Gestalt hat:

$$e^x = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots$$

Dass hier unendlich viele Zahlen addiert werden, scheint zunächst merkwürdig. Aber tatsächlich kommt die Situation bereits bei der schriftlichen Division vor, wenn man zum Beispiel

$$1:3 = 0,333...$$

berechnet. Das Ergebnis bedeutet aufgeschlüsselt nichts anderes als

$$0,333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots,$$

was ebenfalls eine Summe unendlich vieler Zahlen ist.

6.3.2 Die Berechnung von c_2 , c_3 , c_4 , ...

Wir berechnen nun die konkreten Werte der Vorzeichen der Potenzen in der Formel:

$$e^x = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die Formel für einen nahe bei x liegenden Wert $x + h$:

$$e^{x+h} = 1 + (x+h) + c_2(x+h)^2 + c_3(x+h)^3 + c_4(x+h)^4 + \dots$$

Man stelle sich vor, dass h beliebig klein gemacht werden kann. Ferner benutzen wir die Näherungsformel

$$e^h \approx 1 + h,$$

die grundlegend ist und gewissermaßen die Essenz der eulerschen Zahl enthält.

Wir werden nun die Formel für e^{x+h} aufschlüsseln und erhalten so die gesuchten Vorzahlen $c_2, c_3, c_4, \dots$

a) Umformung der linken Seite

$$\begin{aligned}e^{x+h} &= e^x \cdot e^h \\&\approx e^x \cdot (1+h) \\&= e^x + h \cdot e^x\end{aligned}$$

Die linke Seite ist also:

$$e^{x+h} \approx e^x + h \cdot e^x$$

b) Umformung der rechten Seite

Bei der rechten Seite

$$1 + (x+h) + c_2(x+h)^2 + c_3(x+h)^3 + c_4(x+h)^4 + \dots$$

müssen die Klammern aufgelöst werden. Es handelt sich um Klammern der Gestalt:

$$(x+h)^n.$$

Um die Regeln für das Rechnen mit Zahlen nahe bei 1 anwenden zu können, klammern wir x aus:

$$x+h = x \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Nun kann man die Potenz berechnen und dabei die Näherungsformel für Potenzen von Zahlen nahe bei 1 benutzen:

$$\begin{aligned}
 (x+h)^n &= \left(x \cdot \left(1 + \frac{h}{x} \right) \right)^n \\
 &= x^n \cdot \left(1 + \frac{h}{x} \right)^n \\
 &\approx x^n \cdot \left(1 + n \cdot \frac{h}{x} \right) \\
 &= x^n + n \cdot x^{n-1}h
 \end{aligned}$$

Also:

$$(x+h)^n \approx x^n + n \cdot x^{n-1}h,$$

insbesondere:

$$\begin{aligned}
 (x+h)^1 &\approx x + h \\
 (x+h)^2 &\approx x^2 + 2xh \\
 (x+h)^3 &\approx x^3 + 3x^2h, \\
 (x+h)^4 &\approx x^4 + 4x^3h \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned}$$

Dies kann man nun in die rechte Seite einsetzen:

$$\begin{aligned}
 &1 + (x+h) + c_2(x+h)^2 + c_3(x+h)^3 + c_4(x+h)^4 + \dots \\
 &= 1 + (x+h) + c_2(x^2 + 2xh) + c_3(x^3 + 3x^2h) + \dots
 \end{aligned}$$

Ausmultipliziert und geordnet, folgt:

$$\begin{aligned}
 & 1 + (x+h) + c_2(x^2 + 2xh) + c_3(x^3 + 3x^2h) + \dots \\
 &= 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots \\
 &+ h + 2c_2xh + 3c_3x^2h + 4c_4x^3h + \dots \\
 &= e^x + h(1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots)
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist also:

$$\begin{aligned}
 & 1 + (x+h) + c_2(x+h)^2 + c_3(x+h)^3 + c_4(x+h)^4 + \dots \\
 &= e^x + h(1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots)
 \end{aligned}$$

c) Beide Seiten gleichsetzen

$$e^{x+h} \approx e^x + h \cdot e^x$$

und

$$\begin{aligned}
 & 1 + (x+h) + c_2(x+h)^2 + c_3(x+h)^3 + c_4(x+h)^4 + \dots \\
 &= e^x + h(1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots)
 \end{aligned}$$

ergeben

$$e^x + h \cdot e^x = e^x + h(1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots)$$

Hier hebt sich e^x auf und man kann dann durch h dividieren:

$$e^x = 1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots$$

d) Vergleich mit der Originalformel

Die gewonnene Darstellung von e^x :

$$e^x = 1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots$$

kann nun mit der ursprünglichen abgeglichen werden:

$$e^x = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$$

Damit beide übereinstimmen, müssen die Vorzahlen der Potenzen gleich sein, also

$$2c_2 = 1$$

$$3c_3 = c_2$$

$$4c_4 = c_3$$

$$5c_5 = c_4$$

usw.

Daraus ergeben sich unmittelbar die gesuchten Vorzahlen:

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = c_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$c_4 = c_3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$c_5 = c_4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$$

usw.

Anders geschrieben:

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$c_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$c_5 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

usw.

Die im Nenner auftretenden Produkte der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen werden *Fakultäten* genannt und mit einem Ausrufezeichen (!) bezeichnet:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

usw.

Man liest zum Beispiel $3!$ als „3 Fakultät“. Mit dieser abkürzenden Schreibweise lauten unsere Vorzahlen also:

$$c_2 = \frac{1}{2!}, \quad c_3 = \frac{1}{3!}, \quad c_4 = \frac{1}{4!}, \quad c_5 = \frac{1}{5!} \quad \text{usw.}$$

Die Formel für e^x nimmt damit folgende konkrete Gestalt an:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

Wir können die Potenzen in den Zähler schreiben (multiplizieren) und erhält die etwas kompaktere Form:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist als *Exponentialreihe* bekannt. Sie drückt die Potenz e^x durch den *Exponenten* aus. Das Wort *Reihe* bedeutet *Summe* und meint die Summe der Zahlen einer zugrundeliegenden Liste (in der Mathematik als *Folge* bezeichnet); im vorliegenden Fall ist die Folge: $1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^4}{4!}, \frac{x^5}{5!}, \dots$

Bei der praktischen Anwendung wird die Exponentialreihe abgebrochen und man betrachtet zum Beispiel die Näherung:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

Um die Genauigkeit dieser Näherung zu prüfen, muss man den weggelassenen Anteil (*Rest, Restglied*)

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

untersuchen. Mit Hilfe von sogenannten *geometrischen Reihen* kann dieser Rest auf elementare Weise abgeschätzt werden.

6.3.3 Geometrische Reihen

Wir greifen das obige Beispiel des Divisionsergebnisses von 1:3 auf:

$$0,333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots,$$

Dieser Ausdruck ist ein Beispiel für eine (*unendliche*) *geometrische Reihe*. Wie bereits gesagt, bedeutet "Reihe" einfach "Summe". Das Adjektiv "geometrisch" bezeichnet das besondere Bildungsgesetz der Summanden. Aus jedem Summanden ergibt sich der nachfolgende Summand durch Multiplikation mit einer festen Zahl, im Beispiel ist dieser

Faktor $\frac{1}{10}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \cdot \frac{1}{10} & & \cdot \frac{1}{10} & & \cdot \frac{1}{10} & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ \frac{3}{10} & + & \frac{3}{100} & + & \frac{3}{1000} & + & \frac{3}{10.000} + \dots \end{array}$$

Man bezeichnet $\frac{1}{10}$ auch als den *Quotienten* der Reihe, da er als Quotient aufeinanderfolgender Summanden aufgefasst werden kann.

Allgemein sieht eine geometrische Reihe so aus:

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots$$

Hierbei ist a der erste Summand und q der Quotient der Reihe.

Wir berechnen nun den Wert s der allgemeinen geometrischen Reihe. Dazu multiplizieren wir die obige Gleichung mit q und subtrahieren diese Gleichung von der ursprünglichen. Es heben sich dabei unendliche viele Summanden weg und man bekommt einen einfachen Ausdruck für s :

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots$$

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots$$

$$s - sq = a$$

$$s(1 - q) = a$$

$$s = \frac{a}{1 - q}$$

Also:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1 - q} \quad (-1 < q < 1)$$

Man beachte dabei, dass die Reihe kein sinnvolles Ergebnis liefert, wenn $q \geq 1$ oder $q \leq -1$ ist. Zwei Beispiele dazu:

Für $a = 1$ und $q = 1$ ergibt sich die Reihe:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Die Summe wächst unbegrenzt und ergibt keine Zahl.

Für $a = 1$ und $q = -1$ ergibt sich die Reihe:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Die Summe springt zwischen 0 und 1:

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 + 1 = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

und so weiter.

Liest man die Formel für den Wert der geometrischen Reihe rückwärts, so ergibt sich:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots \quad (-1 < q < 1)$$

Diese bemerkenswerte Formel drückt die links stehende *Division* durch bloße Additionen und Multiplikationen aus.

Historische Anmerkung

Archimedes (ca. 287-212 v. Chr.) war der erste Mensch, der solch eine unendliche geometrische Reihe berechnet hat. Um den Flächeninhalt eines Parabelabschnitts zu bestimmen (durch Ausschöpfung mit unendliche vielen Dreiecken) hat er

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

berechnet. Unsere Formel liefert tatsächlich ($a = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{4}$):

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

6.3.4 Die Abschätzung des Restes

Zur Erläuterung greifen wir das Beispiel des obigen Restes auf:

$$R = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Die Reihe ist beinahe eine geometrische Reihe, sie hat gewissermaßen unendlich viele unterschiedliche Quotienten, die aber ständig kleiner werden ($\frac{x}{4}, \frac{x}{5}, \frac{x}{6}, \dots$):

$$\frac{x^3}{3!} \xrightarrow{\cdot \frac{x}{4}} \frac{x^4}{4!} \xrightarrow{\cdot \frac{x}{5}} \frac{x^5}{5!} \xrightarrow{\cdot \frac{x}{6}} \frac{x^6}{6!} \dots$$

Wenn man nun alle Faktoren durch den größten, nämlich $\frac{x}{4}$, ersetzt, so vergrößert sich zwar der Wert der Reihe, aber dafür bekommt man eine *geometrische* Reihe, die man berechnen kann:

$$\begin{aligned} R &= \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &\leq \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{x}{4} + \frac{x^3}{3!} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^3}{3!} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{\frac{x^3}{3!}}{1 - \frac{x}{4}} \\ &= \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{4}} \end{aligned}$$

Also haben wir die Abschätzung:

$$R \leq \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{4}}$$

Sie ist also im Wesentlichen durch das erste weggelassene Glied, nämlich $\frac{x^3}{3!}$, bestimmt.

Wir untersuchen den Rest für den Wert $x = 0,1$, wobei wir runden, um leichter rechnen zu können:

$$\begin{aligned} R &\leq \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{4}} = \frac{0,1^3}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0,1}{4}} = \frac{0,001}{6} \cdot \frac{1}{1 - 0,025} \\ &= \frac{0,001}{6 - 0,125} = \frac{0,001}{5,875} < \frac{0,001}{5} = 0,0002 \end{aligned}$$

Also:

$$R < 0,0002$$

Daher ist die Näherung

$$\begin{aligned} e^{0,1} &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \\ &= 1 + 0,1 + \frac{1}{2!}0,1^2 \\ &= 1,105 \end{aligned}$$

mit einer Abweichung von höchstens 0,0002 behaftet und liegt somit zwischen 1,1050 und 1,1052.

6.3.5 Die eulersche Zahl bis auf fünf Nachkommastellen

Wir nutzen die hergeleiteten Ergebnisse für die Berechnung eines guten Näherungswertes der eulerschen Zahl. In der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

setzen wir $x = 1$ und bekommen die Reihendarstellung der eulerschen Zahl:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Wir nehmen die Näherung

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{8!}$$

Der Rest kann wie gehabt mit Hilfe einer geometrischen Reihe abgeschätzt werde:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \dots \\ &\leq \frac{1}{9!} + \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{9!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9} \cdot \frac{1}{0,9} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9} \cdot \frac{1}{0,9} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{326592} \approx 0,000\,003$$

Unser Ergebnis wird also möglicherweise in der sechsten Nachkommastelle abweichen und schlimmstenfalls um 0,000003 zu groß sein.

Nun berechnen wir die Näherung:

$$\begin{aligned} e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{8!} \\ &= 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \\ &\quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} \\ &= 2,71827876984... \\ &\approx 2,71828 \end{aligned}$$

Damit haben wir den Näherungswert mit fünf zutreffenden Nachkommastellen:

$$e \approx 2,71828$$

Anmerkung

Wenn man zunächst

$$\begin{aligned} e^{0,25} &\approx 1 + 0,25 + \frac{0,25^2}{2!} + \frac{0,25^3}{3!} + \dots + \frac{0,25^8}{8!} \\ &= 1,28402541667696... \end{aligned}$$

berechnet, erhält man

$$\begin{aligned} e &= (e^{0,25})^4 \\ &\approx (1,28402541667696\dots)^4 \\ &\approx 2,718281828 \end{aligned}$$

Hierbei sind neun Nachkommastellen exakt.

6.3.6 Die Irrationalität der eulerschen Zahl

Wir hatten bewiesen, dass die Wurzeln aus 2 und anderen Zahlen irrational sind, diese also keine Brüche sind. Nun werden wir zeigen, dass auch die eulersche Zahl irrational ist. Dazu gehen wir von der Reihendarstellung von e aus.

Wäre die eulersche Zahl rational, so könnte man sie als Bruch darstellen:

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Um die linke Seite und einen möglichst großen Teil der rechten Seite in ganze Zahlen umzuwandeln, multiplizieren wir mit $n!$:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \quad | \cdot n! \\ \frac{m}{n} \cdot n! &= 2 \cdot n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots \\ \underbrace{m \cdot (n-1)!}_{\text{ganzzahlig}} &= \underbrace{2 \cdot n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_{\text{ganzzahlig}} + \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots}_R \end{aligned}$$

Nun schätzen wir den Rest R wieder mittels einer geometrischen Reihe ab und sehen, dass er kleiner als 1 ist und somit keine ganze Zahl sein kann.

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \dots \\
 &= \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\
 &< \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1)(n+1)} + \dots \\
 &= \left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
 &= \frac{1}{(n+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{1}{n} \leq 1
 \end{aligned}$$

Also ist der Rest R in der Tat kleiner als 1, $R < 1$, und kann keine ganze Zahl sein. Die Gleichung

$$\underbrace{m \cdot (n-1)!}_{\text{ganzzahlig}} = \underbrace{2 \cdot n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_{\text{ganzzahlig}} + \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots}_R$$

kann somit niemals erfüllt werden, die eulersche Zahl kann kein Bruch sein.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 6.1

1.

a) Berechne $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2\right)^2$ durch zweimaliges Quadrieren; rechne mit vier Nachkommastellen.

b) Berechne $\left(1 + \frac{1}{8}\right)^8$ durch dreimaliges Quadrieren; rechne mit vier Nachkommastellen.

c) Berechne $\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{16}$ durch viermaliges Quadrieren; rechne mit vier Nachkommastellen.

d) Berechne $\left(1 + \frac{1}{1024}\right)^{1024}$ durch zehnmaliges Quadrieren; rechne mit sechs Nachkommastellen.

Aufgaben zu Kapitel 6.2

1. Zerlege in Zweierpotenzen:

a) 10 b) 24 c) 41

2. Berechne die nachstehenden Potenzen durch Rückführung auf Potenzen mit den Exponenten 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Rechne mit vier Nachkommastellen:

a) $1,01^{10}$ b) $1,01^{24}$ c) $1,01^{41}$

Aufgaben zu Kapitel 6.3

1. Berechne $6!$, $7!$, $8!$, $9!$, $10!$

2. Verwandle die Zahlen mithilfe der Methode von Kapitel 5.2 in Brüche:

a) $0,232323\dots$ b) $0,444\dots$ c) $0,235235235\dots$

3. Berechne:

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ b) $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

4. Berechne bzw. schätze die Abweichungen bei den folgenden Näherungen:

a) $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$ b) $\frac{1}{1-x} \approx 1+x+x^2$

c) $\frac{1}{1-0,03} \approx 1+0,03$ d) $\frac{1}{1-0,03} \approx 1+0,03+0,03^2$

e) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

5. Schätze die Reste für die Näherungen:

a) $e^x \approx 1+x$ b) $e^{0,1} \approx 1+0,1$

6.

a) Berechne e auf zwei Nachkommastellen.

b) Wie groß ist die Abweichung bei der Näherung

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} ?$$

7. Logarithmen

7.1 Die Grundidee der Logarithmen

Die Grundidee der Logarithmen kann so zusammengefasst werden:

Schreibe alle Zahlen als Potenzen einer festen Basis und benutze die vier Potenzregeln

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Auf diese Weise werden die links stehenden Rechenoperationen auf niedrigere Operationen (rechte Seite) zurückgeführt, das heißt:

- Eine Multiplikation wird zu einer Addition.
- Eine Division wird zu einer Subtraktion.
- Das Potenzieren wird zu einer Multiplikation.
- Das Wurzelziehen wird zu einer Division.

Zunächst betrachten wir nun zu jeder Operation ein Beispiel, wobei die kleine handliche Zahl 2 als gemeinsame Basis genommen wird. Anschließend betrachten wir noch zwei

Beispiele mit der eulerschen Zahl e als Basis. Wir benutzen die folgende Tabelle von Potenzen von 2:

Potenzen von 2

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

$$2^7 = 128$$

$$2^8 = 256$$

$$2^9 = 512$$

$$2^{10} = 1024$$

Beispiel 1 (Multiplikation)

Berechne $8 \cdot 32$ mit Hilfe von Potenzen.

Lösung

1. Schreibe 8 und 32 als Potenzen:

Der Tabelle entnimmt man:

$$8 = 2^3$$

$$32 = 2^5$$

2. Multipliziere mit Hilfe der ersten Potenzregel:

Durch die Anwendung der Potenzregel müssen wir lediglich eine Addition durchführen:

$$\begin{aligned}8 \cdot 32 &= 2^3 \cdot 2^5 \\ &= 2^{3+5} \\ &= 2^8\end{aligned}$$

3. Bestimme den Wert der Potenz:

Unser Ergebnis ist die Potenz 2^8 , deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$2^8 = 256$$

Also ist $8 \cdot 32 = 256$.

Beispiel 2 (Division)

Berechne $512 : 32$ mit Hilfe von Potenzen.

Lösung

1. Schreibe 512 und 32 als Potenzen:

Der Tabelle entnimmt man:

$$\begin{aligned}512 &= 2^9 \\ 32 &= 2^5\end{aligned}$$

2. Dividiere mit Hilfe der zweiten Potenzregel:

Durch die Anwendung der Potenzregel müssen wir lediglich eine Subtraktion durchführen:

$$\begin{aligned}\frac{512}{32} &= \frac{2^9}{2^5} \\ &= 2^{9-5} \\ &= 2^4\end{aligned}$$

3. Bestimme den Wert der Potenz:

Unser Ergebnis ist die Potenz 2^4 , deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$2^4 = 16$$

Also ist $512:32 = 16$.

Beispiel 3 (Potenzieren)

Berechne 4^5 mit Hilfe von Potenzen.

Lösung

1. Schreibe 4 als Potenz:

Der Tabelle entnimmt man:

$$4 = 2^2$$

2. Potenziere mit Hilfe der dritten Potenzregel:

Durch die Anwendung der Potenzregel müssen wir lediglich eine Multiplikation durchführen:

$$\begin{aligned}4^5 &= (2^2)^5 \\ &= 2^{2 \cdot 5} \\ &= 2^{10}\end{aligned}$$

3. Bestimme den Wert der Potenz:

Unser Ergebnis ist die Potenz 2^{10} , deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$2^{10} = 1024$$

Also ist $4^5 = 1024$.

Beispiel 4 (Wurzelziehen)

Berechne $\sqrt[4]{256}$ mit Hilfe von Potenzen.

Lösung

1. Schreibe 256 als Potenz:

Der Tabelle entnimmt man:

$$256 = 2^8$$

2. Ziehe die Wurzel mit Hilfe der vierten Potenzregel:

Durch die Anwendung der Potenzregel müssen wir lediglich eine Division durchführen:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{256} &= \sqrt[4]{2^8} \\ &= 2^{\frac{8}{4}} \\ &= 2^2\end{aligned}$$

3. Bestimme den Wert der Potenz:

Unser Ergebnis ist die Potenz 2^2 , deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$2^2 = 4$$

Also ist $\sqrt[4]{256} = 4$.

Beispiel 5 (Multiplikation, Basis e)

Berechne $1,42 \cdot 1,63$ mit Hilfe von Potenzen.

Lösung

1. Schreibe 1,42 und 1,63 als Potenzen von e :

Der Tabelle auf Seite 237 entnimmt man:

$$1,42 \approx e^{0,35}$$

$$1,63 \approx e^{0,49}$$

2. Multipliziere mit Hilfe der ersten Potenzregel:

Durch die Anwendung der Potenzregel müssen wir lediglich eine Addition durchführen:

$$\begin{aligned} 1,42 \cdot 1,63 &\approx e^{0,35} \cdot e^{0,49} \\ &= e^{0,35+0,49} \\ &= e^{0,84} \end{aligned}$$

3. Bestimme den Wert der Potenz:

Unser Ergebnis ist die Potenz $e^{0,84}$, deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$e^{0,84} \approx 2,31$$

Also ist $1,42 \cdot 1,63 \approx 2,31$.

Beispiel 6 (Wurzelziehen, Basis e)

Berechne $\sqrt[3]{2,5}$ mit Hilfe von Potenzen.

Lösung

1. Schreibe 2,5 als Potenzen von e :

Der Tabelle auf Seite 237 entnimmt man:

$$2,50 \approx e^{0,92}$$

2. Wurzelziehen mit Hilfe der vierten Potenzregel:

Durch die Anwendung der Potenzregel müssen wir lediglich eine Division durchführen:

$$\begin{aligned}\sqrt[7]{2,5} &\approx \sqrt[7]{e^{0,92}} \\ &= e^{\frac{0,92}{7}} \\ &\approx e^{0,13}\end{aligned}$$

3. Bestimme den Wert der Potenz:

Unser Ergebnis ist die Potenz $e^{0,13}$, deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$e^{0,13} \approx 1,14$$

Also ist $\sqrt[7]{2,5} \approx 1,14$.

Anmerkungen 1

In den Beispielen 1 bis 4 sind Potenzen mit der Basis 2 genommen worden. Auch Michael Stifel (1487-1567) hat in seinem berühmten Buch *Arithmetica Integra* (1544) die Basis 2 genommen, um zu erläutern, dass die Addition und Subtraktion der Exponenten genau der Multiplikation und Division der Potenzen entspricht.

Hier ist ein übersetzter Auszug der betreffenden Stelle aus dem Buch, wobei die kleine Tabelle tatsächlich ein Scan der Ausgabe von 1544 ist:

„ ...

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

...

Das Multiplizieren und Dividieren bei der geometrischen Progression [obere Tabellenzeile] entspricht dem Addieren und Subtrahieren bei der arithmetische Progression [untere Tabellenzeile].

Ein Beispiel

$\frac{1}{8}$ multipliziert mit 64 ergibt 8. Entsprechend: -3 addiert zu 6 ergibt 3. Aber -3 ist der Exponent von $\frac{1}{8}$, genauso wie 6 der Exponent der Zahl 64, und 3 der Exponent der Zahl 8 ist.

64 durch $\frac{1}{8}$ dividiert gibt 512; so ist -3 subtrahiert von 6 entsprechend 9. Und 9 ist der Exponent dieser Zahl 512.

Die Division von $\frac{1}{8}$ durch 64 ergibt $\frac{1}{512}$.

Wenn also 6 von -3 subtrahiert wird, bleibt -9 . Jetzt ist -9 der Exponent dieses Bruchs $\frac{1}{512}$.“

In diesem Auszug taucht erstmals in der Mathematik das Wort **Exponent** auf. Die wiedergegebene Stelle hat

vermutlich auch John Napier (1550-1617) und Jost Bürgi (1552-1632) zu ihren Logarithmentafeln angeregt.

Bürgi hat die Basis 1,0001 gewählt, was $e^{0,0001}$ entspricht, und im Wesentlichen unser Vorgehen in Kapitel 6 ist. Die obigen Beispiele 5 und 6 sind ganz im Geiste von Bürgi.

Anmerkungen 2

Der Engländer Henry Briggs nahm Napiers Logarithmen begeistert auf und begann eine eigene Logarithmentafel zu erstellen. Er benutzte jedoch die **Basis 10**, die besser an unser Zahlensystem angepasst und damit wesentlich praktischer ist. Um mit Napier persönlich darüber zu sprechen, nahm er im Jahre 1616 zweimal die Strapazen einer etwa viertägigen Reise von London nach Edinburgh auf sich – wie damals üblich, zu Pferd und mit der Kutsche.

Zum Abschluss des Abschnitts sind Bildnisse und einige biographische Daten der Personen, die an der Entdeckung und Entwicklung der Logarithmen beteiligt waren, zusammengestellt:

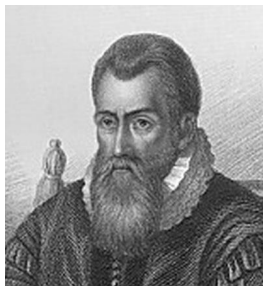


Michael Stifel

* 1487 in Esslingen, Deutschland,

† 1567 in Jena, Deutschland

Protestantischer Pfarrer, Freund Luthers



John Napier

* 1550 in Edinburgh, Schottland

† 1617 in Edinburgh, Schottland

Landbesitzer, Mathematiker,
Astronom, protestantischer
Theologe

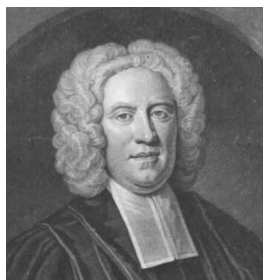


Jost Bürgi

* 1552 Lichtensteig, Schweiz

† 1632, Kassel, Deutschland

Uhrmacher, Instrumenten-
bauer, Astronom. Mit Kepler
in Prag am Hof des Kaisers.



Henry Briggs

* 1561 in Warleywood, England,

† 1630 in Oxford, England

Mathematiker, Puritaner

7.2 Logarithmen: Definition

Vor der formalen Definition von Logarithmen untersuchen wir, welche Zahlen überhaupt als Potenzen geschrieben werden können. In Kapitel 5 wurde bereits bemerkt, dass Potenzen stets **positiv** sind:

1. Potenzen sind nicht negativ, denn jede Potenz kann als Quadrat geschrieben werden, und Quadrate sind niemals negativ:

$$a^n = (a^{n/2})^2 \geq 0$$

2. Potenzen sind niemals Null, denn

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$$

$$a^n \cdot a^{-n} = 1$$

Also ist jede Potenz tatsächlich positiv: $a^n > 0$.

Nun werden wir nacheinander die folgenden Logarithmen betrachten:

1. Logarithmen zur Basis 2
2. Logarithmen zur Basis e
3. Logarithmen zur Basis 10
4. Logarithmen zu einer beliebigen Basis b

7.2.1 Logarithmen zur Basis 2

Der *binäre Logarithmus* einer beliebigen positiven Zahl x ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz von 2 darzustellen:

$$x = 2^?$$

$$x = 2^{\text{Logarithmus von } x}$$

$$x = 2^{\text{lb } x}$$

Der binäre Logarithmus von x wird als $\text{lb } x$ geschrieben, manchmal auch als $\text{ld } x$.

