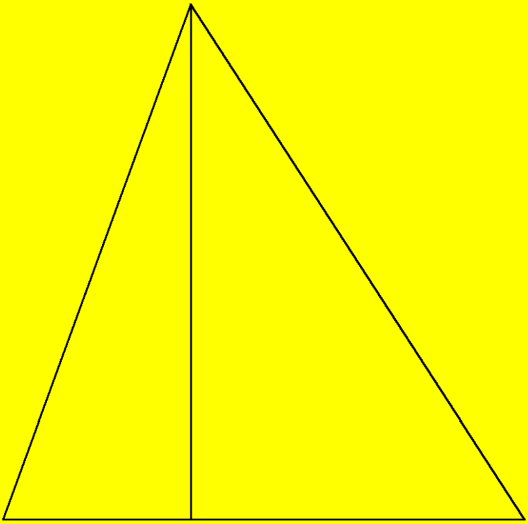
Das kleine Buch der

Trigonometrie

Alexander Roux



Trigonometrie

Das kleine Buch der

Trigonometrie

Alexander Roux

Impressum

ISBN 978-3-7375-4602-7
www.a-roux.de

Selbstverlag, Alexander Roux
c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb:
epubli (www.epubli.com) – ein Service der neopubli
GmbH, Köpenicker Straße 154a, 10997 Berlin

Vorwort

Die ebene Trigonometrie handelt von der Berechnung der fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks. Das vorliegende Buch unterscheidet sich in zwei wesentlichen Punkten von den anderen Büchern über Trigonometrie:

Erstens werden überflüssige Schnörkel und weniger wichtiger Stoff weggelassen. Im Gegenzug werden die zentralen Ideen ausführlicher dargelegt, mehr substantielle Beispiele vorgeführt und der strategische Gedankengang hervorgehoben.

Zweitens wird im Buch dargelegt, wie man alle benötigten Werte (beispielsweise Quadratwurzeln oder Sinuswerte) *berechnen* kann. Ältere Bücher zeigen meist nur das *Ablesen* der gesuchten Größen aus den trigonometrischen Tafeln. Neuere Bücher erklären den Lesern, welche *Tasten* sie *drücken* müssen, damit ihr Taschenrechner die gesuchten Zahlen anzeigt. Dagegen wird im vorliegenden Buch der Taschenrechner nur für die vier Grundrechenarten genutzt und alles andere berechnet. So kann sich der Leser auch ein gewisses Verständnis der klassischen trigonometrischen Tafeln und einen Einblick in die Funktionsweise eines wissenschaftlichen Taschenrechners verschaffen.

Die ersten drei Kapitel und der erste Abschnitt des vierten Kapitels des Buches enthalten alles, was der Praktiker zur Dreiecksberechnung benötigt.

Dank der Hinweise von Herrn Gunnar Heiden konnten zahlreiche Druckfehler korrigiert werden.

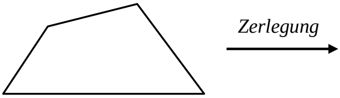
Dr. A. Roux, Brühl, Juni 2024

Inhalt

1. Einführung und Überblick

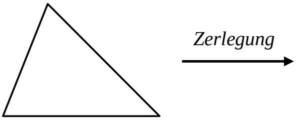
Die Trigonometrie (oder Dreiecksberechnung) handelt von der Berechnung der fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks. Das Wort *Trigonometrie* ist griechischen Ursprungs: *tri* (drei), *gonia* (Winkel, Ecke), *metron* (Maß).

Viele geometrische Figuren lassen sich berechnen, indem man sie in Dreiecke zerlegt; diese Dreiecke können dann mit Hilfe der Trigonometrie berechnet werden.