Die Zahl (hier x), von der der Logarithmus betrachtet wird, wird als *Numerus* bezeichnet.

Beispiel 1

$$\text{lb } 1 = ?$$

Lösung

$$1 = 2^?$$

$$1 = 2^0$$

Also ist

$$\text{lb } 1 = 0$$

Beispiel 2

$$\text{lb } 2 = ?$$

Lösung

$$2 = 2^?$$

$$2 = 2^1$$

Also ist

$$\text{lb } 2 = 1$$

Beispiel 3

$$\text{lb} 8 = ?$$

Lösung

$$8 = 2^?$$

$$8 = 2^3$$

Also ist

$$\text{lb} 8 = 3$$

Beispiel 4

$$\text{lb} \sqrt{2} = ?$$

Lösung

$$\sqrt{2} = 2^?$$

$$\sqrt{2} = 2^{0,5}$$

Also ist

$$\text{lb} \sqrt{2} = 0,5$$

Beispiel 5

$$\text{lb} \frac{1}{8} = ?$$

Lösung

$$\frac{1}{8} = 2^?$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

Also ist

$$\text{lb} \frac{1}{8} = -3$$

7.2.2 Logarithmen zur Basis e

Der *natürliche Logarithmus* einer beliebigen positiven Zahl x ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz der eulerschen Zahl e darzustellen:

$$x = e^?$$

$$x = e^{\text{Logarithmus von } x}$$

$$x = e^{\ln x}$$

Der natürliche Logarithmus von x wird als $\ln x$ geschrieben. Das Adjektiv „natürlich“ kommt daher, dass sich die eulersche Zahl als Basis von Potenzen zwanglos ergibt, zum Beispiel aus der Näherung $e^x \approx 1 + x$ (s. Kapitel 6).

Wie gesagt, wird die Zahl (hier x), von der der Logarithmus betrachtet wird, als *Numerus* bezeichnet.

Beispiel 1

$$\ln 1 = ?$$

Lösung

$$1 = e^?$$

$$1 = e^0$$

Also ist

$$\ln 1 = 0$$

Beispiel 2

$$\ln e = ?$$

Lösung

$$e = e^?$$

$$e = e^1$$

Also ist

$$\ln e = 1$$

Beispiel 3

$$\ln e^3 = ?$$

Lösung

$$e^3 = e^?$$

Der Numerus ist hier bereits als Potenz von e gegeben. Also ist

$$\ln e^3 = 3$$

Beispiel 4

$$\ln \sqrt{e} = ?$$

Lösung

$$\sqrt{e} = e^?$$

$$\sqrt{e} = e^{0,5}$$

Also ist

$$\ln \sqrt{e} = 0,5$$

Beispiel 5

$$\ln \frac{1}{e^2} = ?$$

Lösung

$$\frac{1}{e^2} = e^?$$

$$\frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

Also ist

$$\ln \frac{1}{e^2} = -2$$

7.2.3 Logarithmen zur Basis 10

Der *dekadische* oder *Zehnerlogarithmus* einer beliebigen positiven Zahl x ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz von 10 darzustellen:

$$x = 10^?$$

$$x = 10^{\text{Logarithmus von } x}$$

$$x = 10^{\log x}$$

Der Zehnerlogarithmus von x wird als $\log x$ geschrieben, manchmal auch kurz als $\lg x$.

Auch hier wird die Zahl, von der der Logarithmus betrachtet wird, als *Numerus* bezeichnet.

Beispiel 1

$$\log 1 = ?$$

Lösung

$$1 = 10^?$$

$$1 = 10^0$$

Also ist

$$\log 1 = 0$$

Beispiel 2

$$\log 10 = ?$$

Lösung

$$10 = 10^?$$

$$10 = 10^1$$

Also ist

$$\log 10 = 1$$

Beispiel 3

$$\log 1000 = ?$$

Lösung

$$1000 = 10^3$$

$$1000 = 10^3$$

Also ist

$$\log 1000 = 3$$

Beispiel 4

$$\log \sqrt{10} = ?$$

Lösung

$$\sqrt{10} = 10^{0,5}$$

$$\sqrt{10} = 10^{0,5}$$

Also ist

$$\log \sqrt{10} = 0,5$$

Beispiel 5

$$\log 0,01 = ?$$

Lösung

$$0,01 = 10^{-2}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

Also ist

$$\log 0,01 = -2$$

7.2.4 Logarithmen zu einer beliebigen Basis b

Der *Logarithmus* einer positiven Zahl x zur Basis b ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz von b darzustellen:

$$x = b^?$$

$$x = b^{\text{Logarithmus von } x}$$

$$x = b^{\log_b x}$$

Der Logarithmus von x zur Basis b wird als $\log_b x$ geschrieben. Die Basis b kann jede positive Zahl außer 1 sein (denn $1^n = 1$).

Wie gesagt, wird die Zahl x , von der der Logarithmus betrachtet wird, als *Numerus* bezeichnet.

Beispiel 1

$$\log_b 1 = ?$$

Lösung

$$1 = b^?$$

$$1 = b^0$$

Also ist

$$\log_b 1 = 0$$

Beispiel 2

$$\log_b b = ?$$

Lösung

$$b = b^?$$

$$b = b^1$$

Also ist

$$\log_b b = 1$$

Beispiel 3

$$\log_b b^3 = ?$$

Lösung

$$b^3 = b^?$$

Der Numerus ist hier bereits als Potenz von b gegeben. Also ist

$$\log_b b^3 = 3$$

Beispiel 4

$$\log_b \sqrt{b} = ?$$

Lösung

$$\sqrt{b} = b^?$$

$$\sqrt{b} = b^{0,5}$$

Also ist

$$\log_b \sqrt{b} = 0,5$$

Beispiel 5

$$\log_b \frac{1}{b^2} = ?$$

Lösung

$$\frac{1}{b^2} = b^?$$

$$\frac{1}{b^2} = b^{-2}$$

Also ist

$$\log_b \frac{1}{b^2} = -2$$

7.3 Regeln für Logarithmen

Die für die Logarithmen gültigen Regeln sind nichts anders als die Potenzregel in neuem Gewand. Hier trifft die Aussage Johann Wolfgang Goethes (1749-1832) zu:

„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.“

Im Wesentlichen besagen die Regeln für die Logarithmen, dass beim Übergang von Zahlen zu Logarithmen die Stufe der Rechenarten verringert wird. Die Regeln gelten für eine beliebige Basis; im Falle des natürlichen Logarithmus lauten sie:

1. Logarithmus eines Produktes

Der Logarithmus eines Produktes ist die Summe der Logarithmen der Faktoren:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

2. Logarithmus eines Quotienten

Der Logarithmus eines Bruchs (Quotienten) ist die Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner:

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

3. Logarithmus einer Potenz

Der Logarithmus einer Potenz ist das Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis:

$$\ln(x^n) = n \cdot \ln x$$

4. Logarithmus einer Wurzel

Der Logarithmus einer Wurzel ist der Logarithmus des Radikanden, dividiert durch die Ordnung der Wurzel:

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}$$

Diese vier Regeln werden nun bewiesen und an Beispielen illustriert. Die Grundidee bei allen Beweisen besteht darin, die gegebenen Zahlen als Potenzen zu schreiben.

Beweis der Regel 1

Wir berechnen $\ln(x \cdot y)$. Dazu müssen wir $x \cdot y$ als Potenz von e schreiben. Um das zu erreichen, schreiben wir x und y als Potenzen:

$$x = e^{\ln x}$$

$$y = e^{\ln y}$$

Also

$$\begin{aligned} x \cdot y &= e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} \\ &= e^{\ln x + \ln y} \end{aligned}$$

Somit

$$x \cdot y = e^{\ln x + \ln y},$$

was nach Definition des Logarithmus bedeutet, dass

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Beweis der Regel 2

Wir berechnen $\ln \frac{x}{y}$. Dazu müssen wir $\frac{x}{y}$ als Potenz von e schreiben. Um das erreichen, schreiben wir x und y als Potenzen:

$$x = e^{\ln x}$$

$$y = e^{\ln y}$$

Also

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} &= \frac{e^{\ln x}}{e^{\ln y}} \\ &= e^{\ln x - \ln y}\end{aligned}$$

Somit

$$\frac{x}{y} = e^{\ln x - \ln y},$$

was nach Definition des Logarithmus bedeutet, dass

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

Beweis der Regel 3

Wir berechnen $\ln(x^n)$. Dazu müssen wir x^n als Potenz von e schreiben. Um das erreichen, schreiben wir x als Potenz:

$$x = e^{\ln x}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}x^n &= (e^{\ln x})^n \\ &= e^{n \cdot \ln x}\end{aligned}$$

Somit

$$x^n = e^{n \cdot \ln x},$$

was nach Definition des Logarithmus bedeutet, dass

$$\ln(x^n) = n \cdot \ln x.$$

Beweis der Regel 4

Wir berechnen $\ln \sqrt[n]{x}$. Dazu müssen wir $\sqrt[n]{x}$ als Potenz von e schreiben. Um das zu erreichen, schreiben wir x als Potenz:

$$x = e^{\ln x}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{x} &= \sqrt[n]{e^{\ln x}} \\ &= e^{(\ln x)/n}\end{aligned}$$

Somit

$$\sqrt[n]{x} = e^{(\ln x)/n},$$

was nach Definition des Logarithmus bedeutet, dass

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}.$$

Anmerkung

Da Wurzeln als Potenzen aufgefasst werden können, ist die Regel 4 ein Sonderfall der Regel 3:

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[n]{x} &= \ln(x^{1/n}) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \ln x \quad (\text{nach Regel 3}). \\ &= \frac{\ln x}{n}\end{aligned}$$

Nun folgen Beispiele, die die Anwendung der Regeln zeigen. Dabei wird auf die Tabelle auf der Seite 237 zurückgegriffen. Wir schreiben dabei meist Gleichheitszeichen, obwohl die Logarithmen Näherungswerte sind.

Beispiel 1 (Multiplikation)

Berechne $1,42 \cdot 1,63$ mit Hilfe von Logarithmen.

Lösung 1 (ausführlich)**1. Berechne den Logarithmus des gesuchten Produkts:**

$$\begin{aligned}\ln(1,42 \cdot 1,63) &= \ln(1,42) + \ln(1,63) \\ &= 0,35 + 0,49 \\ &= 0,84\end{aligned}$$

2. Bestimme den Numerus (Potenzwert):

Unser Produkt hat den Logarithmus 0,84. Das Produkt selber ist dann die Potenz $e^{0,84}$, deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$e^{0,84} \approx 2,31$$

Also ist $1,42 \cdot 1,63 \approx 2,31$.

Lösung 2 (kurz und schematisch)

$$\begin{array}{rcl}
 \ln(1,42) & = & 0,35 \\
 \ln(1,63) & = & +0,49 \\
 \hline
 \ln(1,42 \cdot 1,63) & = & 0,84 \\
 1,42 \cdot 1,63 & = & e^{0,84} = 2,31
 \end{array}$$

Also ist $1,42 \cdot 1,63 \approx 2,31$.

Beispiel 2 (Division)

Berechne $2,45:1,87$ mit Hilfe von Logarithmen.

Lösung 1 (ausführlich)

1. Berechne den Logarithmus des gesuchten Quotienten:

$$\begin{aligned}
 \ln(2,45/1,87) &= \ln(2,45) - \ln(1,87) \\
 &= 0,90 - 0,63 \\
 &= 0,27
 \end{aligned}$$

2. Bestimme den Numerus (Potenzwert):

Unser Quotient hat den Logarithmus 0,27. Der Quotient selber ist dann die Potenz $e^{0,27}$, deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$e^{0,27} \approx 1,31$$

Also ist $2,45:1,87 \approx 1,31$.

Lösung 2 (kurz und schematisch)

$$\begin{array}{rcl}
 \ln(2,45) & = & 0,90 \\
 -\ln(1,87) & = & -0,63 \\
 \hline
 \ln(2,45:1,87) & = & 0,27 \\
 2,45:1,87 & = & e^{0,27} = 1,31
 \end{array}$$

Also ist $2,45:1,87 \approx 1,31$.

Beispiel 3 (Potenzieren)

Berechne $1,04^{10}$ mit Hilfe von Logarithmen.

Lösung 1 (ausführlich)

1. Berechne den Logarithmus der gesuchten Potenz:

$$\begin{aligned}
 \ln(1,04^{10}) &= 10 \cdot \ln 1,04 \\
 &= 10 \cdot 0,04 \\
 &= 0,40
 \end{aligned}$$

2. Bestimme den Numerus (Potenzwert):

Unsere Potenz hat den Logarithmus 0,40. Die Potenz selber ist dann die Potenz $e^{0,40}$, deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$e^{0,40} \approx 1,49$$

Also ist $1,04^{10} \approx 1,49$.

Lösung 2 (kurz und schematisch)

$$\begin{array}{rcl}
 \ln(1,04) & = & 0,04 \quad | \cdot 10 \\
 \ln(1,04^{10}) & = & 0,40 \\
 \hline
 1,04^{10} & = & e^{0,40} = 1,49
 \end{array}$$

Also ist $1,04^{10} \approx 1,49$.

Beispiel 4 (Wurzelziehen)

Berechne $\sqrt[7]{2,5}$ mit Hilfe von Logarithmen.

Lösung 1 (ausführlich)

1. Berechne den Logarithmus der gesuchten Wurzel:

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[7]{2,5} &= \frac{\ln 2,5}{7} \\ &= \frac{0,92}{7} \\ &\approx 0,13\end{aligned}$$

2. Bestimme den Numerus (Potenzwert):

Unser Wurzel hat den Logarithmus 0,13. Die Wurzel selber ist dann die Potenz $e^{0,13}$, deren Wert wir wieder der Tabelle entnehmen können:

$$e^{0,13} \approx 1,14$$

Also ist $\sqrt[7]{2,5} \approx 1,14$.

Lösung 2 (kurz und schematisch)

$$\begin{array}{rcl}\ln(2,5) &= & 0,92 \quad | :7 \\ \ln(\sqrt[7]{2,5}) &= & 0,13 \\ \hline \sqrt[7]{2,5} &= & e^{0,13} = 1,14\end{array}$$

Also ist $\sqrt[7]{2,5} \approx 1,14$.

7.4 Logarithmen mit unterschiedlichen Basen

Die Kapitel 6.2 und 6.3 zeigen, dass die Berechnung der Potenzen von e nicht sehr aufwendig ist. Eine Tabelle von e -Potenzen (wie die auf Seite 237) kann auch umgekehrt gelesen und so als Logarithmentafel benutzt werden.

Für praktische Berechnungen sind in unserem Zahlensystem die Zehner-Logarithmen effizienter als die natürlichen Logarithmen. Erfreulicherweise kann man die Zehner-Logarithmen sehr einfach aus den natürlichen Logarithmen berechnen. Wir werden dies nun am Beispiel des dekadischen Logarithmus von 2 erläutern. Danach werden allgemeinere Situationen betrachtet, insbesondere auch die Umrechnung von Logarithmen mit beliebiger Basis.

7.4.1 Berechnung von $\log 2$

Der gesuchte $\log 2$ ist der Exponent, der nötig ist, um 2 als Potenz von 10 zu schreiben:

$$2 = 10^?$$

$$2 = 10^x$$

Hierbei haben wir wie üblich die gesuchte Größe als x bezeichnet. Nun nehmen wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus und benutzen die Regel für den Logarithmus einer Potenz:

$$2 = 10^x$$

$$\ln 2 = \ln(10^x)$$

$$\ln 2 = x \cdot \ln 10$$

Um x freizustellen, dividiert man beide Seiten durch $\ln 10$:

$$\ln 2 = x \cdot \ln 10$$

$$\frac{\ln 2}{\ln 10} = x$$

Der gesuchte Logarithmus ist also

$$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$$

Wir müssen nun $\ln 2$ und $\ln 10$ bestimmen, und dann den Quotienten berechnen.

Bestimmung von $\ln 2$

Der Tabelle auf Seite 237 entnehmen wir, dass

$$e^{0,69} \approx 1,99$$

$$e^{0,70} \approx 2,01$$

Nun liegt 2 genau in der Mitte zwischen den Werten 1,99 und 2,01, also ist ungefähr

$$e^{0,695} \approx 2,00$$

Das bedeutet:

$$\ln 2 \approx 0,695$$

Bestimmung von $\ln 10$

In der Tabelle auf Seite 237 ist der höchste Potenzwert 2,70, unser Wert 10 wird nicht von der Tabelle abgedeckt. Wir benutzen zur Umschiffung des Hindernisses den Kunstgriff, 10 in kleinere Faktoren zu zerlegen:

$$10 = 2 \cdot 2 \cdot 2,5$$

Der Tabelle entnehmen wir:

$$\ln 2,5 \approx 0,92$$

Damit kann nun $\ln 10$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}\ln 10 &= \ln(2 \cdot 2 \cdot 2,5) \\ &= \ln 2 + \ln 2 + \ln 2,5 \\ &\approx 0,695 + 0,695 + 0,92 \\ &= 2,31\end{aligned}$$

Somit

$$\ln 10 \approx 2,31$$

Berechnung von $\log 2$

Wir setzen die Teilergebnisse ein und bekommen:

$$\begin{aligned}\log 2 &= \frac{\ln 2}{\ln 10} \\ &\approx \frac{0,695}{2,31} \\ &= 0,3008... \\ &\approx 0,30\end{aligned}$$

Also $\log 2 \approx 0,30$

7.4.2 Berechnung von $\log a$

Der gesuchte $\log a$ ist der Exponent, der nötig ist, um a als Potenz von 10 zu schreiben:

$$a = 10^x \quad | \text{Logarithmus nehmen}$$

$$\ln a = \ln(10^x)$$

$$\ln a = x \cdot \ln 10 \quad | : \ln 10$$

$$\frac{\ln a}{\ln 10} = x$$

$$x = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

Der gesuchte Logarithmus ist also

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

Mit dieser Formel kann eine Tabelle der Zehnerlogarithmen erstellt werden. Um die wiederholten Divisionen zu vermeiden kann man auf die altbabylonische Methode zurückgreifen und die Division als Produkt mit dem Kehrwert des Teilers schreiben:

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

$$\log a = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln a$$

So muss man nur einmal dividieren (um den Kehrwert zu berechnen) und braucht anschließend nur Multiplikationen durchzuführen, die wesentlich einfacher sind. Konkret ist in unserem Fall:

$$\ln 10 \approx 2,31$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln 10} &\approx \frac{1}{2,31} \\ &= 0,4329... \\ &\approx 0,43.\end{aligned}$$

Also

$$\log a \approx 0,43 \cdot \ln a$$

Wir nehmen nun die Logarithmen mit einer beliebigen Basis b ins Visier.

7.4.3 Berechnung von $\log_b a$

Der gesuchte Logarithmus $\log_b a$ ist der Exponent, der erforderlich ist, um a als Potenz von b zu schreiben:

$$a = b^x \quad | \text{Logarithmus nehmen}$$

$$\ln a = \ln(b^x)$$

$$\ln a = x \cdot \ln b \quad | : \ln b$$

$$\frac{\ln a}{\ln b} = x$$

$$x = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Der gesuchte Logarithmus ist also

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man in $a = b^x$ die Basis b als Potenz von e schreibt:

$$\begin{aligned} a &= b^x & | b = e^{\ln b} \text{ einsetzen} \\ a &= (e^{\ln b})^x \\ a &= e^{x \cdot \ln b} \end{aligned}$$

Das bedeutet nach Definition des Logarithmus, dass

$$\ln a = x \cdot \ln b$$

Durch $\ln b$ dividiert, ergibt sich

$$x = \frac{\ln a}{\ln b} \quad \text{und} \quad \log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

7.4.4 Beziehung zwischen $\log_b a$ und $\log_c a$

Die Rolle des natürlichen Logarithmus im vorigen Abschnitt wird nun vom Logarithmus mit der Basis c übernommen. Die Berechnungen sind völlig analog:

Ausgehend von der Definition berechnen wir $\log_b a$ durch Anwendung von $\log_c$.

Der Logarithmus $\log_b a$ ist der Exponent x , der erforderlich ist, um a als Potenz von b zu schreiben:

$$\begin{aligned} a &= b^x & | \log_c \text{ nehmen} \\ \log_c a &= \log_c (b^x) \\ \log_c a &= x \cdot \log_c b & | : \log_c b \end{aligned}$$

$$x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Der gesuchte Logarithmus ist also

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Eine Variante ohne Bruch ergibt sich durch Multiplikation mit dem Nenner:

$$\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$$

Diese auf den ersten Blick unübersichtliche Beziehung hat jedoch eine aus dem Bruchrechnen bekannte Struktur:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

Zum Abschluss des Kapitels betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1 (Zehnerlogarithmus)

Berechne $\log 1,5$.

Lösung

$$\begin{aligned}\log 1,5 &= \log_{10} 1,5 \\ &= \frac{\ln 1,5}{\ln 10}\end{aligned}$$

Die Tabelle auf Seite 237 liefert:

$$\ln 1,5 \approx 0,41$$

Auf Seite 291 hatten wir $\ln 10 \approx 2,31$ berechnet. Also:

$$\begin{aligned}\frac{\ln 1,5}{\ln 10} &\approx \frac{0,41}{2,31} \\ &= 0,177489... \\ &\approx 0,18\end{aligned}$$

Daher:

$$\log 1,5 \approx 0,18$$

Beispiel 2 (Zehnerlogarithmus, Zerlegung)

Berechne $\log 3$.

Lösung

Durch die Zerlegung $3 = 2 \cdot 1,5$ kann der Logarithmus von 3 auf die Logarithmen von 2 und 1,5 zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}\log 3 &= \log(2 \cdot 1,5) \\ &= \log 2 + \log 1,5 \\ &\approx 0,30 + 0,18 \\ &= 0,48\end{aligned}$$

Also

$$\log 3 \approx 0,48$$

Beispiel 3 (Zehnerlogarithmus, Zerlegung)

Berechne $\log 9$.

Lösung

1. Wir zerlegen 9 folgendermaßen:

$$\begin{aligned}9 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{9}{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ 9 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,125\end{aligned}$$

2. Der Zehnerlogarithmus von 2 wurde bereits berechnet:

$$\log 2 \approx 0,30$$

3. Berechnung von $\log 1,125$

Der natürliche Logarithmus $\ln 1,125 \approx 0,115$ kann als Zwischenwert aus der Tabelle auf Seite 237 gewonnen werden. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}\log 1,125 &= \frac{\ln 1,125}{\ln 10} \\ &= \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln 1,125 \\ &\approx 0,43 \cdot 0,115 \\ &\approx 0,05\end{aligned}$$

4. Berechnung von $\log 9$

$$\begin{aligned}\log 9 &= \log (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,125) \\ &= \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 1,125 \\ &= 3 \cdot \log 2 + \log 1,125 \\ &\approx 3 \cdot 0,30 + 0,05 \\ &= 0,95\end{aligned}$$

Also:

$$\log 9 \approx 0,95$$

Beispiel 4 (Binärer Logarithmus)

Berechne $\text{lb } 1,5$.

Lösung

$$\text{lb } 1,5 = \log_2 1,5 = \frac{\ln 1,5}{\ln 2}$$

Die Tabelle auf Seite 237 liefert:

$$\ln 1,5 \approx 0,41$$

$$\ln 2 \approx 0,695$$

Also:

$$\begin{aligned}\frac{\ln 1,5}{\ln 2} &\approx \frac{0,41}{0,695} \\ &= 0,5899280... \\ &\approx 0,59\end{aligned}$$

Beispiel 5 (Wissenschaftliche Notation)

Berechne $\log(3 \cdot 10^{20})$.

Lösung

Wir benutzen die Regeln für Logarithmen und das Ergebnis von Beispiel 2:

$$\begin{aligned}\log(3 \cdot 10^{20}) &= \log 3 + \log(10^{20}) \\ &= \log 3 + 20 \\ &\approx 0,48 + 20 \\ &= 20,48\end{aligned}$$

Also:

$$\log(3 \cdot 10^{20}) \approx 20,48$$

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 7.1

1. Benutze die Tabelle der Zweierpotenzen, um die folgenden Rechenaufgaben zu lösen:

- a) $16 \cdot 16$ b) $1024 : 16$ c) 8^3 d) $\sqrt[3]{512}$ e) $\sqrt[3]{64}$

2. Benutze die Tabelle der e -Potenzen auf Seite 237, um die folgenden Rechenaufgaben zu lösen:

- a) $1,21 \cdot 1,44$ b) $2,15 : 1,82$ c) $1,05^{10}$ d) $\sqrt[3]{2,3}$

Aufgaben zu Kapitel 7.2

1. Bestimme:

- a) $\text{lb } 4$ b) $\text{lb } 32$ c) $\text{lb } 0,5$ d) $\text{lb } \sqrt[3]{2}$ e) $\text{lb } \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

2. Bestimme:

- a) $\ln e^4$ b) $\ln \sqrt[5]{e}$ c) $\ln \frac{1}{e}$ d) $\ln \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$

3. Bestimme:

- a) $\lg 100$ b) $\lg 0,1$ c) $\lg \sqrt[5]{10}$

4. Bestimme:

- a) $\log_b b^2$ b) $\log_b \frac{1}{b}$ c) $\log_5 25$ d) $\log_5 0,2$

Aufgaben zu Kapitel 7.3

1. Berechne mithilfe von Logarithmen und der Tabelle auf Seite 237:

a) $1,26 \cdot 1,53$ b) $2,62 : 1,95$ c) $1,02^{20}$ d) $\sqrt[5]{2,57}$

2. Berechne mithilfe von Logarithmen und der Tabelle auf Seite 237:

a) $2,27 \cdot 1,12$ b) $2,47 : 1,14$ c) $1,06^8$ d) $\sqrt{2,38}$

Aufgaben zu Kapitel 7.4

1. Bestimme:

a) $\lg 1,2$ b) $\lg 5$ c) $\lg 2,3$ d) $\lg 3$

2. Bestimme:

a) $\log_3 e$ b) $\log_{1,2} 10$ c) $\log_5 2$ d) $\log_2 e^2$

8. Erstellung von Logarithmentafeln

In diesem Kapitel betrachten wir klassische Methoden zur Erstellung von Logarithmentafeln.

Die Wahl des Verfahrens hängt von der Basis der Logarithmen ab:

- **Natürliche Logarithmen** (hier ist die Basis e) können ganz im Geiste Jost Bürgis berechnet werden, indem man, ausgehend von $e^{0,001} \approx 1,001$, eine Tafel der Potenzen

$$e^{0,001}, e^{0,002}, e^{0,003}, \dots, e^{0,999}, e^{1,000}$$

berechnet, durch bloßes Multiplizieren. Dann werden daraus rückwärts gelesen die Logarithmen bestimmt.

- **Dekadische oder briggsche Logarithmen** (hier ist die Basis 10) können folgendermaßen gefunden werden. Zunächst zieht man mehrfach die Quadratwurzel aus 10. Dann wird jede Zahl in derartige Wurzeln zerlegt. Dieser Ansatz geht auf Henry Briggs zurück.

Die für das Vorhaben wichtigsten Werkzeuge haben wir bereits besprochen: die Berechnung der Potenzen von e und die Berechnung von Quadratwurzeln.

Von der Exponentialreihe machen wir an dieser Stelle keinen Gebrauch, da sie zu Zeiten von Bürgi und Briggs nicht bekannt war.

Dieses Kapitel besteht daher aus folgenden Teilen:

- 8.1 Erstellung einer Tafel von e -Potenzen
- 8.2 Eine Tafel natürlicher Logarithmen
- 8.3 Erstellung einer Zehnerlogarithmentafel

8.1 Erstellung einer Tafel von e -Potenzen

Das Kapitel 6.2 zeigt, wie man Potenzen von e effizient berechnen kann. Damit kann eine Tabelle von Potenzen erstellt werden; diese kann man auch als Logarithmentafel benutzen, indem man rückwärts nachschlägt. Ohne größeren Aufwand kann man auf diese Art eine Logarithmentafel gewinnen, die den Logarithmus zu jeder Zahl im erfassten Bereich liefert.

Wir werden nun eine *dreistellige* Tafel der Potenzen

$$e^{0,001}, e^{0,002}, e^{0,003}, \dots, e^{0,999}, e^{1,000}$$

d. h.

$$e^{0,001}, (e^{0,001})^2, (e^{0,001})^3, \dots, (e^{0,001})^{999}, (e^{0,001})^{1000}$$

erstellen und anschließend die daraus folgende Logarithmentafel.

Wir wenden uns nun der Berechnung der Potenzen von $e^{0,001}$ zu. Da die Näherung $e^{0,001} \approx 1,001$ nach mehreren Multiplikationen zu größeren Abweichungen führt, werden wir eine bessere Näherung benutzen und danach stets mit sieben Nachkommastellen rechnen.

Um einen besseren Näherungswert für $e^{0,001}$ zu finden, nehmen wir einen kleineren Exponenten:

$$e^{0,0001} \approx 1 + 0,0001 = 1,0001.$$

Mit 7 Nachkommastellen gerechnet, ergibt sich daraus:

$$e^{0,001} = (e^{0,0001})^{10} \approx 1,0001^{10} \approx 1,0010005$$

also

$$e^{0,001} \approx 1,0010005$$

Wir müssen also folgende Potenzen berechnen:

$$e^{0,001} \approx 1,0010005$$

$$e^{0,002} \approx 1,0010005^2$$

$$e^{0,003} \approx 1,0010005^3$$

...

$$e^{0,999} \approx 1,0010005^{999}$$

$$e^{1,000} \approx 1,0010005^{1000}$$

Hierbei ergibt sich der Wert jeder Potenz durch Multiplikation mit 1,0010005 aus der vorangehenden Potenz:

$$1,0010005^2 \approx 1,0010005 \cdot 1,0010005 \approx 1,0020020$$

$$1,0010005^3 \approx 1,0020020 \cdot 1,0010005 \approx 1,0030045$$

$$1,0010005^4 \approx 1,0030045 \cdot 1,0010005 \approx 1,0040080$$

usw.

Dieses Vorgehen führt schließlich zur Berechnung aller Potenzen mit den Exponenten von 1 bis 1000. Auf drei

Nachkommastellen gerundet, ergibt sich die Potenz-Tabelle auf den nachfolgenden Seiten. Sie ist in einer platzsparenden Form geschrieben. Ein Beispiel zeigt, wie man eine Potenz daraus abliest:

Beispiel

$$e^{0,113} = ?$$

Die ersten beiden Nachkommastellen des Exponenten 0,113 stehen in der linken Spalte (11). Die letzte Nachkommastelle (3) steht in der obersten Zeile:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				...						
10	1,105	1,106	1,107	1,108	1,110	1,111	1,112	1,113	1,114	1,115
11	1,116	1,117	1,119	1,120	1,121	1,122	1,123	1,124	1,125	1,126
12	1,127	1,129	1,130	1,131	1,132	1,133	1,134	1,135	1,137	1,138

Also ist $e^{0,113} \approx 1,120$

Anmerkung

Mithilfe der Potenztabelle können auch Potenzen mit größeren Exponenten ohne großen Aufwand berechnet werden, zum Beispiel ist:

$$e^{3,002} = e^{3+0,002} = e^3 \cdot e^{0,002},$$

wobei $e^3 = e \cdot e \cdot e$ keinerlei Probleme bereitet.

Potenztafel $e^{0,000}$ bis $e^{0,359}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1,000	1,001	1,002	1,003	1,004	1,005	1,006	1,007	1,008	1,009
01	1,010	1,011	1,012	1,013	1,014	1,015	1,016	1,017	1,018	1,019
02	1,020	1,021	1,022	1,023	1,024	1,025	1,026	1,027	1,028	1,029
03	1,030	1,031	1,033	1,034	1,035	1,036	1,037	1,038	1,039	1,040
04	1,041	1,042	1,043	1,044	1,045	1,046	1,047	1,048	1,049	1,050
05	1,051	1,052	1,053	1,054	1,055	1,057	1,058	1,059	1,060	1,061
06	1,062	1,063	1,064	1,065	1,066	1,067	1,068	1,069	1,070	1,071
07	1,073	1,074	1,075	1,076	1,077	1,078	1,079	1,080	1,081	1,082
08	1,083	1,084	1,085	1,087	1,088	1,089	1,090	1,091	1,092	1,093
09	1,094	1,095	1,096	1,097	1,099	1,100	1,101	1,102	1,103	1,104
10	1,105	1,106	1,107	1,108	1,110	1,111	1,112	1,113	1,114	1,115
11	1,116	1,117	1,119	1,120	1,121	1,122	1,123	1,124	1,125	1,126
12	1,127	1,129	1,130	1,131	1,132	1,133	1,134	1,135	1,137	1,138
13	1,139	1,140	1,141	1,142	1,143	1,145	1,146	1,147	1,148	1,149
14	1,150	1,151	1,153	1,154	1,155	1,156	1,157	1,158	1,160	1,161
15	1,162	1,163	1,164	1,165	1,166	1,168	1,169	1,170	1,171	1,172
16	1,174	1,175	1,176	1,177	1,178	1,179	1,181	1,182	1,183	1,184
17	1,185	1,186	1,188	1,189	1,190	1,191	1,192	1,194	1,195	1,196
18	1,197	1,198	1,200	1,201	1,202	1,203	1,204	1,206	1,207	1,208
19	1,209	1,210	1,212	1,213	1,214	1,215	1,217	1,218	1,219	1,220
20	1,221	1,223	1,224	1,225	1,226	1,228	1,229	1,230	1,231	1,232
21	1,234	1,235	1,236	1,237	1,239	1,240	1,241	1,242	1,244	1,245
22	1,246	1,247	1,249	1,250	1,251	1,252	1,254	1,255	1,256	1,257
23	1,259	1,260	1,261	1,262	1,264	1,265	1,266	1,267	1,269	1,270
24	1,271	1,273	1,274	1,275	1,276	1,278	1,279	1,280	1,281	1,283
25	1,284	1,285	1,287	1,288	1,289	1,290	1,292	1,293	1,294	1,296
26	1,297	1,298	1,300	1,301	1,302	1,303	1,305	1,306	1,307	1,309
27	1,310	1,311	1,313	1,314	1,315	1,317	1,318	1,319	1,320	1,322
28	1,323	1,324	1,326	1,327	1,328	1,330	1,331	1,332	1,334	1,335
29	1,336	1,338	1,339	1,340	1,342	1,343	1,344	1,346	1,347	1,349
30	1,350	1,351	1,353	1,354	1,355	1,357	1,358	1,359	1,361	1,362
31	1,363	1,365	1,366	1,368	1,369	1,370	1,372	1,373	1,374	1,376
32	1,377	1,379	1,380	1,381	1,383	1,384	1,385	1,387	1,388	1,390
33	1,391	1,392	1,394	1,395	1,397	1,398	1,399	1,401	1,402	1,404
34	1,405	1,406	1,408	1,409	1,411	1,412	1,413	1,415	1,416	1,418
35	1,419	1,420	1,422	1,423	1,425	1,426	1,428	1,429	1,430	1,432

Potenztafel $e^{0,360}$ bis $e^{0,709}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
36	1,433	1,435	1,436	1,438	1,439	1,441	1,442	1,443	1,445	1,446
37	1,448	1,449	1,451	1,452	1,454	1,455	1,456	1,458	1,459	1,461
38	1,462	1,464	1,465	1,467	1,468	1,470	1,471	1,473	1,474	1,476
39	1,477	1,478	1,480	1,481	1,483	1,484	1,486	1,487	1,489	1,490
40	1,492	1,493	1,495	1,496	1,498	1,499	1,501	1,502	1,504	1,505
41	1,507	1,508	1,510	1,511	1,513	1,514	1,516	1,517	1,519	1,520
42	1,522	1,523	1,525	1,527	1,528	1,530	1,531	1,533	1,534	1,536
43	1,537	1,539	1,540	1,542	1,543	1,545	1,547	1,548	1,550	1,551
44	1,553	1,554	1,556	1,557	1,559	1,560	1,562	1,564	1,565	1,567
45	1,568	1,570	1,571	1,573	1,575	1,576	1,578	1,579	1,581	1,582
46	1,584	1,586	1,587	1,589	1,590	1,592	1,594	1,595	1,597	1,598
47	1,600	1,602	1,603	1,605	1,606	1,608	1,610	1,611	1,613	1,614
48	1,616	1,618	1,619	1,621	1,623	1,624	1,626	1,627	1,629	1,631
49	1,632	1,634	1,636	1,637	1,639	1,640	1,642	1,644	1,645	1,647
50	1,649	1,650	1,652	1,654	1,655	1,657	1,659	1,660	1,662	1,664
51	1,665	1,667	1,669	1,670	1,672	1,674	1,675	1,677	1,679	1,680
52	1,682	1,684	1,685	1,687	1,689	1,690	1,692	1,694	1,696	1,697
53	1,699	1,701	1,702	1,704	1,706	1,707	1,709	1,711	1,713	1,714
54	1,716	1,718	1,719	1,721	1,723	1,725	1,726	1,728	1,730	1,732
55	1,733	1,735	1,737	1,738	1,740	1,742	1,744	1,745	1,747	1,749
56	1,751	1,752	1,754	1,756	1,758	1,759	1,761	1,763	1,765	1,766
57	1,768	1,770	1,772	1,774	1,775	1,777	1,779	1,781	1,782	1,784
58	1,786	1,788	1,790	1,791	1,793	1,795	1,797	1,799	1,800	1,802
59	1,804	1,806	1,808	1,809	1,811	1,813	1,815	1,817	1,818	1,820
60	1,822	1,824	1,826	1,828	1,829	1,831	1,833	1,835	1,837	1,839
61	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,852	1,853	1,855	1,857
62	1,859	1,861	1,863	1,865	1,866	1,868	1,870	1,872	1,874	1,876
63	1,878	1,879	1,881	1,883	1,885	1,887	1,889	1,891	1,893	1,895
64	1,896	1,898	1,900	1,902	1,904	1,906	1,908	1,910	1,912	1,914
65	1,916	1,917	1,919	1,921	1,923	1,925	1,927	1,929	1,931	1,933
66	1,935	1,937	1,939	1,941	1,943	1,944	1,946	1,948	1,950	1,952
67	1,954	1,956	1,958	1,960	1,962	1,964	1,966	1,968	1,970	1,972
68	1,974	1,976	1,978	1,980	1,982	1,984	1,986	1,988	1,990	1,992
69	1,994	1,996	1,998	2,000	2,002	2,004	2,006	2,008	2,010	2,012
70	2,014	2,016	2,018	2,020	2,022	2,024	2,026	2,028	2,030	2,032

Potenztafel $e^{0,710}$ bis $e^{1,009}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	2,034	2,036	2,038	2,040	2,042	2,044	2,046	2,048	2,050	2,052
72	2,054	2,056	2,059	2,061	2,063	2,065	2,067	2,069	2,071	2,073
73	2,075	2,077	2,079	2,081	2,083	2,085	2,088	2,090	2,092	2,094
74	2,096	2,098	2,100	2,102	2,104	2,106	2,109	2,111	2,113	2,115
75	2,117	2,119	2,121	2,123	2,125	2,128	2,130	2,132	2,134	2,136
76	2,138	2,140	2,143	2,145	2,147	2,149	2,151	2,153	2,155	2,158
77	2,160	2,162	2,164	2,166	2,168	2,171	2,173	2,175	2,177	2,179
78	2,181	2,184	2,186	2,188	2,190	2,192	2,195	2,197	2,199	2,201
79	2,203	2,206	2,208	2,210	2,212	2,214	2,217	2,219	2,221	2,223
80	2,226	2,228	2,230	2,232	2,234	2,237	2,239	2,241	2,243	2,246
81	2,248	2,250	2,252	2,255	2,257	2,259	2,261	2,264	2,266	2,268
82	2,270	2,273	2,275	2,277	2,280	2,282	2,284	2,286	2,289	2,291
83	2,293	2,296	2,298	2,300	2,303	2,305	2,307	2,309	2,312	2,314
84	2,316	2,319	2,321	2,323	2,326	2,328	2,330	2,333	2,335	2,337
85	2,340	2,342	2,344	2,347	2,349	2,351	2,354	2,356	2,358	2,361
86	2,363	2,366	2,368	2,370	2,373	2,375	2,377	2,380	2,382	2,385
87	2,387	2,389	2,392	2,394	2,396	2,399	2,401	2,404	2,406	2,408
88	2,411	2,413	2,416	2,418	2,421	2,423	2,425	2,428	2,430	2,433
89	2,435	2,438	2,440	2,442	2,445	2,447	2,450	2,452	2,455	2,457
90	2,460	2,462	2,465	2,467	2,469	2,472	2,474	2,477	2,479	2,482
91	2,484	2,487	2,489	2,492	2,494	2,497	2,499	2,502	2,504	2,507
92	2,509	2,512	2,514	2,517	2,519	2,522	2,524	2,527	2,529	2,532
93	2,535	2,537	2,540	2,542	2,545	2,547	2,550	2,552	2,555	2,557
94	2,560	2,563	2,565	2,568	2,570	2,573	2,575	2,578	2,581	2,583
95	2,586	2,588	2,591	2,593	2,596	2,599	2,601	2,604	2,606	2,609
96	2,612	2,614	2,617	2,620	2,622	2,625	2,627	2,630	2,633	2,635
97	2,638	2,641	2,643	2,646	2,649	2,651	2,654	2,656	2,659	2,662
98	2,664	2,667	2,670	2,672	2,675	2,678	2,680	2,683	2,686	2,689
99	2,691	2,694	2,697	2,699	2,702	2,705	2,707	2,710	2,713	2,716
100	2,718	2,721	2,724	2,726	2,729	2,732	2,735	2,737	2,740	2,743

8.2 Eine Tafel natürlicher Logarithmen

Indem man die Potenztabelle rückwärts abliest, kann man fast alle Logarithmen gewinnen. Da die Tabelle manchmal Sprünge macht, ergeben sich Lücken, die folgendermaßen behoben werden können:

Kleine Lücken:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
36	1,433	1,435	1,436	1,438	1,439	1,441	1,442	1,443	1,445	1,446

Die Zahl 1,437 taucht nicht auf, ihr Logarithmus muss zwischen 0,362 und 0,363 liegen. Daher setzen wir

$$\begin{aligned}\ln(1,437) &\approx 0,3625 \\ &= 0,362\underline{}\end{aligned}$$

Hierbei deutet der Unterstrich die hinzuzufügende 5 an.

Große Lücken:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	2,034	2,036	2,038	2,040	2,042	2,044	2,046	2,048	2,050	2,052
72	2,054	2,056	2,059	2,061	2,063	2,065	2,067	2,069	2,071	2,073

Die zwei Zahlen 2,057 und 2,058 tauchen nicht auf. Der Logarithmus der kleineren Zahl liegt eher beim kleineren Wert 0,721, und der Logarithmus der größeren Zahl liegt eher beim größeren Wert 0,722. Daher setzen wir hier:

$$\begin{aligned}\ln(2,057) &\approx 0,721 \\ \ln(2,058) &\approx 0,722\end{aligned}$$

Noch größere Lücken tauchen in unserer Potenztabelle nicht auf. Diese Überlegungen führen zu folgender Tafel natürlicher Logarithmen:

Natürliche Logarithmen

der Zahlen von
1,000 bis 1,409

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	0,000	0,001	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008	0,009	0,009
1,01	0,010	0,011	0,012	0,014	0,014	0,015	0,016	0,017	0,019	0,019
1,02	0,020	0,021	0,022	0,024	0,024	0,025	0,026	0,027	0,028	0,029
1,03	0,030	0,031	0,031	0,032	0,033	0,034	0,035	0,036	0,037	0,038
1,04	0,039	0,040	0,041	0,042	0,043	0,044	0,045	0,046	0,047	0,048
1,05	0,049	0,050	0,051	0,052	0,053	0,054	0,054	0,055	0,056	0,057
1,06	0,058	0,059	0,060	0,061	0,062	0,063	0,064	0,065	0,066	0,067
1,07	0,068	0,069	0,069	0,070	0,071	0,072	0,073	0,074	0,075	0,076
1,08	0,077	0,078	0,079	0,080	0,081	0,082	0,082	0,083	0,084	0,085
1,09	0,086	0,087	0,088	0,089	0,090	0,091	0,092	0,093	0,093	0,094
1,10	0,095	0,096	0,097	0,098	0,099	0,100	0,101	0,102	0,103	0,103
1,11	0,104	0,105	0,106	0,107	0,108	0,109	0,110	0,111	0,111	0,112
1,12	0,113	0,114	0,115	0,116	0,117	0,118	0,119	0,120	0,120	0,121
1,13	0,122	0,123	0,124	0,125	0,126	0,127	0,127	0,128	0,129	0,130
1,14	0,131	0,132	0,133	0,134	0,134	0,135	0,136	0,137	0,138	0,139
1,15	0,140	0,141	0,141	0,142	0,143	0,144	0,145	0,146	0,147	0,147
1,16	0,148	0,149	0,150	0,151	0,152	0,153	0,154	0,154	0,155	0,156
1,17	0,157	0,158	0,159	0,159	0,160	0,161	0,162	0,163	0,164	0,165
1,18	0,165	0,166	0,167	0,168	0,169	0,170	0,171	0,171	0,172	0,173
1,19	0,174	0,175	0,176	0,176	0,177	0,178	0,179	0,180	0,181	0,181
1,20	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,186	0,187	0,188	0,189	0,190
1,21	0,191	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,195	0,196	0,197	0,198
1,22	0,199	0,200	0,200	0,201	0,202	0,203	0,204	0,204	0,205	0,206
1,23	0,207	0,208	0,209	0,209	0,210	0,211	0,212	0,213	0,213	0,214
1,24	0,215	0,216	0,217	0,217	0,218	0,219	0,220	0,221	0,221	0,222
1,25	0,223	0,224	0,225	0,225	0,226	0,227	0,228	0,229	0,229	0,230
1,26	0,231	0,232	0,233	0,233	0,234	0,235	0,236	0,237	0,237	0,238
1,27	0,239	0,240	0,240	0,241	0,242	0,243	0,244	0,244	0,245	0,246
1,28	0,247	0,248	0,248	0,249	0,250	0,251	0,251	0,252	0,253	0,254
1,29	0,255	0,255	0,256	0,257	0,258	0,258	0,259	0,260	0,261	0,261
1,30	0,262	0,263	0,264	0,265	0,265	0,266	0,267	0,268	0,268	0,269
1,31	0,270	0,271	0,271	0,272	0,273	0,274	0,274	0,275	0,276	0,277
1,32	0,278	0,278	0,279	0,280	0,281	0,281	0,282	0,283	0,284	0,284
1,33	0,285	0,286	0,287	0,287	0,288	0,289	0,290	0,290	0,291	0,292
1,34	0,293	0,293	0,294	0,295	0,296	0,296	0,297	0,298	0,298	0,299
1,35	0,300	0,301	0,301	0,302	0,303	0,304	0,304	0,305	0,306	0,307
1,36	0,307	0,308	0,309	0,310	0,310	0,311	0,312	0,312	0,313	0,314
1,37	0,315	0,315	0,316	0,317	0,318	0,318	0,319	0,320	0,320	0,321
1,38	0,322	0,323	0,323	0,324	0,325	0,326	0,326	0,327	0,328	0,328
1,39	0,329	0,330	0,331	0,331	0,332	0,333	0,333	0,334	0,335	0,336
1,40	0,336	0,337	0,338	0,338	0,339	0,340	0,341	0,341	0,342	0,343

Natürliche Logarithmen

der Zahlen von
1,410 bis 1,819

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,41	0,343	0,344	0,345	0,346	0,346	0,347	0,348	0,348	0,349	0,350
1,42	0,351	0,351	0,352	0,353	0,353	0,354	0,355	0,355	0,356	0,357
1,43	0,358	0,358	0,359	0,360	0,360	0,361	0,362	0,362	0,363	0,364
1,44	0,364	0,365	0,366	0,367	0,367	0,368	0,369	0,369	0,370	0,371
1,45	0,371	0,372	0,373	0,373	0,374	0,375	0,376	0,376	0,377	0,378
1,46	0,378	0,379	0,380	0,380	0,381	0,382	0,382	0,383	0,384	0,384
1,47	0,385	0,386	0,386	0,387	0,388	0,388	0,389	0,390	0,391	0,391
1,48	0,392	0,393	0,393	0,394	0,395	0,395	0,396	0,397	0,397	0,398
1,49	0,399	0,399	0,400	0,401	0,401	0,402	0,403	0,403	0,404	0,405
1,50	0,405	0,406	0,407	0,407	0,408	0,409	0,409	0,410	0,411	0,411
1,51	0,412	0,413	0,413	0,414	0,415	0,415	0,416	0,417	0,417	0,418
1,52	0,419	0,419	0,420	0,421	0,421	0,422	0,422	0,423	0,424	0,424
1,53	0,425	0,426	0,426	0,427	0,428	0,428	0,429	0,430	0,430	0,431
1,54	0,432	0,432	0,433	0,434	0,434	0,435	0,435	0,436	0,437	0,437
1,55	0,438	0,439	0,439	0,440	0,441	0,441	0,442	0,443	0,443	0,444
1,56	0,445	0,445	0,446	0,446	0,447	0,448	0,448	0,449	0,450	0,450
1,57	0,451	0,452	0,452	0,453	0,453	0,454	0,455	0,455	0,456	0,457
1,58	0,457	0,458	0,459	0,459	0,460	0,460	0,461	0,462	0,462	0,463
1,59	0,464	0,464	0,465	0,465	0,466	0,467	0,467	0,468	0,469	0,469
1,60	0,470	0,470	0,471	0,472	0,472	0,473	0,474	0,474	0,475	0,475
1,61	0,476	0,477	0,477	0,478	0,479	0,479	0,480	0,480	0,481	0,482
1,62	0,482	0,483	0,483	0,484	0,485	0,485	0,486	0,487	0,487	0,488
1,63	0,488	0,489	0,490	0,490	0,491	0,491	0,492	0,493	0,493	0,494
1,64	0,495	0,495	0,496	0,496	0,497	0,498	0,498	0,499	0,499	0,500
1,65	0,501	0,501	0,502	0,502	0,503	0,504	0,504	0,505	0,505	0,506
1,66	0,507	0,507	0,508	0,508	0,509	0,510	0,510	0,511	0,511	0,512
1,67	0,513	0,513	0,514	0,514	0,515	0,516	0,516	0,517	0,517	0,518
1,68	0,519	0,519	0,520	0,520	0,521	0,522	0,522	0,523	0,523	0,524
1,69	0,525	0,525	0,526	0,526	0,527	0,527	0,528	0,529	0,529	0,530
1,70	0,530	0,531	0,532	0,532	0,533	0,533	0,534	0,535	0,535	0,536
1,71	0,536	0,537	0,537	0,538	0,539	0,539	0,540	0,540	0,541	0,542
1,72	0,542	0,543	0,543	0,544	0,544	0,545	0,546	0,546	0,547	0,547
1,73	0,548	0,548	0,549	0,550	0,550	0,551	0,551	0,552	0,553	0,553
1,74	0,554	0,554	0,555	0,555	0,556	0,557	0,557	0,558	0,558	0,559
1,75	0,559	0,560	0,561	0,561	0,562	0,562	0,563	0,563	0,564	0,565
1,76	0,565	0,566	0,566	0,567	0,567	0,568	0,569	0,569	0,570	0,570
1,77	0,571	0,571	0,572	0,572	0,573	0,574	0,574	0,575	0,575	0,576
1,78	0,576	0,577	0,578	0,578	0,579	0,579	0,580	0,580	0,581	0,581
1,79	0,582	0,583	0,583	0,584	0,584	0,585	0,585	0,586	0,586	0,587
1,80	0,588	0,588	0,589	0,589	0,590	0,590	0,591	0,591	0,592	0,593
1,81	0,593	0,594	0,594	0,595	0,595	0,596	0,596	0,597	0,598	0,598

Natürliche Logarithmen

der Zahlen von
1,820 bis 2,229

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,82	0,599	0,599	0,600	0,600	0,601	0,601	0,602	0,602	0,603	0,604
1,83	0,604	0,605	0,605	0,606	0,606	0,607	0,607	0,608	0,608	0,609
1,84	0,610	0,610	0,611	0,611	0,612	0,612	0,613	0,613	0,614	0,614
1,85	0,615	0,615	0,616	0,617	0,617	0,618	0,618	0,619	0,619	0,620
1,86	0,620	0,621	0,621	0,622	0,622	0,623	0,624	0,624	0,625	0,625
1,87	0,626	0,626	0,627	0,627	0,628	0,628	0,629	0,629	0,630	0,631
1,88	0,631	0,632	0,632	0,633	0,633	0,634	0,634	0,635	0,635	0,636
1,89	0,636	0,637	0,637	0,638	0,638	0,639	0,640	0,640	0,641	0,641
1,90	0,642	0,642	0,643	0,643	0,644	0,644	0,645	0,645	0,646	0,646
1,91	0,647	0,647	0,648	0,648	0,649	0,649	0,650	0,651	0,651	0,652
1,92	0,652	0,653	0,653	0,654	0,654	0,655	0,655	0,656	0,656	0,657
1,93	0,657	0,658	0,658	0,659	0,659	0,660	0,660	0,661	0,661	0,662
1,94	0,662	0,663	0,663	0,664	0,665	0,665	0,666	0,666	0,667	0,667
1,95	0,668	0,668	0,669	0,669	0,670	0,670	0,671	0,671	0,672	0,672
1,96	0,673	0,673	0,674	0,674	0,675	0,675	0,676	0,676	0,677	0,677
1,97	0,678	0,678	0,679	0,679	0,680	0,680	0,681	0,681	0,682	0,682
1,98	0,683	0,683	0,684	0,684	0,685	0,685	0,686	0,686	0,687	0,687
1,99	0,688	0,688	0,689	0,689	0,690	0,690	0,691	0,691	0,692	0,692
2,00	0,693	0,693	0,694	0,694	0,695	0,696	0,696	0,697	0,697	0,697
2,01	0,698	0,698	0,699	0,699	0,700	0,701	0,701	0,702	0,702	0,703
2,02	0,703	0,703	0,704	0,704	0,705	0,705	0,706	0,707	0,707	0,708
2,03	0,708	0,708	0,709	0,709	0,710	0,710	0,711	0,712	0,712	0,713
2,04	0,713	0,713	0,714	0,714	0,715	0,715	0,716	0,717	0,717	0,718
2,05	0,718	0,718	0,719	0,719	0,720	0,720	0,721	0,721	0,722	0,722
2,06	0,722	0,723	0,723	0,724	0,724	0,725	0,725	0,726	0,726	0,727
2,07	0,727	0,728	0,728	0,729	0,729	0,730	0,730	0,731	0,731	0,732
2,08	0,732	0,733	0,733	0,734	0,734	0,735	0,735	0,736	0,736	0,736
2,09	0,737	0,737	0,738	0,738	0,739	0,739	0,740	0,740	0,741	0,741
2,10	0,742	0,742	0,743	0,743	0,744	0,744	0,745	0,745	0,746	0,746
2,11	0,746	0,747	0,747	0,748	0,748	0,749	0,749	0,750	0,750	0,751
2,12	0,751	0,752	0,752	0,753	0,753	0,754	0,754	0,755	0,755	0,755
2,13	0,756	0,756	0,757	0,757	0,758	0,758	0,759	0,759	0,760	0,760
2,14	0,761	0,761	0,762	0,762	0,763	0,763	0,764	0,764	0,765	0,765
2,15	0,765	0,766	0,766	0,767	0,767	0,768	0,768	0,769	0,769	0,769
2,16	0,770	0,770	0,771	0,771	0,772	0,772	0,773	0,773	0,774	0,774
2,17	0,775	0,775	0,775	0,776	0,776	0,777	0,777	0,778	0,778	0,779
2,18	0,779	0,780	0,780	0,781	0,781	0,781	0,782	0,782	0,783	0,783
2,19	0,784	0,784	0,785	0,785	0,786	0,786	0,786	0,787	0,787	0,788
2,20	0,788	0,789	0,789	0,790	0,790	0,791	0,791	0,791	0,792	0,792
2,21	0,793	0,793	0,794	0,794	0,795	0,795	0,796	0,796	0,796	0,797
2,22	0,797	0,798	0,798	0,799	0,799	0,800	0,800	0,800	0,801	0,801