Viereck zwei Dreiecke

Aber auch ein Dreieck kann zerlegt werden, beispielsweise durch das Einzeichnen einer Höhe. So ergeben sich zwei rechtwinklige Dreiecke (d. h. Dreiecke mit einem Winkel von 90°):



Dreieck zwei rechtwinklige Dreiecke

Die Trigonometrie besteht also aus zwei strategischen Teilen:

1. Berechnung ***rechtwinkliger*** Dreiecke
2. Berechnung ***beliebiger*** Dreiecke (durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke)

Für die vollständige Berechnung rechtwinkliger Dreiecke benötigt man nur zwei Dinge:

1. Satz von Pythagoras
2. Sinus und Kosinus

Beliebige Dreiecke sind grundsätzlich vollständig berechenbar durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke. Diese immer wiederkehrenden Zerlegungen und Berechnungen werden ein für alle Mal in zwei Formeln zusammengefasst:

1. Sinussatz
2. Kosinussatz

Mit dem Sinussatz und dem Kosinussatz lassen sich alle Dreiecksprobleme lösen. Bei rechtwinkligen Dreiecken sind der Satz von Pythagoras sowie Sinus und Kosinus einfacher und daher vorzuziehen.

Als Anwendungsbeispiele betrachten wir u. a.

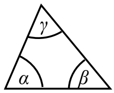
- Vierecke und die
- Additionstheoreme für Sinus und Kosinus (Formeln für Sinus und Kosinus einer Winkelsumme)

Zu einem Text über Trigonometrie (Dreiecks*berechnung*) gehören selbstverständlich auch die Erstellung einer praktischen Sinus- und Kosinustafel und die Darstellung von Formeln zur beliebig genauen Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten. Diesen Themen widmen sich die Kapitel 4, 5 und 6. Die Ergebnisse beruhen auf den Additionstheoremen und der Betrachtung kleiner Winkel.

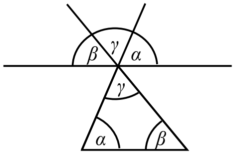
Grundlegendes über Dreiecke

Wir wiederholen zwei grundlegende und anschauliche Tatsachen über Dreiecke:

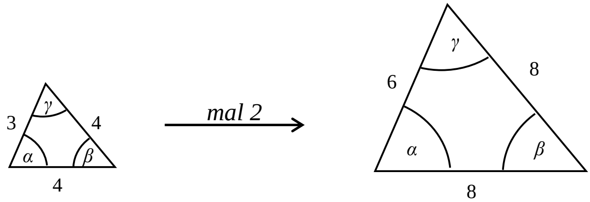
1. Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180°:



$$\alpha + \beta + \gamma \; = \; 180°$$



2. Zwei Dreiecke mit gleichen Winkeln haben die gleiche Form, sie unterscheiden sich nur in der Größe, sie sind „ähnlich“, zum Beispiel:

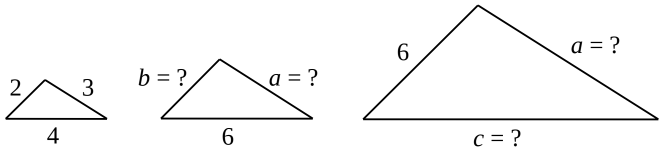


Aufgaben

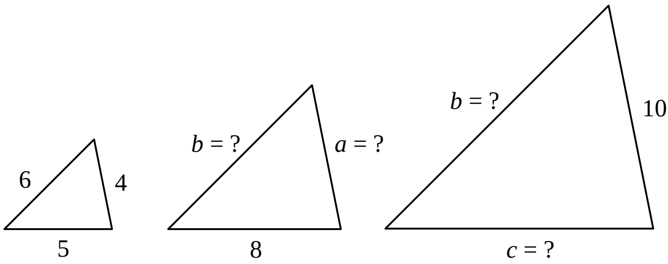
1. Berechne die Winkelsumme im Viereck, Fünfeck, Sechseck und Siebeneck. (Zerlege dazu das Viereck in zwei Dreiecke, das Fünfeck in ein Viereck und eine Dreieck oder in drei Dreiecke, usw.)