Natürliche Logarithmen

der Zahlen von
2,230 bis 2,639

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,23	0,802	0,802	0,803	0,803	0,804	0,804	0,805	0,805	0,805	0,806
2,24	0,806	0,807	0,807	0,808	0,808	0,809	0,809	0,809	0,810	0,810
2,25	0,811	0,811	0,812	0,812	0,813	0,813	0,813	0,814	0,814	0,815
2,26	0,815	0,816	0,816	0,817	0,817	0,817	0,818	0,818	0,819	0,819
2,27	0,820	0,820	0,821	0,821	0,821	0,822	0,822	0,823	0,823	0,824
2,28	0,824	0,824	0,825	0,825	0,826	0,826	0,827	0,827	0,828	0,828
2,29	0,828	0,829	0,829	0,830	0,830	0,831	0,831	0,831	0,832	0,832
2,30	0,833	0,833	0,834	0,834	0,834	0,835	0,835	0,836	0,836	0,837
2,31	0,837	0,838	0,838	0,838	0,839	0,839	0,840	0,840	0,841	0,841
2,32	0,841	0,842	0,842	0,843	0,843	0,844	0,844	0,844	0,845	0,845
2,33	0,846	0,846	0,847	0,847	0,847	0,848	0,848	0,849	0,849	0,850
2,34	0,850	0,850	0,851	0,851	0,852	0,852	0,853	0,853	0,853	0,854
2,35	0,854	0,855	0,855	0,856	0,856	0,856	0,857	0,857	0,858	0,858
2,36	0,859	0,859	0,859	0,860	0,860	0,861	0,861	0,861	0,862	0,862
2,37	0,863	0,863	0,864	0,864	0,864	0,865	0,865	0,866	0,866	0,867
2,38	0,867	0,867	0,868	0,868	0,869	0,869	0,869	0,870	0,870	0,871
2,39	0,871	0,872	0,872	0,872	0,873	0,873	0,874	0,874	0,875	0,875
2,40	0,875	0,876	0,876	0,877	0,877	0,877	0,878	0,878	0,879	0,879
2,41	0,880	0,880	0,880	0,881	0,881	0,882	0,882	0,882	0,883	0,883
2,42	0,884	0,884	0,884	0,885	0,885	0,886	0,886	0,887	0,887	0,887
2,43	0,888	0,888	0,889	0,889	0,889	0,890	0,890	0,891	0,891	0,891
2,44	0,892	0,892	0,893	0,893	0,894	0,894	0,894	0,895	0,895	0,896
2,45	0,896	0,896	0,897	0,897	0,898	0,898	0,898	0,899	0,899	0,900
2,46	0,900	0,900	0,901	0,901	0,902	0,902	0,902	0,903	0,903	0,904
2,47	0,904	0,905	0,905	0,905	0,906	0,906	0,907	0,907	0,907	0,908
2,48	0,908	0,909	0,909	0,909	0,910	0,910	0,911	0,911	0,911	0,912
2,49	0,912	0,913	0,913	0,913	0,914	0,914	0,915	0,915	0,915	0,916
2,50	0,916	0,917	0,917	0,917	0,918	0,918	0,919	0,919	0,919	0,920
2,51	0,920	0,921	0,921	0,921	0,922	0,922	0,923	0,923	0,923	0,924
2,52	0,924	0,925	0,925	0,925	0,926	0,926	0,927	0,927	0,927	0,928
2,53	0,928	0,929	0,929	0,929	0,930	0,930	0,930	0,931	0,931	0,932
2,54	0,932	0,932	0,933	0,933	0,934	0,934	0,934	0,935	0,935	0,936
2,55	0,936	0,936	0,937	0,937	0,938	0,938	0,938	0,939	0,939	0,940
2,56	0,940	0,940	0,941	0,941	0,941	0,942	0,942	0,943	0,943	0,943
2,57	0,944	0,944	0,945	0,945	0,945	0,946	0,946	0,947	0,947	0,947
2,58	0,948	0,948	0,948	0,949	0,949	0,950	0,950	0,950	0,951	0,951
2,59	0,952	0,952	0,952	0,953	0,953	0,954	0,954	0,954	0,955	0,955
2,60	0,955	0,956	0,956	0,957	0,957	0,957	0,958	0,958	0,959	0,959
2,61	0,959	0,960	0,960	0,960	0,961	0,961	0,962	0,962	0,962	0,963
2,62	0,963	0,963	0,964	0,964	0,965	0,965	0,965	0,966	0,966	0,967
2,63	0,967	0,967	0,968	0,968	0,968	0,969	0,969	0,970	0,970	0,970

Natürliche Logarithmen

der Zahlen von
2,640 bis 2,739

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,64	0,971	0,971	0,971	0,972	0,972	0,973	0,973	0,973	0,974	0,974
2,65	0,974	0,975	0,975	0,976	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978
2,66	0,978	0,979	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,981	0,982
2,67	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985
2,68	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,69	0,989	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992	0,993
2,70	0,993	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,997
2,71	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	1,000	1,000
2,72	1,001	1,001	1,001	1,002	1,002	1,002	1,003	1,003	1,004	1,004
2,73	1,004	1,005	1,005	1,005	1,006	1,006	1,006	1,007	1,007	1,008

Hinweis

Ein Unterstrich bei einer Endziffer bedeutet, dass eine Fünf anzufügen ist, beispielsweise ist also:

$$0,97\bar{1} = 0,9715.$$

Anmerkung (Logarithmen jenseits der Tabelle)

Mit Hilfe der vorliegenden Logarithmentafel können auch Logarithmen außerhalb des erfassten Bereichs bestimmt werden.

Zahlen von 1 bis 10 können als Produkt von Zweien und einer Zahl, einer Zahl, die möglicherweise kleiner als 2 ist, geschrieben werden. Beispiele:

$$3 = 2 \cdot 1,5$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$7 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 1,75$$

$$10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,25$$

Die natürlichen Logarithmen dieser Zahlen sind dann

$$\begin{aligned}\ln(3) &= \ln(2 \cdot 1,5) \\ &= \ln(2) + \ln(1,5) \\ &\approx 0,693 + 0,405 \\ &= 1,098\end{aligned}$$

$$\ln(4) = \ln(2 \cdot 2) \approx 1,386$$

$$\ln(7) = \ln(2 \cdot 2 \cdot 1,75) \approx 1,946$$

$$\ln(10) = \ln(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,25) \approx 2,302$$

Bei diesen Ergebnissen können Rundungsfehler in der letzten Ziffer auftauchen.

Alle anderen positiven Zahlen können durch Abspaltung einer Zehnerpotenz auf Zahlen im Bereich von 1 bis 10 zurückgeführt werden, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\ln(7000) &= \ln(7 \cdot 10^3) \\ &= \ln(7) + \ln(10^3) \\ &= \ln(7) + 3 \cdot \ln(10) \\ &\approx 1,946 + 3 \cdot 2,302 \\ &= 8,852\end{aligned}$$

8.3 Erstellung einer Zehnerlogarithmentafel

Wir werden nun zeigen, wie man eine *dreistellige* Tafel der Zehnerlogarithmen der Zahlen 1,00 bis 9,99 erstellen kann.

Die Zehnerlogarithmen von beliebigen positiven Zahlen können auf die Logarithmen der Zahlen im Bereich von 1 bis 10 zurückgeführt werden, indem man die wissenschaftliche Darstellung benutzt. Zwei typische Beispiele sind:

$$\begin{aligned}\lg(2154) &= \lg(2,154 \cdot 10^3) \\ &= \lg(2,154) + \lg(10^3) \\ &= \lg(2,154) + 3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lg(0,0917) &= \lg(9,17 \cdot 10^{-2}) \\ &= \lg(9,17) + \lg(10^{-2}) \\ &= \lg(9,17) - 2\end{aligned}$$

Daher enthalten die üblichen Tafeln lediglich die Logarithmen der Zahlen im **Bereich von 1 bis 10**.

Nun könnte man die in Kapitel 7.4 erläuterte Beziehung

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

benutzen und die Zehnerlogarithmen aus den bereits gefundenen natürlichen Logarithmen berechnen. Dies hat den Nachteil, dass man von Genauigkeit der vorgegeben natürlichen Logarithmen abhängt. Daher wählen wir hier die

Methode von Henry Briggs, die auf fortgesetztes Quadratwurzeln aus 10 beruht.

Wir berechnen hier die Zehnerlogarithmen mit einem Ansatz von Henry Briggs und berechnen zunächst mehrfach hintereinander die Quadratwurzel aus 10. Diese Wurzeln sind nichts anderes als die Potenzen

$$10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{1}{8}}, 10^{\frac{1}{16}}, 10^{\frac{1}{32}}, \dots$$

Beispielsweise erhält man nach 14-maligem Wurzelziehen, wobei mit sechs Nachkommastellen gerechnet worden ist:

$$\begin{aligned}\sqrt{10} &= 10^{0,5} \approx 3,162\,278 \\ \sqrt{\sqrt{10}} &= 10^{0,25} \approx \sqrt{3,162\,278} \approx 1,778\,280 \\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} &= 10^{0,125} \approx \sqrt{1,778\,280} \approx 1,333\,522 \\ &\dots \\ \sqrt{\dots\sqrt{10}} &\approx 10^{0,000\,061} \approx \sqrt{1,000\,281} \approx 1,000\,140\end{aligned}$$

Die Exponenten halbieren sich bei jedem Wurzelziehen.

Nun setzen wir jede gegebene Zahl zwischen 1 und 10 aus geeignete Wurzeln zusammen. Dazu spalten wir die größte hineinpassende Wurzel ab und wiederholen den Vorgang bis die Zahl ausgeschöpft ist. Dies wird nun an einem Beispiel illustriert.

Dazu benötigen wir zunächst eine kleine Tabelle der Quadratwurzel von 10.

	Exponent n		Potenz 10^n
1	$\frac{1}{2}$	0,500000	3,162278
2	$\frac{1}{4}$	0,250000	1,778280
3	$\frac{1}{8}$	0,125000	1,333522
4	$\frac{1}{16}$	0,062500	1,154782
5	$\frac{1}{32}$	0,031250	1,074608
6	$\frac{1}{64}$	0,015625	1,036633
7	$\frac{1}{128}$	0,007813	1,018152
8	$\frac{1}{256}$	0,003906	1,009035
9	$\frac{1}{512}$	0,001953	1,004507
10	$\frac{1}{1024}$	0,000977	1,002251
11	$\frac{1}{2048}$	0,000488	1,001125
12	$\frac{1}{4096}$	0,000244	1,000562
13	$\frac{1}{8192}$	0,000122	1,000281
14	$\frac{1}{16384}$	0,000061	1,000140

Das Heronverfahren leistet bei ihrer Erstellung wieder einmal gute Dienste. Um die Logarithmen schließlich mit drei zutreffenden Stellen zu bekommen, werden die Wurzeln sogar mit 6 Nachkommastellen berechnet. Zum besseren Verständnis sind die Exponenten sowohl als Dezimalbrüche als auch als Brüche aufgeführt.

Die Summe der unendlich vielen Exponenten, die nicht in der Tabelle auftreten, betragen höchstens:

$$\begin{aligned} & 0,000061 \cdot \frac{1}{2} + 0,000061 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots \\ &= 0,000061 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \quad (\text{geometrische Reihe}) \\ &= 0,000061 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 0,000061 \end{aligned}$$

Die Abweichung hätte keinerlei Auswirkungen auf die hier betrachteten Logarithmen mit drei Nachkommastellen. Daher können wir uns auf die vierzehn Potenzen in der Tabelle beschränken.

Ein Beispiel

Berechne $\lg(8,54)$.

Lösung

1. Die Wurzel 3,162278 passt in 8,54, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned}8,54 &= 3,162278 \cdot \frac{8,54}{3,162278} \\&= 3,162278 \cdot 2,70058483... \\&\approx 3,162278 \cdot 2,700585\end{aligned}$$

Nun müssen wir 2,700585 untersuchen.

2. Die Wurzel 1,778280 passt in 2,700585, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned}2,700585 &= 1,778280 \cdot \frac{2,700585}{1,778280} \\&= 1,778280 \cdot 1,518650043... \\&\approx 1,778280 \cdot 1,518650\end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,518650 untersuchen.

3. Die Wurzel 1,333522 passt in 1,518650, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned}1,518650 &= 1,333522 \cdot \frac{1,518650}{1,333522} \\&= 1,333522 \cdot 1,138826356... \\&\approx 1,333522 \cdot 1,138826\end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,138826 untersuchen.

4. Die Wurzel 1,154782 passt **nicht** in 1,138826.

5. Die Wurzel 1,074608 passt in 1,138826, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned}1,518650 &= 1,074608 \cdot \frac{1,138826}{1,074608} \\&= 1,074608 \cdot 1,059759465... \\&\approx 1,074608 \cdot 1,059759\end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,059759 untersuchen.

6. Die Wurzel 1,036633 passt in 1,059759, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned}1,059759 &= 1,036633 \cdot \frac{1,059759}{1,036633} \\&= 1,036633 \cdot 1,022308763... \\&\approx 1,036633 \cdot 1,022309\end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,022309 untersuchen.

7. Die Wurzel 1,018152 passt in 1,022309, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned}1,022309 &= 1,018152 \cdot \frac{1,022309}{1,018152} \\&= 1,018152 \cdot 1,004082887... \\&\approx 1,018152 \cdot 1,004083\end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,004083 untersuchen.

8. Die Wurzel 1,009035 passt **nicht** in 1,004083.

9. Die Wurzel 1,004507 passt **nicht** in 1,004083.

10. Die Wurzel 1,002251 passt in 1,004083, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned}1,004083 &= 1,002251 \cdot \frac{1,004083}{1,002251} \\&= 1,002251 \cdot 1,001827885... \\&\approx 1,002251 \cdot 1,001828\end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,001828 untersuchen.

11. Die Wurzel 1,001125 passt in 1,001828, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned} 1,001828 &= 1,001125 \cdot \frac{1,001828}{1,001125} \\ &= 1,001125 \cdot 1,0007022100... \\ &\approx 1,001125 \cdot 1,000702 \end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,000702 untersuchen.

12. Die Wurzel 1,000562 passt in 1,000702, kann also abgespalten werden:

$$\begin{aligned} 1,000702 &= 1,000562 \cdot \frac{1,000702}{1,000562} \\ &= 1,000562 \cdot 1,000139921... \\ &\approx 1,000562 \cdot 1,000140 \end{aligned}$$

Nun müssen wir 1,000140 untersuchen.

13. Die Wurzel 1,000281 passt **nicht** in 1,000140.

14. Die letzte Wurzel 1,000140 passt in 1,000140 und ist damit Bestandteil der Zerlegung.

Im Rahmen der sechsstelligen Berechnung haben wir somit 8,54 vollständig in Potenzen zerlegt:

$$\begin{aligned} 8,54 &\approx 3,162278 \cdot 1,778280 \cdot 1,333522 \cdot 1,074608 \cdot 1,036633 \cdot \\ &\quad 1,018152 \cdot 1,002251 \cdot 1,001125 \cdot 1,000562 \cdot 1,000140 \\ &\approx 10^{0,5} \cdot 10^{0,25} \cdot 10^{0,125} \cdot 10^{0,03125} \cdot 10^{0,015625} \cdot \\ &\quad 10^{0,007813} \cdot 10^{0,000977} \cdot 10^{0,000488} \cdot 10^{0,000244} \cdot 10^{0,000061} \\ &= 10^{0,5+0,25+0,125+0,03125+...+0,000244+0,000061} \end{aligned}$$

$$= 10^{0,931458}$$

$$\approx 10^{0,931}$$

Dies bedeutet, dass

$$\lg(8,54) \approx 0,931$$

Mit der erläuterten Methode ergibt sich die dreistellige Logarithmentafel auf den nachfolgenden Seiten:

Dekadische Logarithmen (Briggs)

der Zahlen von
1,00 bis 5,09

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,000	0,003	0,009	0,013	0,017	0,021	0,025	0,029	0,033	0,037
1,1	0,041	0,045	0,049	0,053	0,057	0,061	0,063	0,068	0,072	0,076
1,2	0,079	0,083	0,086	0,090	0,093	0,097	0,100	0,104	0,107	0,111
1,3	0,114	0,117	0,121	0,124	0,127	0,130	0,134	0,137	0,140	0,143
1,4	0,146	0,149	0,152	0,155	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173
1,5	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,190	0,193	0,196	0,199	0,201
1,6	0,204	0,207	0,210	0,212	0,215	0,217	0,220	0,223	0,225	0,228
1,7	0,230	0,233	0,236	0,238	0,241	0,243	0,246	0,248	0,250	0,253
1,8	0,255	0,258	0,260	0,262	0,265	0,267	0,270	0,272	0,274	0,276
1,9	0,279	0,281	0,283	0,286	0,288	0,290	0,292	0,294	0,297	0,299
2,0	0,301	0,303	0,305	0,307	0,310	0,312	0,314	0,316	0,318	0,320
2,1	0,322	0,324	0,326	0,328	0,330	0,332	0,334	0,336	0,338	0,340
2,2	0,342	0,344	0,346	0,348	0,350	0,352	0,354	0,356	0,358	0,360
2,3	0,362	0,364	0,365	0,367	0,369	0,371	0,373	0,375	0,377	0,378
2,4	0,380	0,382	0,384	0,386	0,387	0,389	0,391	0,393	0,394	0,396
2,5	0,398	0,400	0,401	0,403	0,405	0,407	0,408	0,410	0,412	0,413
2,6	0,415	0,417	0,418	0,420	0,422	0,423	0,425	0,427	0,428	0,430
2,7	0,431	0,433	0,435	0,436	0,438	0,439	0,441	0,442	0,444	0,446
2,8	0,447	0,449	0,450	0,452	0,453	0,455	0,456	0,458	0,459	0,461
2,9	0,462	0,464	0,465	0,467	0,468	0,470	0,471	0,473	0,474	0,476
3,0	0,477	0,479	0,480	0,481	0,483	0,484	0,486	0,487	0,489	0,490
3,1	0,491	0,493	0,494	0,496	0,497	0,498	0,500	0,501	0,502	0,503
3,2	0,505	0,506	0,508	0,509	0,511	0,511	0,513	0,515	0,516	0,517
3,3	0,519	0,520	0,521	0,522	0,524	0,525	0,526	0,528	0,529	0,530
3,4	0,531	0,533	0,534	0,535	0,537	0,538	0,539	0,540	0,542	0,543
3,5	0,544	0,545	0,547	0,548	0,549	0,550	0,551	0,553	0,554	0,555
3,6	0,556	0,558	0,559	0,560	0,561	0,562	0,563	0,565	0,566	0,567
3,7	0,568	0,569	0,571	0,572	0,573	0,574	0,575	0,576	0,577	0,579
3,8	0,580	0,581	0,582	0,583	0,584	0,585	0,587	0,588	0,589	0,590
3,9	0,591	0,592	0,593	0,594	0,595	0,597	0,598	0,599	0,600	0,601
4,0	0,602	0,603	0,604	0,605	0,606	0,607	0,609	0,610	0,611	0,612
4,1	0,613	0,614	0,615	0,616	0,617	0,618	0,619	0,620	0,621	0,622
4,2	0,623	0,624	0,625	0,626	0,627	0,628	0,629	0,630	0,631	0,632
4,3	0,633	0,634	0,635	0,636	0,637	0,638	0,639	0,640	0,641	0,642
4,4	0,643	0,644	0,645	0,646	0,647	0,648	0,649	0,650	0,651	0,652
4,5	0,653	0,654	0,655	0,656	0,657	0,658	0,659	0,660	0,661	0,662
4,6	0,663	0,664	0,665	0,666	0,667	0,667	0,668	0,669	0,670	0,671
4,7	0,672	0,673	0,674	0,675	0,676	0,677	0,678	0,679	0,679	0,680
4,8	0,681	0,682	0,683	0,684	0,685	0,686	0,687	0,688	0,688	0,689
4,9	0,690	0,691	0,692	0,693	0,694	0,695	0,695	0,696	0,697	0,698
5,0	0,699	0,700	0,701	0,702	0,702	0,703	0,704	0,705	0,706	0,707

Dekadische Logarithmen (Briggs)

der Zahlen von
5,10 bis 9,09

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	0,708	0,708	0,709	0,710	0,711	0,712	0,713	0,713	0,714	0,715
5,2	0,716	0,717	0,718	0,719	0,719	0,720	0,721	0,722	0,723	0,723
5,3	0,724	0,725	0,726	0,727	0,728	0,728	0,729	0,730	0,731	0,732
5,4	0,732	0,733	0,734	0,735	0,736	0,736	0,737	0,738	0,739	0,740
5,5	0,740	0,741	0,742	0,743	0,744	0,744	0,745	0,746	0,747	0,747
5,6	0,748	0,749	0,750	0,751	0,751	0,752	0,753	0,754	0,754	0,755
5,7	0,756	0,757	0,757	0,758	0,759	0,760	0,760	0,761	0,762	0,763
5,8	0,763	0,764	0,765	0,766	0,766	0,767	0,768	0,769	0,769	0,770
5,9	0,771	0,772	0,772	0,773	0,774	0,775	0,775	0,776	0,777	0,777
6,0	0,778	0,779	0,780	0,780	0,781	0,782	0,782	0,783	0,784	0,785
6,1	0,785	0,786	0,787	0,787	0,788	0,789	0,790	0,790	0,791	0,792
6,2	0,792	0,793	0,794	0,794	0,795	0,796	0,797	0,797	0,798	0,799
6,3	0,799	0,800	0,801	0,801	0,802	0,803	0,803	0,804	0,805	0,806
6,4	0,806	0,807	0,808	0,808	0,809	0,810	0,810	0,811	0,812	0,812
6,5	0,813	0,814	0,814	0,815	0,816	0,816	0,817	0,818	0,818	0,819
6,6	0,820	0,820	0,821	0,822	0,822	0,823	0,823	0,824	0,825	0,825
6,7	0,826	0,827	0,827	0,828	0,829	0,829	0,830	0,831	0,831	0,832
6,8	0,833	0,833	0,834	0,834	0,835	0,836	0,836	0,837	0,838	0,838
6,9	0,839	0,839	0,840	0,841	0,841	0,842	0,843	0,843	0,844	0,844
7,0	0,845	0,846	0,846	0,847	0,848	0,848	0,849	0,849	0,850	0,851
7,1	0,851	0,852	0,852	0,853	0,854	0,854	0,855	0,856	0,856	0,857
7,2	0,857	0,858	0,859	0,859	0,860	0,860	0,861	0,862	0,862	0,863
7,3	0,863	0,864	0,865	0,865	0,866	0,866	0,867	0,867	0,868	0,869
7,4	0,869	0,870	0,870	0,871	0,872	0,872	0,873	0,873	0,874	0,874
7,5	0,875	0,876	0,876	0,877	0,877	0,878	0,879	0,879	0,880	0,880
7,6	0,881	0,881	0,882	0,883	0,883	0,884	0,884	0,885	0,885	0,886
7,7	0,886	0,887	0,888	0,888	0,889	0,889	0,890	0,890	0,891	0,892
7,8	0,892	0,893	0,893	0,894	0,894	0,895	0,895	0,896	0,897	0,897
7,9	0,898	0,898	0,899	0,899	0,900	0,900	0,901	0,901	0,902	0,903
8,0	0,903	0,904	0,904	0,905	0,905	0,906	0,906	0,907	0,907	0,908
8,1	0,908	0,909	0,910	0,910	0,911	0,911	0,912	0,912	0,913	0,913
8,2	0,914	0,914	0,915	0,915	0,916	0,916	0,917	0,918	0,918	0,919
8,3	0,919	0,920	0,920	0,921	0,921	0,922	0,922	0,923	0,923	0,924
8,4	0,924	0,925	0,925	0,926	0,926	0,927	0,927	0,928	0,928	0,929
8,5	0,929	0,930	0,930	0,931	0,931	0,932	0,932	0,933	0,933	0,934
8,6	0,934	0,935	0,936	0,936	0,937	0,937	0,938	0,938	0,939	0,939
8,7	0,940	0,940	0,941	0,941	0,942	0,942	0,943	0,943	0,943	0,944
8,8	0,944	0,945	0,945	0,946	0,946	0,947	0,947	0,948	0,948	0,949
8,9	0,949	0,950	0,950	0,951	0,951	0,952	0,952	0,953	0,953	0,954
9,0	0,954	0,955	0,955	0,956	0,956	0,957	0,957	0,958	0,958	0,959

Dekadische Logarithmen (Briggs)

der Zahlen von

9,10 bis 9,99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9,1	0,959	0,960	0,960	0,960	0,961	0,961	0,962	0,962	0,963	0,963
9,2	0,964	0,964	0,965	0,965	0,966	0,966	0,967	0,967	0,968	0,968
9,3	0,968	0,969	0,969	0,970	0,970	0,971	0,971	0,972	0,972	0,973
9,4	0,973	0,974	0,974	0,975	0,975	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977
9,5	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
9,6	0,982	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986	0,986
9,7	0,987	0,987	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990	0,990	0,991
9,8	0,991	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,995	0,995
9,9	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999	1,000

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 8.1

1. Lies die Werte der Potenzen mit folgenden Exponenten aus der Potenztafel ab:

- a) 0,124 b) 0,471 c) 0,597 d) 0,926

2. Benutze die Potenztafel, um die Exponenten der folgenden Potenzwerte zu finden:

- a) 1,732 b) 1,770 c) 1,388 d) 2,568

Aufgaben zu Kapitel 8.2

1. Benutze die Potenztafel, um die Exponenten der folgenden Potenzwerte zu finden:

- a) 1,512 b) 1,869 c) 2,352 d) 2,353 e) 2,623
f) 2,624

2. Bestimme mit Hilfe der Logarithmentafel:

- a) $\ln 2$ b) $\ln 1,5$ c) $\ln 1,01$ d) $\ln 1,25$ e) $\ln 1,125$
f) $\ln 2,504$

3. Bestimme mit Hilfe der Logarithmentafel:

- a) $\ln 5$ b) $\ln 6$ c) $\ln 8$ d) $\ln 412$ e) $\ln 0,2$

Aufgaben zu Kapitel 8.3

1. Führe die folgende Logarithmen auf Logarithmen von Zahlen im Bereich von 1 bis 10 zurück:

a) $\lg 13$ b) $\lg 217$ c) $\lg 0,5$ d) $\lg 0,012$

2. Berechne die folgenden Logarithmen mit der Methode von Briggs. Rechne mit 2 Nachkommastellen:

a) $\lg 5,62$ b) $\lg 4,21$ c) $\lg 2$

9. Rechenmethoden für Computer

In diesem Kapitel betrachten wir Methoden zur Berechnung von Potenzen und Logarithmen, die auf Computern implementiert werden können.

Beliebige Logarithmen und Potenzen (die Wurzeln sind darin eingeschlossen) lassen sich auf zwei Dinge zurückführen:

- **Potenzen von e .** Diese können im Wesentlichen mit Hilfe der Exponentialreihe berechnet werden.
- **Natürliche Logarithmen.** Zu ihrer Berechnung behandeln wir zwei Verfahren:
 - a) Ein Näherungsverfahren mittels e -Potenzen.
 - b) Logarithmusreihen.

Eine beliebige Potenz x^y kann nämlich wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}x^y &= (e^{\ln x})^y \\x^y &= e^{y \cdot \ln x}\end{aligned}$$

Und ein beliebiger Logarithmus $\log_y x$ ist:

$$\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y},$$

insbesondere ist der Zehnerlogarithmus:

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Dieses Kapitel besteht daher aus folgenden Teilen:

9.1 Berechnung von e -Potenzen

9.2 Näherungsverfahren zur Berechnung von Logarithmen

9.3 Logarithmusreihen

Ausgangspunkt sind dabei die vier Grundrechenarten und Zahlen in Gleitkommadarstellung $\pm m \cdot 10^n$, wobei m zwischen 1 und 10 liegt, aber kleiner als 10 ist, und n eine ganze Zahl ist. Intern würde die binäre Variante $\pm m \cdot 2^n$, wobei aber m zwischen 1 und 2 liegt ($m \neq 2$), zu betrachten sein. Die Behandlung des binären Falles ist eine gute Übungsaufgabe.

Wir betrachten exemplarisch einen einfachen zehnstelligen wissenschaftlichen Taschenrechner, der intern 13 Stellen benutzt und dessen Gleitkommazahlen Exponenten von -99 bis 99 erlauben.

Auf einem solchen Rechner ist die größtmögliche (angezeigte und eingebbare) Zahl

$$9,999\,999\,999 \cdot 10^{99},$$

und die kleinstmögliche Zahl ist

$$-9,999\,999\,999 \cdot 10^{99}.$$

Null ausgenommen, sind die am nächsten bei Null liegenden Zahlen :

$$-1,000\,000\,000 \cdot 10^{-99} \quad \text{und} \quad 1,000\,000\,000 \cdot 10^{-99}.$$

Dies kann in folgender Übersicht zusammengefasst werden:

Fehler	OK	0	OK	Fehler
$-9 \cdot 10^{99}$	$-1 \cdot 10^{-99}$	0	$1 \cdot 10^{-99}$	$9 \cdot 10^{99}$

9.1 Berechnung von e -Potenzen

Es soll nun betrachtet werden, wie man e^x berechnet.

9.1.1 Erlaubter Bereich von x bei e^x

Sowohl x als auch e^x müssen grundsätzlich im Bereich von

$$-9,999\,999\,999 \cdot 10^{99} \text{ bis } 9,999\,999\,999 \cdot 10^{99}$$

liegen.

Der Wert von x muss aber noch wesentlich kleiner sein, da die Potenz e^x sehr schnell groß wird und die Obergrenze erreicht. Wir untersuchen dies nun genauer:

Um gut vergleichen zu können, schreiben wir e^x und die Obergrenze $9,999\,999\,999 \cdot 10^{99}$ jeweils als Zehnerpotenzen:

$$\begin{aligned} 9,999\,999\,999 \cdot 10^{99} &\approx 10 \cdot 10^{99} \\ &= 10^{100} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}e^x &= (10^{\lg e})^x \\ &= 10^{x \cdot \lg e}\end{aligned}$$

Nun können wir die Obergrenze für x bestimmen:

$$\begin{aligned}e^x &\leq 9,999\,999\,999 \cdot 10^{99} \\ 10^{x \cdot \lg e} &< 10^{100} \\ x \cdot \lg e &< 100 \\ x &< \frac{100}{\lg e}\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\lg e &= \log_{10} e \\ &= \frac{\ln e}{\ln 10} \\ &= \frac{1}{\ln 10}\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}x &< \frac{100}{\lg e} \\ x &< 100 \cdot \ln 10\end{aligned}$$

In Kapitel 7.4 haben wir den Näherungswert $\ln 10 \approx 2,31$ berechnet. Später werden wir den genaueren Näherungswert

$$\ln 10 \approx 2,302585093$$

bestimmen. Diesen setzen wir nun ein:

$$x < 100 \cdot \ln 10$$

$$x < 100 \cdot 2,302585093$$

$$x < 230,2585093$$

Da stets $e^x > 0$ ist, unterliegt x nach unten keiner zusätzlichen Begrenzung. Also muss x im Bereich

$$-9,999\,999\,999 \cdot 10^{99} \leq x < 230,2585093$$

liegen. Bei Eingabe eines Exponenten x oberhalb des Bereichs gibt der Rechner eine Fehlermeldung aus.

In $e^x = 10^{x \cdot \log e}$ darf $x \cdot \log e$ nicht kleiner als -99 sein,

d. h. x darf nicht kleiner als $\frac{-99}{\log e} = -99 \cdot \ln 10 \approx -227,96$

sein. Ist x kleiner als $-227,96$, so liegt e^x mathematisch noch näher bei Null und der Rechner zeigt eine glatte 0 an.

9.1.2 Berechnung von e^x

Da das Ergebnis von e^x eine Fließkommazahl sein soll, schreiben wir e^x wieder als Zehnerpotenz:

$$\begin{aligned} e^x &= (10^{\log e})^x \\ &= 10^{x \cdot \log e} \\ &= 10^{x / \ln 10} \end{aligned}$$

Wir zerlegen den Exponenten $\frac{x}{\ln 10}$ in seinen ganzen Anteil n und den gebrochenen („krummen“) Anteil M , wobei $0 \leq M < 1$:

$$\frac{x}{\ln 10} = M + n$$

Jede Zahl kann solchermassen zerlegt werden, wie die folgenden zwei Beispiele illustrieren:

Beispiel 1 (positive Zahl)

Wir zerlegen die Zahl 23,75:

$$23,75 = 23 + 0,75$$

Hierbei wurden praktisch nur die Nachkommastellen getrennt geschrieben.

Beispiel 2 (negative Zahl)

Wir zerlegen die negative Zahl -23,75:

Wir trennen zunächst wieder die Nachkommastellen ab:

$$-23,75 = -23 + (-0,75)$$

Leider ist der gebrochene Anteil -0,75 negativ. Um daraus eine positive Zahl zu machen, addieren wir 1. Zum Ausgleich subtrahieren wir 1 vom ganzen Anteil -23. Also:

$$\begin{aligned} -23,75 &= -23 + (-0,75) \\ &= -23 - 1 + (1 - 0,75) \\ &= -24 + 0,25 \end{aligned}$$

Wir fahren nun fort mit der Berechnung von e^x und schreiben:

$$\begin{aligned}
 e^x &= 10^{x/\ln 10} \\
 &= 10^{M+n} \\
 &= 10^M \cdot 10^n \quad (10 = e^{\ln 10} \text{ einsetzen}) \\
 &= e^{M \cdot \ln 10} \cdot 10^n
 \end{aligned}$$

Die Mantisse der gesuchten Gleitkommazahl ist also

$$m = e^{M \cdot \ln 10}$$

und muss noch berechnet werden. Da M zwischen 0 und 1 liegt, ist $M \cdot \ln 10$ eine Zahl zwischen 0 und $\ln 10 \approx 2,3$. Unsere Aufgabe besteht also darin, Potenzen von e mit Exponenten im Bereich von 0 bis etwa 2,3 zu berechnen. Dazu benutzen wir die in Kapitel 6.3 dargelegte Methoden der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Wir nehmen die Näherung:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{17}}{17!}.$$

Die Abweichung (Rest R) kann wie oben mithilfe einer geometrischen Reihe abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{x^{18}}{18!} + \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{20}}{20!} + \frac{x^{21}}{21!} + \dots \\
 &\leq \frac{x^{18}}{18!} + \left(\frac{x}{19}\right) \frac{x^{18}}{18!} + \left(\frac{x}{19}\right)^2 \frac{x^{18}}{18!} + \left(\frac{x}{19}\right)^3 \frac{x^{18}}{18!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^{18}}{18!} \left[1 + \left(\frac{x}{19}\right) + \left(\frac{x}{19}\right)^2 + \left(\frac{x}{19}\right)^3 + \dots \right] \\
 &= \frac{x^{18}}{18!} \frac{1}{1 - \frac{x}{19}}.
 \end{aligned}$$

Also:

$$R \leq \frac{x^{18}}{18!} \frac{1}{1 - \frac{x}{19}}.$$

Für $x = 2,3$ (dem größten Wert im betrachteten Bereich) ist der Rest höchstens:

$$R \leq \frac{2,3^{18}}{18!} \frac{1}{1 - \frac{2,3}{19}} \approx 5,76 \cdot 10^{-10}$$

Also

$$R \leq 0,000000000576\dots,$$

was nach Rundung zu Abweichungen in der neunten Nachkommastelle führen kann.

Da wir eine Genauigkeit von 13 Stellen (das sind 12 Nachkommastellen) anstreben, müsste der Rest aber höchstens 0,000 000 000 000 4 betragen. Um dieses Ziel zu erreichen, halbieren wir x (vgl. Kap. 6.3):

$$e^x = \left(e^{x/2}\right)^2.$$

Man würde also $e^{2,3}$ folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{2,3}{2} &= 1,15 \\ e^{1,15} &\approx 1 + 1,15 + \frac{1,15^2}{2} + \dots + \frac{1,15^{17}}{17!} \\ &\approx 3,158192909690\end{aligned}$$

Dann wird dieses Ergebnis quadriert:

$$\begin{aligned}e^{2,3} &= (e^{1,15})^2 \approx (3,158192909690)^2 \\ &\approx 9,974182454816\end{aligned}$$

Der gerundete tatsächliche Wert weicht nur in der letzten Stelle ab: $e^{2,3} = 9,974182454815$. Der Unterschied von 1 in der letzten Stelle ist vertretbar.

Das beschriebene Verfahren lautet zusammengefasst

$$e^x \approx \left(1 + (x/2) + \frac{(x/2)^2}{2} + \dots + \frac{(x/2)^{17}}{17!} \right)^2.$$

Es liefert für alle x im Bereich von 0 bis 2,3 hinreichend genaue Ergebnisse. Die Mantisse $m = e^{M \cdot \ln 10}$ der gesuchten Gleitkommazahl ist damit berechenbar.

Angesichts der Komplexität der betrachteten Dinge, scheint es angebracht, innezuhalten und zusammenzufassen:

Zusammenfassung

Wir fassen das erläuterte Verfahren zur Berechnung von e^x zusammen:

- a) Schreiben e^x als Zehnerpotenz:

$$e^x = 10^{x/\ln 10}$$

- b) Zerlege den Exponenten $\frac{x}{\ln 10}$ in seinen ganzen Anteil n und den gebrochenen Anteil M , wobei $0 \leq M < 1$:

$$\frac{x}{\ln 10} = M + n$$

- c) Bestimme die Gleitkomma-Darstellung von e^x :

$$e^x = e^{M \cdot \ln 10} \cdot 10^n$$

Hierbei ist $m = e^{M \cdot \ln 10}$ die Mantisse.

- d) Berechne die Mantisse mit der Formel::

$$e^z \approx \left(1 + (z/2) + \frac{(z/2)^2}{2} + \dots + \frac{(z/2)^{17}}{17!} \right)^2,$$

wobei $z = M \cdot \ln 10$.

9.2 Näherungsweise Berechnung von natürlichen Logarithmen

Der Logarithmus einer Gleitkommazahl $m \cdot 10^n$ ist

$$\ln(m \cdot 10^n) = \ln m + n \cdot \ln 10$$

und kann somit auf den Logarithmus der Mantisse m zurückgeführt werden, die eine kleine Zahl im Bereich von 1 bis 10 ist. Wir betrachten hier ein Näherungsverfahren, das die Berechnung solcher Logarithmen gestattet.

Für kleine Werte von x haben wir $e^x \approx 1 + x$. Daraus folgt eine Näherungsformel für natürliche Logarithmen von Zahlen nahe bei 1:

$$\ln(1+x) \approx x.$$

Beispielsweise ist $\ln 1,25 \approx 0,25$ und $\ln 1,1 \approx 0,1$.

Wir betrachten nun allgemein einen Näherungswert x für den Logarithmus von a :

$$\ln a \approx x$$

Um aus dem Näherungswert x den genauen Wert (oder zumindest einen verbesserten Wert) zu bekommen, addieren wir einen kleinen Betrag h und setzen dann:

$$\ln a = x + h.$$

Dies bedeutet, dass:

$$e^{x+h} = a.$$

Daraus bestimmen wir nun h (wenn auch wiederum nur in Näherung):

$$e^{x+h} = a$$

$$e^x \cdot e^h = a \quad | e^h \approx 1+h, \text{ weil } h \text{ klein ist}$$

$$e^x \cdot (1+h) \approx a \quad |:e^x$$

$$1+h \approx \frac{a}{e^x}$$

$$h \approx \frac{a}{e^x} - 1$$

Der verbesserte Näherungswert ist also:

$$y = x + h$$

$$y \approx x + \frac{a}{e^x} - 1$$

Zusammengefasst:

Wenn

$$x \approx \ln a ,$$

dann ist

$$y = x + \frac{a}{e^x} - 1$$

eine bessere Näherung für den Logarithmus.

Wie beim Heron-Verfahren können die Verbesserungen wiederholt werden, um das Ergebnis mit der gewünschten Genauigkeit zu erzielen. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Beispiel

Berechne $\ln 1,25$ mit 13 Stellen (12 Nachkommastellen).

Lösung

Startwert: $\ln 1,25 \approx 0,25$. ($a = 1,25$, $x = 0,25$)

1. Verbesserung:

$$x = 0,25$$

$$y = x - 1 + \frac{a}{e^x}$$

$$y = 0,25 + \frac{1,25}{e^{0,25}} - 1$$

$$\approx 0,25 + \frac{1,25}{1,284025416688} - 1$$

$$\approx 0,25 + 0,973500978839 - 1$$

$$\approx 0,223500978839$$

2. Verbesserung:

$$x = 0,223500978839$$

$$y = x - 1 + \frac{a}{e^x}$$

$$y = 0,223500978839 + \frac{1,25}{e^{0,223500978839}} - 1$$

$$\approx 0,223500978839 + \frac{1,25}{1,250446864262} - 1$$

$$\approx 0,223500978839 + 0,999642636345 - 1$$

$$\approx 0,223143615184$$

3. Verbesserung:

$$x = 0,223143615184$$

$$y = x - 1 + \frac{a}{e^x}$$

$$\begin{aligned} y &= 0,223143615184 + \frac{1,25}{e^{0,223143615184}} - 1 \\ &\approx 0,223143615184 + \frac{1,25}{1,250000079837} - 1 \\ &\approx 0,223143615184 + 0,999999936130 - 1 \\ &\approx 0,223143551314 \end{aligned}$$

4. Verbesserung:

$$x = 0,223143551314$$

$$y = x - 1 + \frac{a}{e^x}$$

$$\begin{aligned} y &= 0,223143551314 + \frac{1,25}{e^{0,223143551314}} - 1 \\ &\approx 0,223143551314 + \frac{1,25}{1,250000000000} - 1 \\ &\approx 0,223143551314 + 1,000000000000 - 1 \\ &\approx 0,223143551314 \end{aligned}$$

Es gibt keine weitere Verbesserung im letzten Schritt. Also haben wir mit 12 Nachkommastellen:

$$\ln 1,25 \approx 0,223143551314$$

Anmerkungen

1. Die Berechnung der e -Potenzen erfolgte hier mittels:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^9}{9!}.$$

Da die Ergebnisse der ersten Schritte ohnehin noch grob sind, kann man im ersten Schritt die Näherung

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

wählen, und im zweiten Schritt:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

2. Das hier angewandte Verfahren zur Berechnung der Logarithmen kann auch als Sonderfall des in der Differentialrechnung betrachteten Newton-Verfahrens aufgefasst werden.

9.3 Logarithmusreihen

9.3.1 Einführende Vorüberlegungen

In Kapitel 6.3 haben wir bereits zwei Reihen betrachtet:

- Die **geometrische Reihe**:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

die eine Division durch eine (unendliche) Summe von Potenzen ausdrückt.

- Die **Exponentialreihe**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

In Anbetracht der Näherung

$$\ln(1+x) \approx x$$

liegt es nicht sehr fern, anzunehmen, dass es auch hier eine Reihe gibt:

$$\ln(1+x) = x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

Ein weiteres Indiz ist das Ergebnis der Verbesserung von $\ln(1+x) \approx x$ mithilfe der oben betrachteten Methode:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\approx x + \frac{1+x}{e^x} - 1 \\ &= -1 + x + (1+x)e^{-x} \\ &= -1 + x + (1+x)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

9.3.2 Herleitung einer ersten Logarithmusreihe

Wir nehmen den obigen Ansatz

$$\ln(1+x) = x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

und bestimmen die Koeffizienten (Vorzeichen) $c_2, c_3, c_4, \dots$
 Dazu betrachten wir zusätzlich einen nahe bei x liegenden Wert $x + h$:

$$\ln(1+x+h) = x+h + c_2(x+h)^2 + c_3(x+h)^3 + \dots$$

Wie in Kapitel 6.3 beschrieben, kann die rechte Seite umgeformt werden und wir bekommen

$$\begin{aligned} \ln(1+x+h) &= x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \\ &\quad + h(1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\dots) \\ &= \ln(1+x) + h(1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\dots) \end{aligned}$$

Und somit:

$$\ln(1+x+h) = \ln(1+x) + h(1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\dots)$$

Auf der linken Seite machen wir $1+x+h$ zu einer Zahl nahe bei, indem wir $1+x$ ausklammern (und gewissermaßen $1+x$ zu 1 machen):

$$1+x+h = (1+x) \cdot \left(1 + \frac{h}{1+x}\right)$$

Also ist unter Benutzung von $\ln(1+k) = k$ für kleine k :

$$\begin{aligned} \ln(1+x+h) &= \ln\left((1+x) \cdot \left(1 + \frac{h}{1+x}\right)\right) \\ &= \ln(1+x) + \ln\left(1 + \frac{h}{1+x}\right) \end{aligned}$$

$$= \ln(1+x) + \frac{h}{1+x}$$

Daher haben wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) + \frac{h}{1+x} &= \ln(1+x) \\ &+ h(1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots) \end{aligned}$$

Die Summanden $\ln(1+x)$ heben sich auf, somit bleibt:

$$\frac{h}{1+x} = h(1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots)$$

Nun kann durch h geteilt werden und man bekommt:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots$$

Auf der linken Seite steht eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $-x$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + (-x)^5 + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \end{aligned}$$

Dies oben eingesetzt, führt zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots \\ 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots &= 1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten links (± 1) müssen mit den entsprechenden rechts übereinstimmen:

$$2c_2 = -1$$

$$3c_3 = +1$$

$$4c_4 = -1$$

$$5c_5 = +1$$

usw.

Somit sind die Koeffizienten:

$$c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = +\frac{1}{3}$$

$$c_4 = -\frac{1}{4}$$

$$c_5 = +\frac{1}{5}$$

usw.

Und unsere Logarithmusreihe lautet daher konkret:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Wie bei der geometrischen Reihe muss man hier voraussetzen, dass x betraglich kleiner als 1 ist.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Reihe berechnen wir nun Näherungen für den im letzten Kapitel bereits berechneten Logarithmus $\ln 1,25 \approx 0,223143551314$. Die Reihe

wird dabei an verschiedenen Stellen abgebrochen. Danach machen wir zwei verschiedene Fehlerabschätzungen.

Beispiel

Berechne $\ln 1,25$

Lösungen

a) $\ln(1+x) \approx x$

$$\ln 1,25 = \ln(1+0,25) \approx 0,25$$

b) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}\ln 1,25 &= \ln(1+0,25) \\ &\approx 0,25 - \frac{0,25^2}{2} \\ &= 0,25 - \frac{0,0625}{2} = 0,21875\end{aligned}$$

c) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$\begin{aligned}\ln 1,25 &= \ln(1+0,25) \\ &\approx 0,25 - \frac{0,25^2}{2} + \frac{0,25^3}{3} \\ &= 0,25 - \frac{0,0625}{2} + \frac{0,015625}{3} \\ &\approx 0,2239583333\end{aligned}$$

d) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

$$\begin{aligned}
 \ln 1,25 &= \ln(1+0,25) \\
 &\approx 0,25 - \frac{0,25^2}{2} + \frac{0,25^3}{3} - \frac{0,25^4}{4} \\
 &= 0,25 - \frac{0,0625}{2} + \frac{0,015625}{3} - \frac{0,00390625}{4} \\
 &\approx 0,222981770833
 \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung 1

Der Fehler R bei der Näherung

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

ist

$$R = + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - + \dots$$

Wir betrachten nur positive Werte von x (wie 0,25 im Beispiel), ferner ersetzen wir die Subtraktionen durch Additionen, und machen aus dem Ergebnis eine geometrische Reihe mit dem Quotienten x :

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - + \dots \\
 &\leq \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots \\
 &= \frac{x^5}{5} (1 + x + x^2 + \dots) \\
 &= \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{1-x}
 \end{aligned}$$

Im Beispiel ($x = 0,25$) ist der Fehler also

$$\begin{aligned} R &\leq \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{0,25^5}{5} \cdot \frac{1}{1-0,25} \\ &\leq 0,0003 \end{aligned}$$

Die ersten drei Nachkommastellen bei

$$\ln 1,25 \approx 0,22298 \approx \underline{\underline{0,223}}$$

sind also zutreffend (nach Rundung).

Fehlerabschätzung 2

Wenn x positiv ist, hat die Reihe

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

zwei Eigenschaften, die eine sehr einfache Fehlerabschätzung gestatten:

- Ihre Glieder haben abwechselnde Vorzeichen.
- Ihre Glieder nehmen betraglich ab.

Solche Reihen sind als *alternierende* oder *Leibniz-Reihen* bekannt; der Fehler beim Abbrechen ist betraglich höchstens so groß wie das erste weggelassene Glied. Dies kann an unserem Beispiel gut verstanden werden:

Der Fehler R bei der Näherung

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

ist

$$R = + \frac{x^5}{5} - \underbrace{\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}}_{\text{negativ}} - \underbrace{\frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9}}_{\text{negativ}} - + \dots$$

$$\leq + \frac{x^5}{5}$$

Also ist in der Tat R betraglich kleiner als das erste weggelassene Glied:

$$R \leq \frac{x^5}{5}.$$

Dies ist im Wesentlichen auch richtig, wenn das erste weggelassene Glied **negativ** ist, zum Beispiel bei

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Hier ist der Rest negativ:

$$R = - \underbrace{\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}}_{\text{negativ}} - \underbrace{\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}}_{\text{negativ}} - \underbrace{\frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9}}_{\text{negativ}} - + \dots$$

Der Betrag des Restes ist also:

$$\begin{aligned}
 -R &= + \frac{x^4}{4} - \underbrace{\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}}_{\text{negativ}} - \underbrace{\frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8}}_{\text{negativ}} - + \dots \\
 &\leq + \frac{x^4}{4}
 \end{aligned}$$

Also:

$$-R \leq \frac{x^4}{4}$$

Betrag des Fehlers $\leq$ Betrag des 1. weggelassenen Gliedes

Im Beispiel ($x = 0,25$) ist der Fehler bei

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

also

$$\begin{aligned}
 R &\leq \frac{x^5}{5} \\
 &= \frac{0,25^5}{5} \\
 &\leq 0,0002
 \end{aligned}$$

Die ersten drei Nachkommastellen bei

$$\ln 1,25 \approx 0,22298 \approx 0,\underline{223}$$

sind also zutreffend (nach Rundung).

9.3.3 Eine effizientere Logarithmusreihe

Die obige Berechnung von $\ln 1,25$ zeigt, dass die Logarithmusreihe

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

nicht sehr effizient ist. Um drei zutreffende Nachkommastellen zu bekommen, mussten wir vier Glieder der Reihe nehmen:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Man kann aus unserer Logarithmusreihe eine effizientere Variante gewinnen, und zwar wie folgt.

Wir ersetzen in der Logarithmusreihe x durch $-x$, und ziehen das Ergebnis von der originalen Reihe ab:

$$\ln(1+x) = +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = +2 \cdot x + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

Diese Reihe hat zwei große Vorteile, die beide den Rechenaufwand erheblich reduzieren:

- Sie enthält nur halb so viele Potenzen (nämlich nur die mit ungeraden Exponenten).
- Bei gleichem Numerus ist x eine kleinere Zahl.

Zur Erläuterung greifen wir obiges Beispiel auf und berechnen $\ln 1,25$ mithilfe der neuen Reihe.

Vorab müssen wir aus der vorgegeben Zahl $z = 1,25$ das x aus der Reihe bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x} &= z && | \cdot (1-x) \\ 1+x &= z \cdot (1-x) \\ 1+x &= z - zx \\ zx + x &= z - 1 \\ x(z+1) &= z - 1 && | : (z+1) \\ x &= \frac{z-1}{z+1}\end{aligned}$$

Für $z = 1,25$ bekommen wir also:

$$\begin{aligned}x &= \frac{z-1}{z+1} \\ &= \frac{1,25-1}{1,25+1} \\ &= \frac{0,25}{2,25} = \frac{1}{9} \\ x &= 0,111...\end{aligned}$$

Beispiel

Berechne $\ln 1,25$

Lösungen

Zunächst ist x zu bestimmen (s. o.):

$$x = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1,25-1}{1,25+1} = 0,111\dots$$

$$\text{a) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2 \cdot (x)$$

$$\ln 1,25 \approx 2 \cdot (0,111111111) = 0,222222222$$

$$\text{b) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \ln 1,25 &\approx 2 \cdot \left(0,111\dots + \frac{(0,111\dots)^3}{3}\right) \\ &\approx 2 \cdot \left(0,111\dots + \frac{0,0013717421\dots}{3}\right) \\ &\approx 0,22313\ 67170 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} \ln 1,25 &\approx 2 \cdot \left(0,111\dots + \frac{(0,111\dots)^3}{3} + \frac{(0,111\dots)^5}{5}\right) \\ &\approx 2 \cdot \left(0,111\dots + \frac{0,001371742\dots}{3} + \frac{0,000016935\dots}{5}\right) \\ &\approx 0,2231434910 \\ &\approx 0,2231435 \end{aligned}$$

Die Näherung mit nur drei Gliedern der Reihe liefert also bereits 6 exakte Nachkommastellen von

$$\ln 1,25 = 0,223143551314... \\ \approx 0,2231436 \quad ,$$

wobei die siebte Stelle nur um 1 abweicht. Mit einem Glied mehr hätte die ursprüngliche Reihe lediglich drei exakte Nachkommastellen geliefert.