2. Berechne die Winkelsumme im n-Eck.

3. Berechne die fehlenden Seiten der ähnlichen Dreiecke:



4. Berechne die fehlenden Seiten der ähnlichen Dreiecke:



5. Ein Pfahl ist 1 m hoch und wirft einen Schatten von 1,50 m. Zur gleichen Zeit ist der Schatten einer Tanne 17 m lang. Wie hoch ist die Tanne?

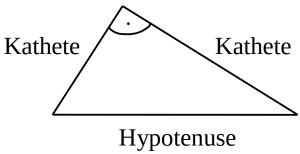
6. Eine 170 cm große Person wirft einen Schatten, der 3 Schritte lang ist. Zur gleichen Zeit wirft ein Gebäude einen Schatten von 42 Schritten Länge. Wie hoch ist das Gebäude?

2. Rechtwinklige Dreiecke

Wir betrachten drei Themen:

- Satz von Pythagoras
- Quadratwurzel-Berechnung
- Sinus, Kosinus, Tangens.

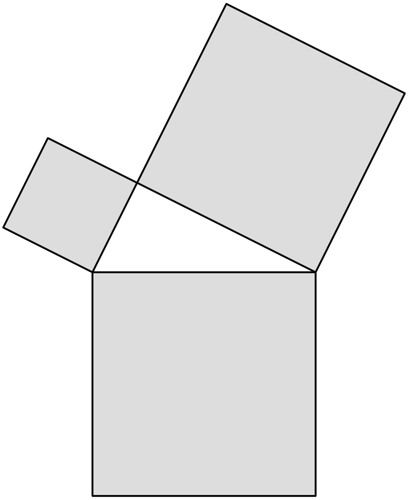
In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, die am rechten Winkel liegen, Katheten. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt Hypotenuse:



2.1 Der Satz von Pythagoras

Der Satz von Pythagoras ist nach dem griechischen Mathematiker und Philosophen Pythagoras (570 v. Chr. bis 510 v. Chr.) benannt, der vermutlich den ersten Beweis erbracht hat. Der Satz war aber bereits vorher bekannt. Anwendungen finden sich auf altbabylonischen Tontafeln, die etwa 1800 v. Chr. erstellt wurden.

Der Satz von Pythagoras besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Flächen der Quadrate über den Katheten zusammen genauso groß sind wie die Fläche des Quadrates über der Hypotenuse:



Kathetenquadrat + Kathetenquadrat =
Hypotenusenquadrat

Kathete^2 + Kathete^2 = Hypotenuse^2

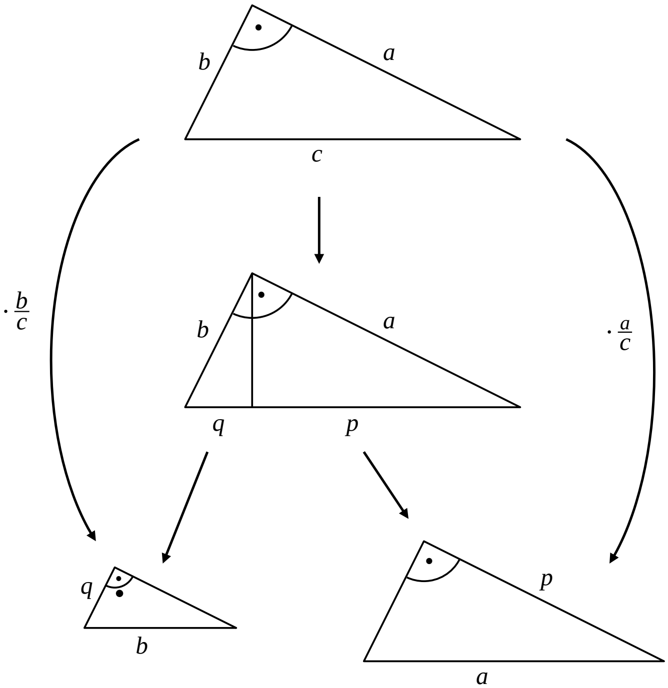
Bezeichnet man die Kathetenlängen mit a und b, die Hypotenusenlänge mit c, so lautet der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Erste Herleitung des Satzes von Pythagoras.