Fehlerabschätzung

Der Fehler R bei der Näherung

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$$

ist

$$R = 2 \cdot \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \dots\right)$$

Wir betrachten nur positive Werte von x und machen daraus eine geometrische Reihe mit dem Quotienten x^2 :

$$\begin{aligned} R &= 2 \cdot \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \dots\right) \\ &\leq 2 \cdot \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{7} + \frac{x^{11}}{7} + \dots\right) \\ &= 2 \cdot \frac{x^7}{7} (1 + x^2 + x^4 + \dots) \\ &= 2 \cdot \frac{x^7}{7} \cdot \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

Im Beispiel ($x = 0,111\dots$) ist der Fehler also

$$\begin{aligned}
 R &\leq 2 \cdot \frac{x^7}{7} \cdot \frac{1}{1-x^2} \\
 &= 2 \cdot \frac{(0,111\dots)^7}{7} \cdot \frac{1}{1-(0,111\dots)^2} \\
 &\leq 0,0000000607
 \end{aligned}$$

Die ersten 6 Nachkommastellen bei

$$\begin{aligned}
 \ln 1,25 &\approx 0,2231434910 \\
 &\approx \underline{0,2231435}
 \end{aligned}$$

sind also zutreffend, die siebte Stelle könnte um höchstens 1 abweichen.

Mit dieser effizienteren Logarithmusreihe können wir nun auch die zurückgestellten Logarithmen von 2, 3, ..., 10 berechnen.

9.3.4 Die natürlichen Logarithmen von 2, 3, ..., 10

Zunächst zerlegen wir die Zahlen und führen sie so auf kleinere zurück, die sich effizienter berechnen lassen. Alle Rechnungen führen wir mit 15 Stellen durch.

Zerlegungen:

$$\begin{aligned}
 2 &= 1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,024 \\
 3 &= 1,25^4 \cdot 1,2288 \\
 4 &= 2 \cdot 2 \\
 5 &= 1,25 \cdot 4 \\
 6 &= 2 \cdot 3
 \end{aligned}$$

$$7 = 4 \cdot 1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,12$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

Mithilfe der Reihe müssen wir also folgende vier Logarithmen berechnen:

$$\ln 1,25$$

$$\ln 1,2288$$

$$\ln 1,12$$

$$\ln 1,024$$

Um zu wissen, wie viele Glieder der Logarithmusreihe für die gewünschte Genauigkeit von 15 Stellen zu nehmen sind, betrachten wir die Abschätzungen der Restglieder:

z	1,2500	1,2288
$x = \frac{z-1}{z+1}$	0,111111111111111	0,102656137832017
$R7 \leq \frac{x^7}{7(1-x^2)}$	0,000000030241228	0,000000017345923
$R9 \leq \frac{x^9}{9(1-x^2)}$	0,000000000290382	0,000000000142175
$R11 \leq \frac{x^{11}}{11(1-x^2)}$	0,000000000002933	0,000000000001226
$R13 \leq \frac{x^{13}}{13(1-x^2)}$	0,000000000000031	0,000000000000011
$R15 \leq \frac{x^{15}}{15(1-x^2)}$	0,000000000000000	0,000000000000000

z	1,1200	1,0240
$x = \frac{z-1}{z+1}$	0,056603773584906	0,011857707509881
$R7 \leq \frac{x^7}{7(1-x^2)}$	0,000000000266817	0,000000000000005
$R9 \leq \frac{x^9}{9(1-x^2)}$	0,000000000000665	0,000000000000000
$R11 \leq \frac{x^{11}}{11(1-x^2)}$	0,000000000000002	0,000000000000000
$R13 \leq \frac{x^{13}}{13(1-x^2)}$	0,000000000000000	0,000000000000000
$R15 \leq \frac{x^{15}}{15(1-x^2)}$	0,000000000000000	0,000000000000000

Also können wir folgende Näherungen wählen:

Für $\ln 1,25$ und $\ln 1,2288$:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} \right)$$

Für $\ln 1,12$:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} \right)$$

Für $\ln 1,024$:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right)$$

Damit erhält man die Werte:

$$\ln 1,25 \approx 0,223143551314210$$

$$\ln 1,2288 \approx 0,206038083411271$$

$$\ln 1,12 \approx 0,113328685307004$$

$$\ln 1,024 \approx 0,023716526617316$$

Daraus können nun die Logarithmen aller oben genannten Zahlen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \ln(1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,024) \\ &= 3 \cdot \ln 1,25 + \ln 1,024 \\ &\approx 0,693147180559946\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 3 &= \ln(1,25^4 \cdot 1,2288) \\ &= 4 \cdot \ln 1,25 + \ln 1,2288 \\ &\approx 1,098612288668112\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 4 &= \ln(2 \cdot 2) \\ &= 2 \cdot \ln 2 \\ &\approx 1,386294361119892\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 5 &= \ln(1,25 \cdot 4) \\ &= \ln 1,25 + \ln 4 \\ &\approx 1,609437912434100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 6 &= \ln(2 \cdot 3) \\ &= \ln 2 + \ln 3 \\ &\approx 1,791759469228056\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 7 &= \ln(4 \cdot 1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,12) \\ &= \ln 4 + 2 \cdot \ln 1,25 + \ln 1,12 \\ &\approx 1,945910149055314\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 8 &= \ln(2 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= 3 \cdot \ln 2 \\ &\approx 2,079441541679838\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 9 &= \ln(3 \cdot 3) \\ &= 2 \cdot \ln 3 \\ &\approx 2,197224577336220\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 10 &= \ln(2 \cdot 5) \\ &= \ln 2 + \ln 5 \\ &\approx 2,302585092994046\end{aligned}$$

Für den hier betrachteten 13-stelligen Rechner müssen wir die natürlichen Logarithmen im Bereich von 1 bis 1,25 mittels der Reihe berechnen. Dazu reicht die Näherung

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11}\right)$$

Denn nach der Tabelle ist die Abweichung R sogar für den größten Wert $z = 1,25$ (also $x = 0,111\dots$) höchstens:

$$\frac{x^{13}}{13 \cdot (1 - x^2)} = \frac{(0,111\dots)^{13}}{13 \cdot (1 - (0,111\dots)^2)}$$
$$\approx 0,0000000000000031$$

Die dreizehn Nullen nach dem Komma und die anschließende 3 zeigen, dass mit der gewählten Näherung tatsächlich dreizehn Nachkommastellen gesichert sind.

Damit sind alle Mittel zur Implementierung der Logarithmus- und Potenzberechnungen bereitgestellt.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 9.1

1. Zerlege jede der folgenden Zahlen in eine ganze Zahl und einen positiven Dezimalbruch unter 1:
a) 3,2 b) -3,2 c) 184,51 d) -184,51
2. Führe jede der Potenzen auf eine e -Potenz mit einem Exponenten zwischen 0 und 2,3 zurück:
a) e^{100} b) e^{-100} c) e^{-1}

Aufgaben zu Kapitel 9.2

1. Berechne die folgenden Logarithmen mithilfe des Näherungsverfahrens und der e -Potenzen-Tabelle aus dem Kapitel 8.1.. Rechne mit zwei Nachkommastellen. Wähle zur Beschleunigung des Verfahrens angemessene Startwerte:
Numerus a im Bereich von 1 bis 2: Startwert $a - 1$
Numerus a im Bereich von 2 bis 5: Startwert 1
Numerus a im Bereich von 5 bis 10: Startwert 2
a) $\ln 1,2$ b) $\ln 2$ c) $\ln 5$ d) $\ln 10$
2. Benutze die Ergebnisse von Aufgabe 1, um folgende Logarithmen zu berechnen; rechne mit zwei Nachkommastellen.
a) $\ln(1,2 \cdot 10^{20})$ b) $\ln(2 \cdot 10^{-10})$ c) $\ln(5 \cdot 10^2)$

Aufgaben zu Kapitel 9.3

1. Berechne $\ln 1,2$ mit Hilfe der Näherungen

$$\text{a) } \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{b) } \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Rechne dabei mit *vier* Nachkommastellen. Schätze die Abweichungen.

2. Berechne $\ln 1,2$ mit Hilfe der Näherungen

$$\text{a) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$$

$$\text{b) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$$

Rechne dabei mit *sechs* Nachkommastellen. Schätze die Abweichungen.

3. Berechne $\ln 2$ mit Hilfe der Näherungen

$$\text{a) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$$

$$\text{b) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$$

Rechne dabei mit *vier* Nachkommastellen. Schätze die Abweichungen.

Zusatzaufgaben (Binomialreihe)

Die für kleine h gültige Näherungsformel $(1+h)^n \approx 1+nh$ (Kap. 3.5.5) legt den allgemeinen Ansatz

$$(1+x)^a = 1 + ax + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$$

nahe, wobei a beliebig ist und x nicht notwendig klein sein muss. Die nachstehenden Aufgaben sind Schritte zur Bestimmung der Koeffizienten (im Wesentlichen das gleiche Vorgehen wie bei der ersten Logarithmusreihe.)

1. Vereinfache (h klein):

a) $(1+x+h)^a$

b) $1 + a(x+h) + c_2(x+h)^2 + c_3(x+h)^3 + \dots$

2. Setze die Ergebnisse von 1a) und 1b) gleich und folgere:

a) $a(1+x)^a = (1+x)(a + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \dots)$

b) $a(1 + ax + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) =$
 $a + (a+2)x + (2c_2+3c_3)x^2 + (2c_3+3c_4)x^3 + \dots$

c) $c_2 = \frac{a(a-1)}{2}, \quad c_3 = \frac{a(a-1)(a-2)}{2 \cdot 3},$

$$c_4 = \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ usw.}$$

Aus 2c) ergibt sich die sogenannte *Binomialreihe*:

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots$$

Hierbei sind $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-(n-1))}{n!}$ die *Binomialkoeffizienten*.

3. Finde die ersten vier Terme der Binomialreihe für $\sqrt{1+x}$.

4. Berechne folgende Binomialkoeffizienten (hier sind für a natürliche Zahlen gewählt worden):

a) $\binom{2}{1}, \binom{2}{2}, \binom{2}{3}, \binom{2}{4}, \binom{2}{100}$

b) $\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}, \binom{3}{4}, \binom{3}{5}$

c) $\binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}, \binom{4}{5}$

5. Zeige, dass der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

aus der Binomialreihe hergeleitet werden kann. Tipp:

Schreibe $a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right)$.

10. Anwendungen der Logarithmen

Wie bereits gesagt und erläutert, sind Logarithmen erfunden worden, um das Rechnen zu erleichtern. Die an sich ziemlich aufwendigen Rechenoperationen Multiplikation, Division, Potenzierung und das Wurzelziehen werden durch Logarithmen erheblich vereinfacht. Wir haben auch gesehen, dass Logarithmen in einem Rechner implementiert sind, um beliebige Potenzen berechnen zu können.

Vor der dem Aufkommen der Taschenrechner waren **Rechenschieber** ein weit verbreitetes Rechenhilfsmittel. Sie beruhen auf Logarithmen.

Unentbehrlich sind die Logarithmen zudem bei der Lösung all jener Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Exponenten einer Potenz auftaucht. Diese Aufgabe stellt sich zum Beispiel, wenn man die Laufzeit eines Sparguthabens im Rahmen des Zinseszinses berechnen möchte oder wenn man die Halbwertszeit einer radioaktiven Substanz finden möchte. Gleichungen, die die Unbekannte im Exponenten einer Potenz enthalten, werden als **Exponentialgleichungen** bezeichnet.

Auch etwas näher am alltäglichen Leben sind direkt oder indirekt Logarithmen anzutreffen: der „hautneutrale“ **ph-Wert** 5,5 einer Waschlotion ist ein Logarithmus, hinter einem „**fünfstelligen**“ Geldbetrag steckt ebenfalls ein Logarithmus, und der **Informationsbegriff** in der Informatik beruht auf dem Zweierlogarithmus.

Dieses Kapitel besteht aus folgenden Abschnitten:

10.1 Exponentialgleichungen

10.2 Rechenschieber

10.3 Größenordnung von Zahlen

10.4 Informationsbegriff

10.1 Exponentialgleichungen

Wir betrachten hier Beispiele einfacher Exponentialgleichungen. Manchmal muss man noch einige Umformungen vornehmen, um auf eine einfache Gleichung der Gestalt $a^x = b$ zu kommen.

Beispiel 1

Löse die Gleichung $2^x = 3$.

Lösung 1 (Logarithmus bilden)

Bilde auf beiden Seiten der Gleichung den Logarithmus, wende die Regeln an und löse nach x auf:

$$\begin{aligned}2^x &= 3 \\ \ln(2^x) &= \ln 3 \\ x \cdot \ln 2 &= \ln 3 \quad | : \ln 2 \\ x &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ &= \frac{1,0986...}{0,6931...} \approx 1,5850\end{aligned}$$

Also ist $x \approx 1,5850$.

Lösung 2 (Definition des Zweierlogarithmus)

Laut Definition ist x nichts anderes als der Logarithmus von 3 zur Basis 2. Daher können wir so vorgehen:

$$2^x = 3$$

$$x = \log_2 3$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$x = \frac{1,0986...}{0,6931...} \approx 1,5850$$

Also ist wieder $x \approx 1,5850$.

Lösung 3 (Zahlen als Potenzen schreiben)

Wir schreiben alle Zahlen (außer den Exponenten) als Potenzen:

$$2^x = 3$$

$$(e^{\ln 2})^x = e^{\ln 3}$$

$$e^{x \cdot \ln 2} = e^{\ln 3}$$

Die Exponenten müssen daher gleich sein:

$$x \cdot \ln 2 = \ln 3 \quad | : \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$= \frac{1,0986...}{0,6931...} \approx 1,5850$$

Also ist wieder $x \approx 1,5850$.

Beispiel 2

Ein Sparguthaben von 2000 € wird mit 4 % jährlich verzinst. Im wievielten Jahr wird es auf 3000 € wachsen?

Lösung

1. Gleichung aufstellen

In Kapitel 2.1 wurde erläutert, wie sich ein Kapital entwickelt. Für jedes abgelaufene Jahr muss man das Guthaben mit dem Zinsfaktor (hier: $q = \frac{100+4}{100} = 1,04$) multiplizieren:

$$\text{Kapital nach 1 Jahr} = 2000 \text{ €} \cdot 1,04$$

$$\text{Kapital nach 2 Jahren} = 2000 \text{ €} \cdot 1,04 \cdot 1,04$$

$$\text{Kapital nach 3 Jahren} = 2000 \text{ €} \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,04$$

$$\text{Kapital nach 4 Jahren} = 2000 \text{ €} \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,04$$

usw.

Und allgemein haben wir:

$$\text{Kapital nach } n \text{ Jahren} = 2000 \text{ €} \cdot 1,04^n$$

Das Kapital soll nach n Jahren auf 3000 € wachsen, daher (unter Auslassung der Einheit €):

$$3000 = 2000 \cdot 1,04^n$$

Gesucht ist hier der Exponent n .

2. Gleichung lösen

Wir isolieren die Potenz, bilden dann den Logarithmus auf beiden Seiten, wenden die Regeln an und lösen nach n auf:

$$\begin{aligned}3000 &= 2000 \cdot 1,04^n && |: 2000 \\1,5 &= 1,04^n \\ \ln(1,5) &= \ln(1,04^n) \\ \ln(1,5) &= n \cdot \ln(1,04) && |: \ln(1,04) \\ \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,04)} &= n \\ n &= \frac{0,4054...}{0,0392...} \approx 10,33\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass das Guthaben im Laufe des 11. Jahres auf 3000 € angewachsen wird.

C14-Methode zur Altersbestimmung

Durch die kosmische Strahlung wird ein kleiner Teil des Stickstoffs der Atmosphäre in Kohlenstoff umgewandelt, und zwar in die radioaktive Variante (*Isotop*) C14. Diesen nehmen die Pflanzen durch die Photosynthese auf, und über die Nahrungskette erhalten alle Lebewesen einen gewissen Anteil an C14. Nachdem Tode nimmt der Anteil ab, da C14 zerfällt (dabei strahlt, radioaktiv ist) und kein Nachschub mehr durch die Photosynthese bzw. Nahrungsaufnahme geliefert wird. Aus dem Anteil des verbliebenen C14 kann der Todeszeitpunkt berechnet werden. Dies ist die berühmte Radiokarbonmethode (C14-Methode) zur Altersbestimmung von organischen Fossilien.

Der Zerfallsprozess von C14 verläuft mathematisch analog zum Wachstum eines Sparguthabens mit Zinseszins.

Beispiel 3

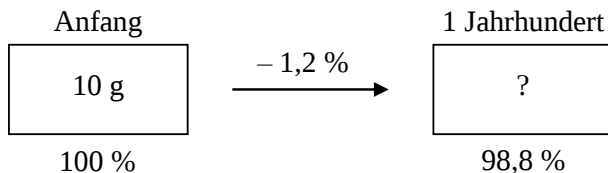
Gegeben sind 10 g des radioaktiven Kohlenstoffs C14. In einem **Jahrhundert** zerfallen etwa 1,2 % C14.

Nach wie vielen Jahren ist die Hälfte zerfallen (*Halbwertszeit*)?

Lösung 1 (ausführlich)

1. Masse nach 1 Jahrhundert (100 Jahren)

Überblick:



Die Masse in einem Jahrhundert **nimmt** um 1,2 % **ab**, es bleiben also:

$$100\% - 1,2\% = 98,8\%.$$

Die Übersicht enthält alle Informationen und Zuordnungen für den Dreisatz:

$$\begin{array}{lll} 100\% & \rightarrow & 10\text{ g} \\ 98,8\% & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{98,8\% \cdot 10\text{ g}}{100\%}$$

Wir ziehen die Masse vor den Bruch. Dadurch sind die feststehenden Prozentangaben von der im Laufe der Jahre sich verändernden Masse getrennt. Ferner berechnen wir den Bruch:

$$\begin{array}{c} \text{Zerfallsfaktor} \\ \downarrow \\ x = 10 \text{ g} \cdot \frac{98,8 \%}{100 \%} = 10 \text{ g} \cdot \mathbf{0,988} = 9,88 \text{ g} \end{array}$$

Rechnerisch betrachtet, ergibt sich die neue Masse durch bloßes **Multiplizieren** mit dem **Zerfallsfaktor**. Es liegt derselbe Mechanismus wie beim Sparguthaben vor.

Die C14-Masse nach einem Jahrhundert beträgt also etwa 9,88 g.

2. Masse nach n Jahrhunderten

Wir multiplizieren die gegebene Masse n -mal mit dem Zerfallsfaktor:

$$\text{Masse nach } n \text{ Jahrhunderten} = 10 \text{ g} \cdot 0,988^n$$

3. Die Halbwertszeit

Wir möchten wissen, wann nur noch die Hälfte (5 g) C14 übrigbleibt:

$$\text{Masse nach } n \text{ Jahrhunderten} = 10 \text{ g} \cdot 0,988^n$$

$$5 \text{ g} = 10 \text{ g} \cdot 0,988^n$$

Nun dividieren wir durch 10 g, logarithmieren und lösen nach n auf:

$$\begin{aligned}
 5 \text{ g} &= 10 \text{ g} \cdot 0,988^n && |:10 \text{ g} \\
 0,5 &= 0,988^n \\
 \ln 0,5 &= \ln(0,988^n) \\
 \ln 0,5 &= n \cdot \ln(0,988) && |: \ln(0,988) \\
 n &= \frac{\ln 0,5}{\ln(0,988)} \\
 n &= \frac{-0,6931...}{-0,01207...} \\
 n &\approx 57,4
 \end{aligned}$$

Die Halbwertszeit beträgt also etwa 57,4 Jahrhunderte, also ungefähr 5740 Jahre.

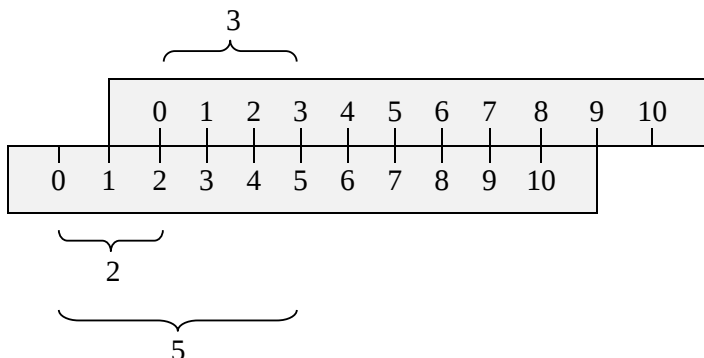
10.2 Rechenschieber

Weniger als zwanzig Jahre nach John Napiers Veröffentlichung der Logarithmen wurden die ersten Rechenschieber (zunächst als kreisförmige Rechenscheiben) durch William Oughtred und Richard Delamain erfunden.

In der einfachsten Ausführung dient ein Taschenrechner der Multiplikation und Division. Dabei werden die Zahlen als Strecken dargestellt, deren Länge nicht den Zahlen selbst, sondern ihren Logarithmen entsprechen. Das Zusammenfügen von Strecken spiegelt dann die Addition von Logarithmen wieder, also die Multiplikation der Numeri.

Zur Erläuterung betrachten wir zunächst eine (nicht handelsübliche) einfache Variante des Rechenschiebers zur Addition und Subtraktion von Zahlen. Hier werden nun die Zahlen direkt als Strecken dargestellt, wie bei einem Lineal.

Tatsächlich kann man einfach zwei Lineale nehmen und beide zusammen als Rechenschieber benutzen:



Das Bild zeigt die Addition von 2 und 3. Der Strecke mit der Länge 2 auf dem unteren Lineal wird durch Verschiebung des oberen Lineals (startet bei der unteren 2) die Strecke der Länge 3 hinzugefügt. Die Länge der Gesamtstrecke kann dann unten abgelesen werden und beträgt also 5.

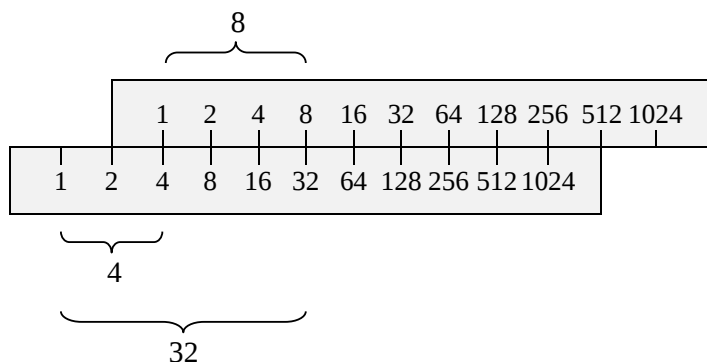
Man kann das Bild auch anders deuten, nämlich als Darstellung der Subtraktion $5 - 3 = 2$. Dazu geht man von der Strecke der Länge 5 auf dem unteren Lineal aus und vermindert sie mithilfe des oberen Lineals um 3 Längeneinheiten. Die verbleibende Strecke kann unten abgelesen werden und beträgt 2.

Ohne großen Rechenaufwand oder Benutzungen einer Logarithmentafel können wir nun einen groben Rechenschieber zur Multiplikation und Division gewinnen, indem wir Zweierpotenzen betrachten. Die Beschriftung der Lineale wird nun so geändert, dass nicht Zahlen selber die

Strecke bestimmen, sondern ihre Logarithmen (Exponenten):

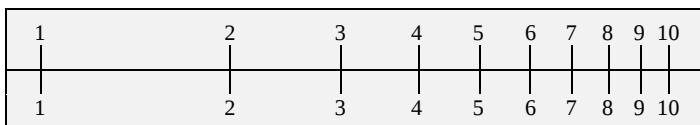
Zahl	Strecke
$1 = 2^0$	0
$2 = 2^1$	1
$4 = 2^2$	2
$8 = 2^3$	3
$16 = 2^4$	4
$32 = 2^5$	5
$64 = 2^6$	6
$128 = 2^7$	7
$256 = 2^8$	8
$512 = 2^9$	9
$1024 = 2^{10}$	10

Bei den Strecken (rechte Spalte) tragen wir auf beiden Linealen die Zahlen der linken Spalte ein. Wir erhalten:



Das Bild zeigt die Multiplikation $4 \cdot 8 = 32$, zugleich aber auch die Division $32 : 8 = 4$.

Eine praxisübliche Standard-Skala erfasst die Zahlen von 1 bis 10 und ist 25 cm lang. Sie sieht grob folgendermaßen aus:



Der Abstand zwischen „1“ und „10“ auf der logarithmischen Skala beträgt 25 cm und entspricht dem Logarithmus von 10:

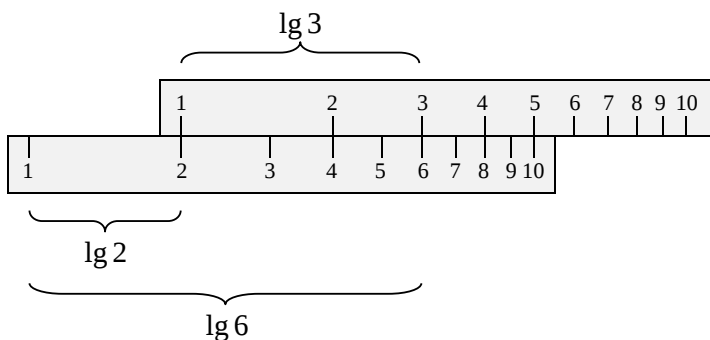
$$\lg 10 = 1 \hat{=} 25 \text{ cm}$$

Man muss also den Logarithmus mit 25 malnehmen, um den Abstand in Zentimetern zu erhalten. So haben wir die folgende Tabelle:

Zahl	Logarithmus	Abstand zu „1“ in cm
1	0,0000	0,0000
2	0,3010	7,5257
3	0,4771	11,9280
4	0,6021	15,0515
5	0,6990	17,4743

6	0,7782	19,4538
7	0,8451	21,1275
8	0,9031	22,5772
9	0,9542	23,8561
10	1,0000	25,0000

Die Multiplikation $2 \cdot 3 = 6$ sieht auf unserem groben Rechenschieber wie folgt aus:



Hier können zum Beispiel auch die Multiplikationen

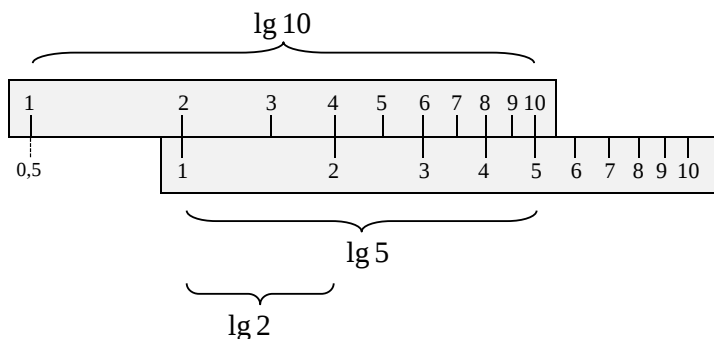
$$2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot 4 = 8 \text{ und } 2 \cdot 5 = 10$$

abgelesen werden, ebenso Divisionen wie

$$4 : 2 = 2, \quad 8 : 4 = 2 \text{ und } 10 : 5 = 2.$$

Anmerkung

Auch wenn ein Produkt größer als 10 ist, kann man es mit dem Rechenschieber finden. Der kleine Kunstgriff besteht darin, zunächst einen der Faktoren durch 10 zu dividieren und erst dann mit dem anderen Faktor zu multiplizieren (durch bloßes Ablesen). Beispielsweise multipliziert man $5 \cdot 4$ folgendermaßen:



Dies entspricht den Rechenschritten:

$$5 : 10 = 0,5$$

$$0,5 \cdot 4 = 2$$

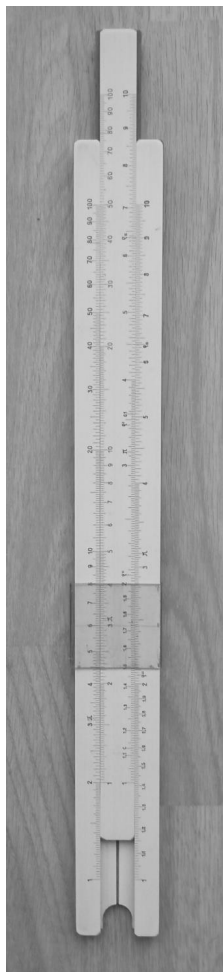
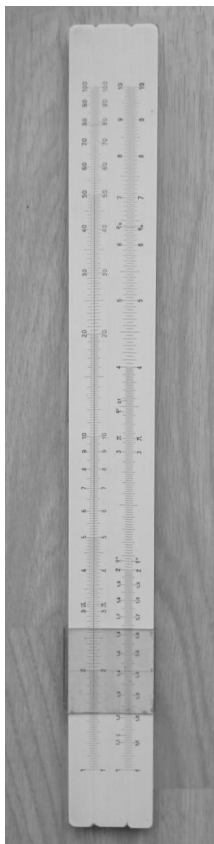
Zur Wiedergutmachung muss noch mit 10 multipliziert werden, das Ergebnis ist also

$$2 \cdot 10 = 20.$$

Wir schließen den Abschnitt mit Abbildungen eines einfachen handelsüblichen Rechenschiebers, der in den

1930er Jahren an deutschen Schulen benutzt wurde. Er hat zwei Skalenpaare, eines umfasst den Bereich von 1 bis 10 und das andere die Quadrate davon. Mit ihm kann multipliziert, dividiert, quadriert und die Quadratwurzel gezogen werden. Der bewegliche Teil in der Mitte wird als „Zunge“ bezeichnet; der bewegliche durchsichtige Teil („Läufer“) dient der Erleichterung beim Ablesen, aber auch zur Speicherung von Zwischenwerten.

Rechenschieber aus den 1930er Jahren



Rechenschieber können nur noch antiquarisch erworben werden. Allerdings wird noch ein kostengünstiger Rechenschieber-Bausatz angeboten, der weniger als 10 € kostet. Der praktische Umgang mit einem solchen Rechenschieber ist sehr lehrreich.

10.3 Größenordnung von Zahlen

Oft ist die Größenordnung einer Zahl aufschlussreicher als ihr genauer Wert. So liest man beispielsweise, dass eine Partei einen fünfstelligen Betrag als Spende erhalten habe. Hier wird die Anzahl der Stellen als Maß für die Größenordnung einer Zahl genommen.

Die Anzahl der Stellen spiegelt sich im Exponenten der wissenschaftlichen Zahlendarstellung wider. Fünfstellige Zahlen haben den Exponenten 4:

$$31.852 = 3,1852 \cdot 10^4$$

$$10.000 = 1,0000 \cdot 10^4$$

$$99.999 = 9,9999 \cdot 10^4$$

Der Exponent ist offenbar immer um 1 kleiner als die Stellenzahl. Und die Logarithmen von fünfstelligen Zahlen liegen dann zwischen 4 und 5, wie die Beispiele zeigen:

$$\begin{aligned}\lg(10.000) &= \lg(1,0000 \cdot 10^4) \\ &= \lg(1,0000) + \lg(10^4) \\ &= 0 + 4 \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg(99.999) &= \lg(9,9999 \cdot 10^4) \\ &= \lg(9,9999) + \lg(10^4) \\ &= 0,999995... + 4 \\ &= 4,999995...\end{aligned}$$

Man erkennt hier den allgemeinen Zusammenhang, dass der Logarithmus einer n -stelligen Zahl stets zwischen $n - 1$ und n liegt. Daher kann der Logarithmus als Maß für die Größenordnung einer Zahl genommen werden. Bei Diagrammen werden daher auch Achsen mit logarithmischen Skalen verwendet.

Der pH-Wert

Auf Lotionen und Seifen findet man gelegentlich Hinweise wie „Hautneutral, pH 5,5“. Hierbei ist der pH-Wert nichts anderes als der negative Zehnerlogarithmus der Wasserstoffionen-Konzentration, die also

$$10^{-5,5} \text{ mol/Liter} \approx 0,0000031622 \text{ mol/Liter}$$

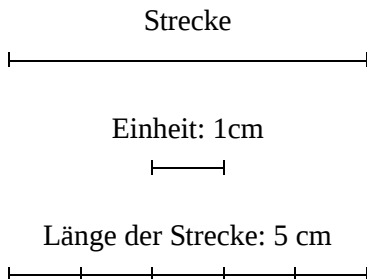
beträgt. Hier hat man von der unanschaulich kleinen Zahl 0,0000031622 zunächst den Logarithmus $(-5,5)$ genommen, und dann das Vorzeichen weggelassen. So kommt man zu dem handlicheren pH-Wert von 5,5.

10.4 Informationsbegriff

10.4.1 Allgemeines zur Quantifizierung

Wenn man einen Begriff quantifizieren (zahlenmäßig erfassen) möchte, muss man immer zuerst eine Einheit festlegen.

Danach kann man untersuchen, wie viele Einheiten einem gegebenen Gegenstand entsprechen. Möchte man zum Beispiel die Länge einer Strecke bestimmen, so wählt man etwa die Einheit „Zentimeter“ (cm) und schaut, wie oft solch ein cm in die Strecke passt:



10.4.2 Quantifizierung der Information

Um den Informationsbegriff zu quantifizieren, wählen wir die kleinste Informationseinheit, die man sich vorstellen kann: die Antwort auf eine Ja-Nein-Frage.

Wenn man auf die Frage, ob es morgen regnen wird, mit „ja“ beantwortet, hat man eine Informationseinheit erbracht. Dabei wird eine von zwei Möglichkeiten ausgewählt. Beantwortet man zusätzlich die Frage, ob die Temperatur morgen über 10°C steigen wird (beispielsweise mit „nein“), so hat man insgesamt schon zwei Informationseinheiten. Die Antwort auf die Frage, ob morgen ein Feiertag ist, liefert eine weitere Informationseinheit (z. B. „ja“). Insgesamt haben wir also 3 Antworten (und auch 3 Informationseinheiten):

ja, nein, ja

Wir untersuchen nun, aus wie vielen Möglichkeiten wir jeweils die Auswahl getroffen haben:

Bei 1 Frage: 2 Möglichkeiten:

ja

nein

Bei 2 Fragen: $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten:

Die Möglichkeiten der ersten Frage können jeweils mit „ja“ oder „nein“ der zweiten Frage ergänzt werden:

erste Frage	zweite Frage
ja	ja
nein	ja

und

erste Frage	zweite Frage
ja	nein
nein	nein

Dies ergibt doppelt so viele Möglichkeiten wie bei einer Frage.

Bei 3 Fragen: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten:

Die Möglichkeiten der ersten zwei Fragen können jeweils mit „ja“ oder „nein“ der dritten Frage ergänzt werden:

erste Frage	zweite Frage	dritte Frage
ja	ja	ja
nein	ja	ja
ja	nein	ja
nein	nein	ja

und

erste Frage	zweite Frage	dritte Frage
ja	ja	nein
nein	ja	nein
ja	nein	nein
nein	nein	nein

Dies ergibt doppelt so viele Möglichkeiten wie bei zwei Fragen.

Man erkennt, dass jede weitere Frage zur Verdopplung der Auswahlmöglichkeiten führt:

Anzahl der Fragen	Auswahlmöglichkeiten
1	2
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
4	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
n	2^n

Bei der Auswahl einer von 2^n Möglichkeiten liegen also n Fragen zugrunde, was auch n Informationseinheiten bedeutet. Nun ist n einfach der Zweierlogarithmus der Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ($= 2^n$). Allgemein formuliert, haben wir also:

In der Wahl einer Möglichkeit aus m Möglichkeiten stecken $\log_2 m$ Informationseinheiten.

Dies ist die erstmals von Claude Shannon formulierte Definition des *Informationsgehaltes* einer Nachricht. Wie wir gesehen haben, gibt sie auch an, wie viele Bits (0-1-Ziffern oder Ja-Nein-Antworten) zur Darstellung einer Nachricht nötig sind.

Beispiel 1

Eine Dezimalziffer (0, 1, 2, ..., 9) hat einen Informationsgehalt von

$$\begin{aligned}\log_2 10 &= \frac{\lg 10}{\lg 2} \\ &= \frac{1}{0,3010...} \\ &= 3,3219...\end{aligned}$$

Die binäre Darstellung einer Dezimalziffer erfordert daher in der Regel mehr als 3 Ziffern (also aufgerundet 4 Ziffern). So ist 7 in binärer Darstellung 111 (= 4+2+1) und 9 hat die Darstellung 1001 (= 8+0+0+1).

Beispiel 2

Eine fünfstellige Dezimalzahl hat einen Informationsgehalt von

$$5 \cdot 3,3219... = 16,6096...$$

Ihre binäre Darstellung erfordert also in der Regel 17 binäre Ziffern (Bits). Als Faustregel kann man sich merken, dass man die Anzahl der Dezimalziffern mit drei multiplizieren muss, um die Anzahl der binären Ziffern zu bekommen.

Beispiel 3

Ein Buchstabe im deutschen Alphabet (mit Umlauten und ß sind es 30 Buchstaben) hat einen Informationsgehalt von

$$\begin{aligned}\log_2 30 &= \frac{\lg 30}{\lg 2} \\ &= \frac{1,4771...}{0,3010...} \\ &= 4,9068...\end{aligned}$$

Seine binäre Darstellung erfordert also in der Regel 5 binäre Ziffern (Bits).

Beispiel 4

Ein aus 40.000 Buchstaben bestehender deutscher Text hat einen Informationsgehalt von

$$40.000 \cdot 4,9068... = 196.275,6238...$$

Seine binäre Darstellung erfordert also in der Regel 196.276 binäre Ziffern (Bits). Der Einfachheit halber wurden hier keine Leer- und Satzzeichen berücksichtigt.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 10.1

1. Löse die folgende Gleichungen:

a) $5^x = 7$ b) $2^x \cdot 3^x = 8$

2. Im wievielten Jahr wird ein Sparguthaben von 5000 € auf 7000 € gewachsen sein, wenn der Zinssatz 3 % p.a. beträgt?

3. Nach wie vielen Jahren werden von 10 g C-14 noch 8 g übrig bleiben?

4. Das Caesium-Isotop Cs-137 hat eine Halbwertszeit von etwa 30,2 Jahren. Berechne die jährliche Zerfallsrate.

Aufgaben zu Kapitel 10.2

1. Die Skala eines einfachen Rechenschiebers misst 25 cm und erfasst die Zahlen von 1 bis 10. Wie viele cm sind die Zahlen 1,5, 2,5, 3,5, 4,5, 5,5, 6,5, 7,5, 8,5 und 9,5 von 1 entfernt?

Aufgaben zu Kapitel 10.3

1. Bestimme die Wasserstoffionen-Konzentration der folgenden Substanzen:

a) Reines Wasser, pH-Wert 7

b) Apfelessig, pH-Wert 3

c) Natron, pH-Wert 8,5

2. Essigessenz hat eine Wasserstoffionen-Konzentration von etwa $0,01 \text{ mol/Liter}$. Finde ihren pH-Wert.

Aufgaben zu Kapitel 10.4

1. Das babylonische sexagesimale Zahlensystem beruhte auf der Zahl Sechzig und enthält in seiner späteren Fassung auch ein Zeichen für die Null (Leerzeichen) und hatte damit sechzig Ziffern.

a) Welchen Informationsgehalt hat eine sexagesimale Ziffer?

b) Welchen Informationsgehalt hat eine vierstellige sexagesimale Zahl?

2. Das vigesimale Zahlensystem der Maya beruhte auf der Zahl Zwanzig, enthielt die Ziffer Null und hat damit zwanzig Ziffern.

a) Welchen Informationsgehalt hat eine vigesimale Ziffer?

b) Welchen Informationsgehalt hat eine fünfstellige Maya-Zahl?

Lösungen

Lösungen zu Kapitel 1.1

1.

- a) 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
- b) 9, 27, 81, 243
- c) 100, 1000, 10.000, 100.000, 1.000.000
- d) 0, 0, 0, 1, 1, 1
- e) 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001
- f) 1, -1, 1, -1, 1, -1
- g) 4, -8, 16, -32, 64, -128

2.

- a) 1,0201, 1,030301, 1,04060401, 1,0510100501
- b) 1,0609, 1,092727, 1,12550881, 1,1592740743

Lösungen zu Kapitel 1.2

1.

- a) 2, 1, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{1}{8} = 0,125$, $\frac{1}{16} = 0,0625$
- b) 1, 0, 1, 1
- c) 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001
- d) 1, 1, 1, 1
- e) 0,1, 1, 10, 100, 1000
- f) 1, -1, 1, -1, 1

2.

a) $1,01, \frac{1}{1,01} = 0,9900990099\dots, 1,0201,$

$$\frac{1}{1,0201} = 0,98029\dots$$

b) $0,99, 1,01\dots, 0,9801, 1,02\dots, 0,970299, 1,03\dots$

Lösungen zu Kapitel 1.3

1.

a) $3, 5, 9, 10, 7$

b) $2, 3, 2, 2, 4, 100$

Lösungen zu Kapitel 1.4

1.

a) 64

b) 128

Lösungen zu Kapitel 2.1

1. $27 \text{ cm}^3, 54 \text{ cm}^2$

2. $562,75 \text{ €}$

Lösungen zu Kapitel 2.2

1. $\frac{1}{125} = 0,008, \frac{1}{25} = 0,04, \frac{1}{5} = 0,2, 1, 5, 25, 125.$

2.

- a) 1.000.000, 100.000, 10.000, 1000, 100, 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001, 0,000001
- b) 15.625, -3125, 625, -125, 25, -5, 1, -0,2, 0,04, -0,008, 0,0016, -0,00032, 0,000064
- c) 0,000001, 0,00001, 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1, 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000, 1.000.000

Lösungen zu Kapitel 2.3

1.

- a) $25 = 5^2$
- b) 41
- c) 10
- d) 13

2.

- a) 35
- b) 12
- c) $16 = 2^4$
- d) 18
- e) $27 = 3^3$
- f) 10100

Lösungen zu Kapitel 2.4

1.

- a) a^{12} , c^9 , b^{13}
- b) a^2 , $d^{-3} = \frac{1}{d^3}$, $c^{-5} = \frac{1}{c^5}$

c) $2, \frac{1}{27}, 16$

d) $128, \frac{1}{16}, 729$

2.

a) $36, \frac{243}{128} = 1\frac{115}{128}, \frac{256}{9} = 28\frac{4}{9}$

b) $\frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$

3.

a) $48, \frac{1}{45}, 24$

b) $4a^2b^2, \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}, 5$

Lösungen zu Kapitel 2.5

1.

a) $a^2, b^4, \frac{1}{c^6}, 32, \frac{1}{16} = 0,0625$

b) $a^2, \frac{1}{c^7}, \frac{1}{128} = 0,0078125, 243$

c) $512, \frac{1}{9} = 0,111..., 16$

d) $1024, 1/16, 729$

2.

a) $36, 24, 18, \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$

b) $\frac{70}{27} = 2\frac{16}{27}$

3.

a) 48, 24, $\frac{1}{45} = 0,0222\dots$

b) $4ab$, 72, 75

Lösungen zu Kapitel 2.6

1.

a) a^6 , a^{10} , a^{18} , 64, $10^{12} = 1.000.000.000.000$

b) a^{-10} , c^{-20} , $\frac{1}{4096}$, 9

c) 1024, -512, $\frac{1}{9} = 0,111\dots$

d) 256, 64, 81

2. Berechne:

a) 2304, $\frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$, $10^{12} = 1.000.000.000.000$, 0,000001

b) 2.540,16

Lösungen zu Kapitel 2.7

1.

a) 1.732 96,43 7.643.000 4.791.000.000 380.000

b) 0,0261, 0,857, 0,0000473, 0,0000000648, 0,00095

c) 7240, 0,0538, 609.000, 81.600.000, 0,00000000411

2.

a) $1,8794 \cdot 10^3$ $8,492 \cdot 10^1$, $3,5 \cdot 10^5$, $8,12 \cdot 10^0$, $3,49 \cdot 10^8$

b) $3,72 \cdot 10^{-1}$, $6,4 \cdot 10^{-3}$, $1,7 \cdot 10^{-5}$, $7,5 \cdot 10^{-2}$, $7,2 \cdot 10^{-8}$

c) $7,32 \cdot 10^2$ $1,707 \cdot 10^{-2}$, $1,521 \cdot 10^1$, $1,495 \cdot 10^{-4}$, $3,8 \cdot 10^8$

3. $8 \cdot 10^4 = 80.000$

4. ca. 395

Lösungen zu Kapitel 3.1

1. ca. 8,94 cm

2. 13 cm

3. 17 cm

Lösungen zu Kapitel 3.2

1.

a) 1 b) 2 c) 6 d) 8 e) 9 f) 10 g) 100

2.

a) 15 b) 33

3.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{3}{10}$

4.

a) 0,4 b) 0,7 c) 0,3 d) 0,2

5.

- a) 4 b) 81 c) 125 d) 100.000

Lösungen zu Kapitel 3.3

1.

14 bzw. 10

2.

- a) 6 b) 35 c) 54 d) b e) 24 f) 1000

3.

- a) $3 \cdot \sqrt{5}$ b) $5 \cdot \sqrt{3}$ c) $2 \cdot \sqrt{7}$ d) $a\sqrt{a}$ e) $c^2\sqrt{c}$

4.

- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{5}{7} \cdot \sqrt{7}$ d) 0,4 e) 0,3

- f) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e) $0,3 \cdot \sqrt{10}$

5.

- a) a^2 b) a c) 25 d) $\sqrt{1,4} \cdot 10^3$ e) $\sqrt{8,3} \cdot 10^{-2}$

Lösungen zu Kapitel 3.4

1. Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren:

- a) $2 \cdot 5$ b) $2 \cdot 3 \cdot 3$ c) $2 \cdot 11$ d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ e) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11$

2. Wie der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$; es muss geprüft werden, wie oft der Primfaktor 3 vorkommt.

3.

a) irr. b) irr. c) rat. d) irr. e) rat. f) irr.

Lösungen zu Kapitel 3.5

1.

a) 1,7321 b) 8,3666

2.

a) 1,04 b) 0,96 c) 1,001 d) 0,996 e) 0,997 f) 1,005

3.

Berechne mit vier Nachkommastellen mittels der divisionsfreien Variante des Heronverfahrens:

a) 8,9440 b) 2,2360

4. $10 \cdot \sqrt{15} \approx 38,730$

5. $E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}.$

Lösungen zu Kapitel 4.1

1. 5 cm

2.

a) 3 b) -5 c) 8 d) 9

3.

a) -1 b) 6 c) -3 d) 0,2

4.

- a) 48 b) $\frac{4}{7}$ c) 0,3 d) 125

Lösungen zu Kapitel 4.2

1.

- a) 12 b) 30 c) 20 d) c

2.

- a) $10 \cdot \sqrt[3]{7}$ b) 400 c) $2 \cdot \sqrt[3]{3}$ d) $5 \cdot \sqrt[3]{2}$

3.

- a) $\frac{4}{5}$ b) 0,5 c) 0,08

4.

- a) 100 b) 512 c) a^9 d) 200.000

5.

- a) $\frac{1}{3} \sqrt[3]{9}$ b) $\frac{2}{12} \sqrt[3]{12 \cdot 12} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{18}$ c) $\frac{5}{7} \sqrt[3]{49}$

Lösungen zu Kapitel 4.3

1. Tipp: Prüfe, wie oft der Primfaktor 2 vorkommt.

2.

- a) irr. b) irr. c) rational d) irr. e) irr.

Lösungen zu Kapitel 4.4

1.

- a) 2,28943 (Startwert 2) b) 3,10723 (Startwert 3)
c) 5,84804 (Startwert 6)

2.

- a) 22,8943 b) 0,310723 c) 0,584804

Lösungen zu Kapitel 4.5

1.

- a) 2 b) 5 c) 3 d) -3 e) -10 f) 2

2. 1,1487

Lösungen zu Kapitel 4.6

1.

- a) 20 b) 30 c) $10 \cdot \sqrt{a}$ d) $10 \cdot \sqrt[5]{10}$

2.

- a) 0,2 b) 0,3

3.

- a) a^3 b) 8 c) 9

4.

- a) $\sqrt[10]{a}$ b) 9 c) $\sqrt[4]{a}$

Lösungen zu Kapitel 5.1

1.

a) 2 b) 2 c) 3 d) 2

2.

a) 7 b) 4 c) 3 d) 6

3.

a) 6 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{32}$ f) 8 g) 64

Lösungen zu Kapitel 5.2

1. 1,7

Lösungen zu Kapitel 6.1

1. a) 2,4414 b) 2,5654 c) 2,6377 d) 2,718347

Lösungen zu Kapitel 6.2

1.

a) $8+2$ b) $16+8$ c) $32+8+1$

2.

a) 1,1046 b) 1,2696 c) 1,5035

Lösungen zu Kapitel 6.3

1.

720, 5040, 40.320, 362.880, 3.628.800

2.

a) $\frac{23}{99}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{235}{999}$

3.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

4.

a) $\frac{x^2}{1-x}$ b) $\frac{x^3}{1-x}$ c) 0,001 d) 0,00003 e) $\frac{x^2}{1+x}$

5.

a) $\frac{3}{4}x^2$ b) 0,0075

6.

a) $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,71666\dots$

Die Abweichung ist kleiner als 0,0016.

b) Die Abweichung ist kleiner als 0,0000053

Lösungen zu Kapitel 7.1

1.

a) 256 b) 64 c) 512 d) 8 e) 4

2.

- a) 1,75 b) 1,18 c) 1,64 d) 1,13

Lösungen zu Kapitel 7.2

1.

- a) 2 b) 5 c) -1 d) $1/3$ e) $-1/4$

2.

- a) 4 b) $1/5$ c) -1 d) $-1/3$

3.

- a) 2 b) -1 c) $1/5$

4.

- a) 2 b) -1 c) 2 d) -1

Lösungen zu Kapitel 7.3

1.

- a) 1,93 b) 1,35 c) 1,49 d) 1,21

2.

- a) 2,535 b) 2,17 c) 1,61 d) 1,54

Lösungen zu Kapitel 7.4

1.

- a) 0,08 b) 0,69 c) 1,21 d) 1,59

(Je nach Rechenweg, sind kleine Abweichungen möglich.)

2.

- a) 0,90 b) 12,8 c) 0,43 d) 2,88

(Je nach Rechenweg, sind kleine Abweichungen möglich.)

Lösungen zu Kapitel 8.1

1.

- a) 1,132 b) 1,602 c) 1,817 d) 2,524

2.

- a) 0,549 b) 0,571 c) 0,328 d) 0,943

Lösungen zu Kapitel 8.2

1.

- a) 0,4135 b) 0,6255 c) 0,855 d) 0,856 e) 0,964
f) 0,965

2.

- a) 0,693 b) 0,405 c) 0,010 d) 0,223 e) 0,118
f) 0,918

3.

- a) 1,609 b) 1,791 c) 2,079 d) 6,019 e) -1,609

Lösungen zu Kapitel 8.3

1.

- a) $\lg 13 = 1 + \lg 1,3$ b) $\lg 217 = 2 + \lg 2,17$
c) $\lg 0,5 = -1 + \lg 5$ d) $\lg 0,012 = -2 + \lg 1,2$

2.

- a) 0,75 b) $\lg 0,63$ c) 0,30

Lösungen zu Kapitel 9.1

1.

- a) $3 + 0,2$ b) $-4 + 0,8$ c) $184 + 0,51$ d) $-185 + 0,49$

2.

a) $e^{100} \approx e^{0,9888410012560} \cdot 10^{43}$

b) $e^{-100} \approx e^{1,3137440917380} \cdot 10^{-44}$

c) $e^{-1} \approx e^{1,3025850929940} \cdot 10^{-1}$

Lösungen zu Kapitel 9.2

1. a) 0,18 b) 0,69 c) 1,61 d) 2,30

2. a) 46,18 b) -22,31 c) 6,21

Lösungen zu Kapitel 9.3

1.

a) $\ln 1,2 \approx 0,1800$, Abweichung höchstens: 0,0033

b) $\ln 1,2 \approx 0,1827$, Abweichung höchstens: 0,0005

2.

a) $\ln 1,2 \approx 0,182319$, Abweichung höchstens: 0,000003

b) $\ln 1,2 \approx 0,182322$, Abweichung höchstens: 0,000000

3.

a) $\ln 2 \approx 0,6914$, Abweichung höchstens: 0,0019

b) $\ln 2 \approx 0,6930$, Abweichung höchstens: 0,0001

Zusatzaufgaben

1.

a) $(1+x)^a + \frac{ah}{1+x}(1+x)^a$

b) $(1+x)^a + h(a + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots)$

2.

Ergebnisse stehen in der Aufgabenstellung.

3.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{0,5} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots$$

4.

a) 2, 1, 0, 0, 0

b) 3, 3, 1, 0, 0

c) 4, 6, 4, 1, 0

5.

Das Ergebnis steht in der Aufgabenstellung.

Lösungen zu Kapitel 10.1

1. a) 1,20906... b) 1,16055...

2. Im Laufe des 12. Jahres.

3. Nach ca. 1848,3 Jahren

4. Etwa 2,27 %

Lösungen zu Kapitel 10.2

1.