Wir betrachten einen Beweis, der von unserer Zerlegungs-philosophie ausgeht.
Wir teilen das gegebene rechtwinklige Dreieck in zwei ebenfalls rechtwinklige Dreiecke, indem wir Höhe auf der Hypotenuse einzeichnen. Die zwei Teildreiecke haben

dieselben Winkel wie das ursprüngliche Dreieck. Sie unterscheiden sich nur in ihrer Größe (um einen Faktor).



Die Hypotenusenabschnitte p und q sind daher:

$$p = a \cdot \frac{a}{c} = \frac{a^2}{c} \quad \text{und} \quad q = b \cdot \frac{b}{c} = \frac{b^2}{c}$$

Wir addieren die Abschnitte und multiplizieren mit c:

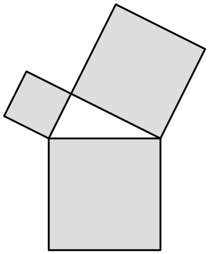
$$p + q = c$$

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$$

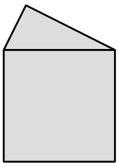
$$a^2 + b^2 = c^2$$

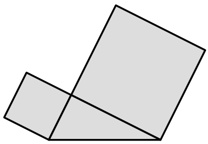
Zweite Herleitung des Satzes von Pythagoras.

Wir müssen zeigen, dass die Summe der Flächen der Kathetenquadrate gleich ist der Fläche des Hypotenusenquadrates:

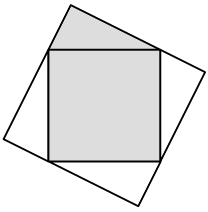


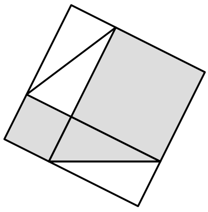
Dazu vergleichen wir die Flächen der beiden Figuren:





Das Dreieck ist gewissermaßen das Verbindungsglied. Fügt man zu jeder der beiden Figuren noch 3 Exemplare des Dreiecks hinzu, so entstehen zwei flächengleiche Quadrate:



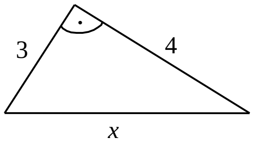


Die Seitenlänge der beiden Quadrate ist die Summe der beiden Kathetenlängen.

Anwendungen des Satzes von Pythagoras

Beispiel 1 (*Hypotenuse gesucht*)
Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten der Länge 4 cm und 3 cm. Wie lang ist die Hypotenuse?

Lösung



Satz von Pythagoras:

$$\text{Hypotenuse}^2 = \text{Kathete}^2 + \text{Kathete}^2$$

Beim gegeben Dreieck bedeutet dies:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 9 + 16$$
$$x^2 = 25$$

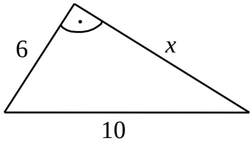
Nun ziehen wir die Wurzel:

$$x = 5$$

Also ist die Hypotenuse 5 cm lang.

Beispiel 2 (*Kathete gesucht*)
Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt eine Kathete der Länge 6 cm, die Hypotenuse ist 10 cm lang. Wie lang ist die andere Kathete?

Lösung



Satz von Pythagoras:

$$\text{Kathete}^2 + \text{Kathete}^2 = \text{Hypotenuse}^2$$

Beim gegeben Dreieck bedeutet dies:

$$\begin{aligned} 6^2 + x^2 &= 10^2 \\ 36 + x^2 &= 100 \qquad | -36 \\ x^2 &= 64 \end{aligned}$$

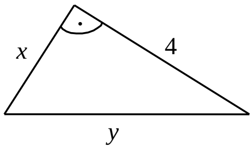
Nun ziehen wir die Wurzel:

$$x = 8$$

Also ist die andere Kathete 8 cm lang.