1,5: 4,40 cm, 2,5: 9,95 cm, 3,5: 13,60 cm, 4,5: 16,33 cm,
5,5: 18,51 cm, 6,5: 20,32 cm, 7,5: 21,88 cm, 8,5: 23,24 cm,
9,5: 24,44 cm

Lösungen zu Kapitel 10.3

1.

a) Reines Wasser: 0,000 0001 mol/Liter

b) Apfelessig: 0,003 mol/Liter

c) Natron; 0,000 000 0032 mol/Liter

2. Essigessenz, pH-Wert: 2

Aufgaben zu Kapitel 10.4

1.

a) 5,91

b) 23,63

2.

a) 4,32

b) 21,61

Anhang 1: Zusammenfassungen

- **Potenzen I**
- **Wurzeln**
- **Potenzen II**
- **Zahlen nahe bei 1, eulersche Zahl, geometrische Reihen**
- **Logarithmen**
- **Berechnung von Logarithmen**
- **Anwendungen der Logarithmen**

Potenzen I

Die Potenzen $a^2, a^3, a^4, \dots$:	
$a^2 = a \cdot a$ $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^4 = a \cdot a \cdot a$ $\dots$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal der Faktor } a}$	
Der Exponent (Hochzahl) n gibt an, wie oft die Basis (Grundzahl) a als Faktor vorkommt.	
$\downarrow$	
Gesetzmäßigkeiten und Regeln	
$a^2 \xrightarrow{\cdot a} a^3 \xrightarrow{\cdot a} a^4 \xrightarrow{\cdot a} \dots$ $a^2 \xleftarrow{:a} a^3 \xleftarrow{:a} a^4 \xleftarrow{:a} \dots$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$\downarrow \quad \text{Allgemeingültigkeit unterstellend}$	
$\dots \underbrace{a^{-2}}_{\frac{1}{a^{-2}}} \xleftarrow{:a} \underbrace{a^{-1}}_{\frac{1}{a}} \xleftarrow{:a} \underbrace{a^0}_{1} \xleftarrow{:a} \underbrace{a^1}_a \xleftarrow{:a} a^2$	

$$a = \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1, \text{ also } a^1 = a$$

$$1 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0, \text{ also } a^0 = 1$$

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}, \text{ also } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



Die Potenzen $a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} \dots$:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

...

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Wurzeln

Quadratwurzeln

Die **Quadratwurzel** $\sqrt{a}$ aus einer nicht-negativen Zahl a ist die nicht-negative Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

Beispiel: $\sqrt{9} = 3$, denn $3 \cdot 3 = 9$ und $3 \geq 0$.

Regeln für die Quadratwurzel:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a^n} = a^{n/2} \quad (n \text{ gerade})$$

Das **Heron-Verfahren** zur Berechnung der Wurzel:

Ausgehend von einem Näherungswert

$$\sqrt{a} \approx x,$$

erhält man den verbesserten Näherungswert:

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Dieser Vorgang wird wiederholt, bis ein Ergebnis mit der gewünschten Genauigkeit herauskommt.

Der Ausdruck $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ ist der Mittelwert der beiden Faktoren in der folgenden Zerlegung von a :

$$a = x \cdot \frac{a}{x}.$$

Kubikwurzeln

Die **Kubikwurzel** $\sqrt[3]{a}$ aus einer beliebigen Zahl a ist die Zahl, die mit 3 potenziert a ergibt:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a \quad \text{oder:}$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

Beispiele:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ denn } 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8,$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ denn } (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Regeln für die Kubikwurzel:

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

$$\sqrt[3]{a^n} = a^{n/3} \quad (n \text{ durch } 3 \text{ teilbar})$$

Das **Heron-Verfahren** zur Berechnung der Wurzel:
Ausgehend von einem Näherungswert

$$\sqrt[3]{a} \approx x,$$

erhält man den verbesserten Näherungswert:

$$y = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right).$$

Dieser Vorgang wird wiederholt, bis ein Ergebnis mit der gewünschten Genauigkeit herauskommt.

Der Ausdruck $\frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \left(x + x + \frac{a}{x \cdot x} \right)$ ist der Mittelwert der drei Faktoren in der folgenden Zerlegung

$$a = x \cdot x \cdot \frac{a}{x \cdot x}.$$

***n*-te Wurzeln**

Die ***n*-te Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ aus einer Zahl a ist die Zahl, die mit n potenziert a ergibt:

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a \quad \text{oder:}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ Faktoren}} = a$$

Wenn n gerade ist, dürfen a und $\sqrt[n]{a}$ **nicht negativ** sein

Beispiel: $\sqrt[4]{81} = 3$, denn $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ und $3 \geq 0$.

Regeln für die n -te Wurzel:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad (m \text{ durch } n \text{ teilbar})$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Das **Heron-Verfahren** zur Berechnung der n -ten Wurzel:

Ausgehend von einem Näherungswert

$$\sqrt[n]{a} \approx x,$$

erhält man den verbesserten Näherungswert:

$$y = \frac{1}{n} \left((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}} \right).$$

Dieser Vorgang wird wiederholt, bis ein Ergebnis mit der gewünschten Genauigkeit herauskommt.

Der Ausdruck $\frac{1}{n} \left((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}} \right)$ ist der Mittelwert der n Faktoren in der folgenden Zerlegung von a :

$$a = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n-1 \text{ Faktoren}} \cdot \frac{a}{x^{n-1}}.$$

Irrationalitätskriterium für Wurzeln

Es sei $\frac{Z}{N}$ ein **gekürzter** Bruch.

Wenn mindestens eine der beiden Wurzeln $\sqrt[n]{Z}$ und $\sqrt[n]{N}$ **keine** ganze Zahl ist (d. h. **nicht** glatt aufgeht), dann ist

$$\sqrt[n]{\frac{Z}{N}} \text{ irrational,}$$

d. h. kein Bruch.

Potenzen II

Wurzeln als Potenzen:

Wenn man die zuvor dargelegten Regeln für Potenzen und Wurzeln als **uneingeschränkt allgemeingültig** unterstellt, zeigt sich, dass man Wurzeln als Potenzen auffassen kann, zum Beispiel:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Begründung 1: } a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$$

$$\text{Begründung 2: } \sqrt{a} = \sqrt{a^1} = a^{1/2} = a^{\frac{1}{2}}$$

Und allgemein:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Begründung 1: } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

$$\text{Begründung 2: } \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{1/n} = a^{\frac{1}{n}}$$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Die **uneingeschränkte Allgemeingültigkeit** der Potenz- und Wurzelregeln unterstellend, ergibt sich die Definition von Potenzen mit einem Bruch als Exponenten:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0)$$

Begründung 1: $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$, also ist $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Begründung 2: $a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

↓ Beweis der Potenzregeln

Auf der Grundlage der Definition $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ kann nun **bewiesen** werden, dass die Potenzregeln tatsächlich **uneingeschränkt** (d. h. auch für gebrochene Exponenten) gültig sind.

Potenzen mit beliebigen Exponenten

Da man jede Zahl beliebig genau durch einen Bruch annähern kann, sind auch Potenzen mit beliebigen Exponenten definiert, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} a^{\sqrt{2}} &= a^{1,414\dots} \\ &\approx a^{1,4} \\ &= a^{\frac{14}{10}} \\ &= \sqrt[10]{a^{14}} \end{aligned}$$

Zahlen nahe bei 1, eulersche Zahl

Zahlen nahe bei 1
Nahe bei 1 liegende Zahlen wie 1,003 schreiben wir allgemein in der Form $1 + h,$ wobei h eine kleine Zahl ist, d. h.: $h \approx 0.$ Es ist oft sehr nützlich, sich vorzustellen, dass h beliebig verkleinert werden kann.
Rechenregeln
Für Zahlen nahe bei 1 gelten einige Rechenregeln, die verblüffend mit den Potenzregeln übereinstimmen: $(1 + h) \cdot (1 + k) \approx 1 + h + k$ $\frac{1 + h}{1 + k} \approx 1 + h - k, \quad \frac{1}{1 + k} \approx 1 - k,$ $(1 + h)^n \approx 1 + h \cdot n$
Die eulersche Zahl e
Die Übereinstimmung dieser Regeln mit den Potenzregeln ist frappierend: $a^h \cdot a^k \approx a^{h+k}$ $\frac{a^h}{a^k} \approx a^{h-k}, \quad \frac{1}{a^k} \approx a^{-k},$ $(a^h)^n \approx a^{h \cdot n}$

Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Zahlen nahe bei 1 **Potenzen** einer geeigneten Basis a sind: $1+h \approx a^h$. Die Basis ist nicht beliebig wählbar, wie das Beispiel

$$2^{0,1} = 1,071... \approx 1,07 \neq 1+0,1$$

zeigt. Tatsächlich müsste für große n (also $h = \frac{1}{n}$ klein) gelten:

$$a^h \approx 1+h$$

$$a^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n} \quad | \text{mit } n \text{ potenzieren}$$

$$a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \text{ groß})$$

Diese spezielle, konkrete Zahl ist die **eulersche Zahl e** :

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \text{ groß})$$

$$e = 2,71828...$$

Die Exponentialreihe

Für beliebige Werte x kann die Potenz e^x durch die **Exponentialreihe** ausgedrückt werden:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Hier stehen in den Nennern die *Fakultäten* $n!$, nämlich:

$$2! = 1 \cdot 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \text{ usw.}$$

Der **Fehler** R bei der Näherung

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

ist höchstens:

$$R \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n+3}}$$

wobei $0 \leq \frac{x}{n+3} < 1$ vorausgesetzt wird.

Reihendarstellung der eulerschen Zahl

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Sie ist der Sonderfall $x = 1$ der Exponentialreihe.

Geometrische Reihen

Die **geometrische Reihe** mit dem Anfangsglied a und dem Quotienten q ($-1 < q < 1$) ist die unendliche Summe:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q}$$

Bemerkenswert: Die Division (rechts) wird allein durch Additionen und Multiplikationen ausgedrückt.

Logarithmen

Logarithmen zur Basis 2

Der *binäre Logarithmus* (*Zweierlogarithmus*) einer beliebigen positiven Zahl x ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz von 2 darzustellen:

$$x = 2^?$$

$$x = 2^{\text{Logarithmus von } x}$$

$$x = 2^{\text{lb } x}$$

Der binäre Logarithmus von x wird als $\text{lb } x$ geschrieben.

Beispiele:

$$\text{lb } 1 = 0, \text{ denn } 1 = 2^0$$

$$\text{lb } 2 = 1, \text{ denn } 2 = 2^1$$

$$\text{lb } \sqrt{2} = 0,5, \text{ denn } \sqrt{2} = 2^{1/2}$$

$$\text{lb } 3 = 1,5849..., \text{ denn } 3 = 2^{1,5849...}$$

Natürliche Logarithmen

Der *natürliche Logarithmus* (*Logarithmus zur Basis e*) einer beliebigen positiven Zahl x ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz der eulerschen Zahl e darzustellen:

$$x = e^?$$

$$x = e^{\text{nat. Logarithmus von } x}$$

$$x = e^{\ln x}$$

Der natürliche Logarithmus von x wird als $\ln x$ geschrieben.

Beispiele:

$$\ln 1 = 0, \text{ denn } 1 = e^0$$

$$\ln e = 1, \text{ denn } e = e^1$$

$$\ln \sqrt{e} = 0,5, \text{ denn } \sqrt{e} = e^{1/2}$$

$$\ln 2 = 0,6931..., \text{ denn } 2 = e^{0,6931...}$$

Logarithmen zur Basis 10

Der *dekadische Logarithmus* (*Zehnerlogarithmus*) einer beliebigen positiven Zahl x ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz von 10 darzustellen:

$$x = 10^?$$

$$x = 10^{\text{Logarithmus von } x}$$

$$x = 10^{\lg x}$$

Der Zehnerlogarithmus von x wird als $\lg x$ geschrieben.

Beispiele:

$$\lg 1 = 0, \text{ denn } 1 = 10^0$$

$$\lg 2 = 0,3010..., \text{ denn } 2 = 10^{0,3010...}$$

$$\lg 10 = 1, \text{ denn } 10 = 10^1$$

Allgemeine Logarithmen zur Basis b

Der *Logarithmus* einer positiven Zahl x zur Basis $b > 0$ ist der Exponent, der nötig ist, um x als Potenz von b darzustellen:

$$x = b^?$$

$$x = b^{\text{Logarithmus von } x}$$

$$x = b^{\log_b x}$$

Der Zehnerlogarithmus von x wird als $\lg x$ geschrieben.

Beispiele:

$$\log_b 1 = 0, \text{ denn } 1 = b^0$$

$$\log_b b = 1, \text{ denn } b = b^1$$

Regeln für Logarithmen

Die Potenzregeln spiegeln sich in folgenden Gesetzmäßigkeiten wider:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \cdot \ln x$$

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{\ln x}{n}$$

Diese Regeln gelten entsprechend auch für Logarithmen mit beliebigen Basen.

Logarithmen zu einer beliebigen Basis können auf natürliche Logarithmen zurückgeführt werden:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Berechnung von Logarithmen und Potenzen

Erstellung von Logarithmentafeln

1. Der Ansatz von Bürgi

Mit der Basis

$$B = 1,0001^{10.000} \quad [\approx e]$$

wird eine Tafel der *Potenzen*

$$B^{0,0001}, B^{0,0002}, B^{0,0003}, \dots, B^{0,9999}, B^{1,0000}$$

erstellt. Wegen

$$B^{0,0001} = 1,0001$$

sind die zu findenden Potenzen einfach

$$1,0001, 1,0001^2, 1,0001^3, \dots, 1,0001^{9.999}, 1,0001^{10.000}$$

Sie lassen sich einfach nacheinander durch eine Multiplikation mit 1,0001 berechnen:

$$1,0001^2 = 1,0001 \cdot 1,0001 = 1,00020001$$

$$1,0001^3 = 1,00020001 \cdot 1,0001 \approx 1,00030003$$

$$1,0001^4 \approx 1,00030003 \cdot 1,0001 \approx 1,00040006$$

usw.

Die Potenztafel kann auch als *Logarithmentafel* benutzt werden. Es handelt sich dabei um Logarithmen zur Basis $B = (1,0001)^{10.000} \approx e$, also näherungsweise um natürliche Logarithmen.

2. Der Ansatz von Briggs

Es werden fortgesetzt Quadratwurzeln aus 10 berechnet

$$10^1 = 10,0000$$

$$10^{0,5} = \sqrt{10} = 3,1622\dots$$

$$10^{0,25} = \sqrt{3,1622\dots} = 1,7782\dots$$

$$10^{0,125} = \sqrt{1,7782\dots} = 1,3335\dots$$

$$10^{0,0625} = \sqrt{1,3335\dots} = 1,1547\dots$$

usw.

Daraus können alle übrigen Zehnerpotenzen und -logarithmen zusammengesetzt werden, z. B.:

$$\begin{aligned} 10^{0,75} &= 10^{0,5} \cdot 10^{0,25} \\ &= 3,1622\dots \cdot 1,7782\dots \\ &= 5,6234\dots \end{aligned}$$

Berechnungsmethoden für Rechner

1. Die Exponentialreihe

Sie wurde bereits oben genannt und dient der Berechnung von Potenzen der eulerschen Zahl e :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Hierbei kann x beliebige Werte annehmen.

2. Die Logarithmusreihen

Aus der Näherung

$$e^x \approx 1 + x$$

folgt die Näherung

$$\ln(1+x) \approx x$$

Diese wiederum kann zur Logarithmusreihe

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

erweitert werden ($-1 < x \leq 1$).

Ersetzt man darin x durch $-x$, so erhält man:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Zieht man beide Reihen voneinander ab, so hat man:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

Mit der praktischen Abkürzung $z = \frac{1+x}{1-x}$ also:

$$\ln z = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

$$x = \frac{z-1}{z+1}$$

Hierbei kann z eine beliebige positive Zahl sein.

3. Beliebige Potenzen und Logarithmen

Potenzen

Die Basis kann als Potenz von e geschrieben werden:

$$b^a = (e^{\ln b})^a = e^{a \cdot \ln b}$$

also

$$b^a = e^{a \cdot \ln b}$$

Hierbei ist b eine beliebige positive Zahl, und a beliebig.

Logarithmen

Zur Berechnung eines beliebigen Logarithmus $\log_b x$ kann dieser auf natürliche Logarithmen zurückgeführt werden:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Anwendungen der Logarithmen

1. Der Ursprung: Logarithmen als Rechenhilfen

Grundidee:

Jede Zahl als Potenz einer festen Zahl (z. B. 10) schreiben. Die dafür erforderlichen **Exponenten** sind die **Logarithmen**, die früher den Tafeln entnommen wurden.

Das erniedrigt die Stufe der Rechenoperationen:

Multiplikation → Addition der Logarithmen

Division → Subtraktion der Logarithmen

Potenzieren → Multiplizieren des Logarithmus

Wurzelziehen → Dividieren des Logarithmus

Beispiele

$$\begin{aligned} 7,21 \cdot 2,38 &\approx 10^{0,858} \cdot 10^{0,377} \\ &= 10^{0,858 + 0,377} = 10^{1,235} \\ &= 10 \cdot 10^{0,235} \approx 10 \cdot 1,72 = 17,2 \end{aligned}$$

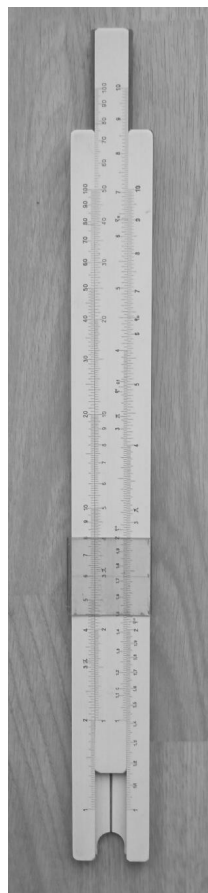
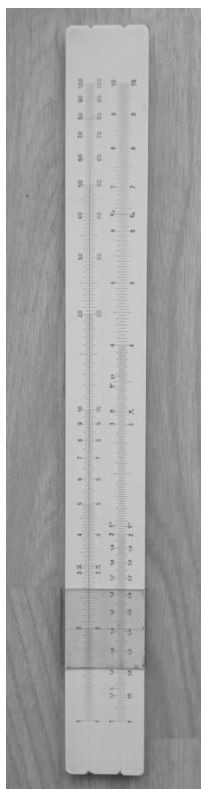
$$\begin{aligned} 7,21 / 2,38 &\approx 10^{0,858} / 10^{0,377} \\ &= 10^{0,858 - 0,377} = 10^{0,481} \approx 3,03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,05^{20,3} &\approx (10^{0,021})^{20,3} \\ &= 10^{0,021 \cdot 20,3} = 10^{0,4263} \approx 2,67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[13]{7,21} &\approx \sqrt[13]{10^{0,858}} \\ &= 10^{0,858/13} \approx 10^{0,066} \approx 1,17 \end{aligned}$$

Rechenschieber

Der Rechenschieber nutzt logarithmische Skalen, um Multiplikationen und Divisionen auf die Addition und Subtraktion von Strecken zurückzuführen:



2. Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen sind Gleichungen, deren *Unbekannte im Exponenten* einer Potenz auftaucht.

Beispiel

Bei einem Zinssatz von 3 % wächst ein Sparguthaben von 1000 € in n Jahren auf den

Betrag $K_n = 1000 \text{ €} \cdot 1,03^n$.

In wie vielen Jahren wird sich das Guthaben verdoppeln?

Lösung

Das Guthaben soll sich 'verdoppeln, also auf 2000 € anwachsen:

$$\begin{aligned} K_n &= 1000 \text{ €} \cdot 1,03^n \\ 2000 \text{ €} &= 1000 \text{ €} \cdot 1,03^n && |:1000 \text{ €} \\ 2 &= 1,03^n \end{aligned}$$

Wir nehmen nun den Logarithmus auf beiden Seiten und lösen nach n auf:

$$\begin{aligned} 2 &= 1,03^n \\ \ln 2 &= \ln(1,03^n) \\ \ln 2 &= n \cdot \ln 1,03 && |: \ln 1,03 \\ \frac{\ln 2}{\ln 1,03} &= n \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln 1,03} = \frac{0,6931...}{0,0295...} \approx 23,4 \end{aligned}$$

Das Guthaben wird sich also im Laufe des 24. Jahres verdoppelt haben.

3. Der pH-Wert

Der pH-Wert

Der pH-Wert ist ein Maß für die Wasserstoffionen-Konzentration (H^+ -Konzentration) einer Lösung und gibt an, wie sauer oder alkalisch sie ist. Genauer gesagt ist der pH-Wert der negative Logarithmus der Wasserstoffionen-Konzentration, die in mol pro Liter zu nehmen ist:

$$\text{pH-Wert} = -\lg (H^+ \text{-Konzentration in mol/Liter})$$

Beispiel

Der als „hautneutral“ bekannte pH-Wert 5,5 bedeutet eine Wasserstoffionen-Konzentration von

$$10^{-5,5} \text{ mol/Liter} \approx 0,0000031622 \text{ mol/Liter}$$

(Anmerkung: Da $1 \text{ mol} \approx 6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen, befinden sich in einem Liter ca. $1,9 \cdot 10^{17}$ Wasserstoffionen.)

4. Der Informationsgehalt

In der Auswahl eines Objektes aus n Objekten steckt ein **Informationsgehalt**. Er ist gegeben durch den Zweierlogarithmus von n :

$$\text{Informationsgehalt} = \log_2 n$$

Beispiel: Der Informationsgehalt einer Dezimalziffer ist

$$\log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3,32\dots$$

Anhang 2: Ausblick

- **Komplexe Zahlen**
- **Eulers Zauberformel**

Komplexe Zahlen

Wir haben gesehen, dass die Quadratwurzel nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen werden kann. So kann

$$\sqrt{-1}$$

keine übliche (*reelle*) sein, denn beim Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst erhält man stets eine positive Zahl oder Null, aber niemals -1 .

Wir erweitern unseren Zahlenbereich durch Hinzufügen einer neuartigen Zahl i , nämlich

$$i = \sqrt{-1}.$$

Sie wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet und erfüllt die grundlegende Beziehung

$$i^2 = -1.$$

Anschaulich betrachtet, gehen wir vom *Zahlenstrahl* zur *Zahlenebene* über. Die imaginäre Einheit entspricht einem Punkt in der Ebene, der außerhalb des Zahlenstrahls liegt.

Wenn man die vier Grundrechenarten mit reellen Zahlen und i durchführt, ergeben sich stets Ausdrücke der Gestalt:

$$a + bi,$$

beispielsweise $2 + 3i$, $-4 + 5i$, $1,5 + 3,8i$, usw.

Diese aus reellen Zahlen und der imaginären Einheit zusammengesetzten Größen nennt man *komplexe Zahlen*.

Im Bereich dieser komplexen Zahlen kann die Wurzel aus negativen Zahlen gezogen werden, zum Beispiel ist:

$$\sqrt{-9} = 3i, \text{ denn } (3i)^2 = 9i^2 = -9$$

Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Man rechnet mit komplexen Zahlen genauso wie mit den üblichen reellen Zahlen und Buchstaben. Es ist lediglich zu beachten, dass $i^2 = -1$ ist.

Wir betrachten zur Verdeutlichung Beispiele zu den vier Grundrechenarten:

Addition

$$(2+3i) + (5+9i) = 7+12i$$

Subtraktion

$$(2+9i) - (6+3i) = -4+6i$$

Multiplikation

$$\begin{aligned}(2+3i) \cdot (5+4i) &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4i + 3i \cdot 5 + 3i \cdot 4i \\ &= 10 + 8i + 15i + 12i^2 && | i^2 = -1 \\ &= 10 + 23i - 12 \\ &= -2 + 23i\end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned}\frac{3+7i}{1+2i} &= \frac{(3+7i) \cdot (1-2i)}{(1+2i) \cdot (1-2i)} && | \text{3. binomische Formel} \\ &= \frac{17+i}{1-4i^2} && | i^2 = -1 \\ &= \frac{17+i}{1+4} \\ &= \frac{17+i}{5} \\ &= \frac{17}{5} + \frac{1}{5}i\end{aligned}$$

Hier hat man einen oft nützlichen Kunstgriff benutzt, um das i im Nenner $1+2i$ loszuwerden: Zähler und Nenner werden mit der entsprechenden Differenz $1-2i$ multipliziert. Dann wendet man die 3. binomische Formel an, die besagt, dass das Produkt einer Summe und der entsprechenden Differenz die Differenz der Quadrate ist:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Somit erhält man also den neuen Nenner:

$$(1+2i)(1-2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 = 1 + 4 = 5$$

Historisches zu den komplexen Zahlen

Rafael Bombelli (1526-1572) hat in seinem Buch *Algebra* als erster die komplexen Zahlen dargelegt.

Das Wort *imaginär* ist von René Descartes (1596-1650) in seiner berühmten *Geometrie* eingeführt worden. Der Ausdruck *komplexe Zahlen* stammt von Carl Friedrich Gauß (1777-1855). Die Bezeichnung i für die imaginäre Einheit geht auf Leonhard Euler (1708-1783) zurück.

Anwendungen der komplexen Zahlen

Der deutsche Elektroingenieur Charles Steinmetz (1865-1923) hat komplexe Widerstände im Wechselstromkreis eingeführt, was zu einer erheblichen Vereinfachung der Berechnungen geführt hat.

Die in den 1920er Jahren entwickelte Quantenmechanik benutzt komplexe Zahlen. Auf einer Inschrift am Grab Erwin Schrödingers (1887-1961) steht die berühmte *Schrödingergleichung*:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$$

Sie enthält die imaginäre Einheit i .

Eulers Zauberformel

1. Imaginäre Exponenten von e -Potenzen

Da die Exponentialreihe nur die Grundrechenarten benutzt, können auch imaginäre Exponenten genommen werden:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

Nun sind die Potenzen von i :

$$\begin{aligned} i^1 &= i, & i^2 &= -1, & i^3 &= -i, & i^4 &= 1, \\ i^5 &= i, & i^6 &= -1, & i^7 &= -i, & i^8 &= 1, \\ & \text{usw.} \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots \\ &\quad + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots \right) \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite stehen nun die aus der Trigonometrie bekannten Reihendarstellungen von Kosinus und Sinus (s. zum Beispiel das einschlägige Buch des Autors):

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Diese Beziehung zwischen Potenzen, der Eulerschen Zahl und Trigonometrie ist so überraschend, dass sie als *Zauberformel von Euler* bekannt geworden ist. Besonders frappierend ist der Sonderfall $x = \pi \triangleq 180^\circ$:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos \pi + i \sin \pi \\ &= -1 + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Also

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Diese Gleichung enthält vier fundamentale Konstanten der Mathematik: 0, 1, e und π .

2. Erläuterungen zur Sinus- und Kosinusreihe

In Kapitel 6.3 haben wir die Exponentialreihe aus zwei Beziehungen gewonnen:

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x \cdot e^y \\ e^x &\approx 1 + x \quad (x \text{ klein}) \end{aligned}$$

Ferner haben wir die Regeln für das Rechnen mit Zahlen nahe bei 1 benutzt.

Völlig analog können die eng miteinander verknüpften Sinus- und Kosinusreihe hergeleitet werden. Ausgangspunkt dafür sind die folgenden Ergebnisse aus der Trigonometrie:

$$\left. \begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned} \right\} \text{Additionstheoreme}$$

$$\sin x \approx x \quad (x \text{ klein, im Bogenma\ss})$$

$$\cos x \approx 1 \quad (x \text{ klein, im Bogenma\ss})$$

Der Leser sei ermuntert, sich an dieser Herleitung zu versuchen.