Beispiel 3 (*Beziehung zwischen Seiten gegeben*)
In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 4 cm lang. Die Hypotenuse ist 2 cm länger als die andere Kathete. Wie lang sind die Hypotenuse und die fehlende Kathete?

Lösung



Ausgangspunkt der Lösung ist der Satz von Pythagoras. Dabei sind die zwei Größen x und y unbekannt. Die gegebene Beziehung $y = x + 2$ wird dazu benutzt, um die

Unbekannten y zu entfernen.

Der Satz von Pythagoras besagt:

$$x^2 + 4^2 = y^2$$

Wir ersetzen y durch $x+2$:

$$x^2 + 4^2 = (x+2)^2$$

Nun lösen wir die Klammer mithilfe der ersten binomischen Formel auf, ziehen auf beiden Seiten x^2 ab und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 &= (x+2)^2 \\ x^2 + 16 &= x^2 + 4x + 4 \\ 16 &= 4x + 4 \\ 12 &= 4x \\ 3 &= x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Die Hypotenuse hat die Länge:

$$y = x + 2 = 3 + 2 = 5$$

Also ist die gesuchte Kathete 3 cm lang und die Hypotenuse 5 cm.

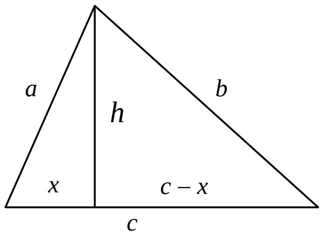
Beispiel 4 (*Herons Formel für die Dreiecksfläche*)
In einem beliebigen Dreieck sind die drei Seitenlängen a, b und c gegeben.

Wir suchen den Flächeninhalt des Dreiecks.

Anmerkung: Die übliche Flächenformel $A = \frac{g \cdot h}{2}$ setzt die Kenntnis einer Höhe h und der zugehörigen Seite g voraus.

Lösung

Wir betrachten die Höhe h auf der Seite c:



Die Anwendung des Satzes von Pythagoras auf die beiden rechtwinkligen Teildreiecke liefert folgende zwei Gleichungen in den zwei Unbekannten h und x:

$$\begin{aligned} x^2 + h^2 &= a^2 \\ (c-x)^2 + h^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Wir lösen die Klammer in der zweiten Gleichung auf und ziehen die erste Gleichung ab:

$$\begin{aligned} x^2 + h^2 &= a^2 \\ c^2 - 2cx + x^2 + h^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} c^2 - 2cx &= b^2 - a^2 \\ x &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \end{aligned}$$

Nun können wir aus der ersten Gleichung h^2 bestimmen:

$$h^2 = a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2$$

Wir formen den gewonnenen Ausdruck mit Hilfe der binomischen Formeln um:

$$
\begin{aligned}
h^2 &= a^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2 \\
&= \left(a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\cdot\left(a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) \\
&= \frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2c}\cdot\left(-\frac{-2ac+a^2+c^2-b^2}{2c}\right) \\
&= \frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\cdot\left(-\frac{(a-c)^2-b^2}{2c}\right) \\
&= \frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{2c} \\
&= \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\cdot\frac{(b+a-c)(b-(a-c))}{2c} \\
&= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4c^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+c+b)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}
\end{aligned}
$$

Die Höhe des Dreiecks ist also:

$$
h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+c+b)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}
$$

Die Dreiecksfläche ist also:

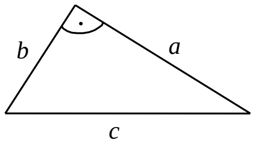
$$A = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+c+b)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

Die vier Faktoren in der Wurzel sind aufgrund ihrer Struktur leicht zu merken. Der erste Faktor ist die Summe aller Seiten, bei den nachfolgenden Faktoren wird jeweils ein Summand mit einem Minuszeichen versehen.

Aufgaben

1. Berechne die fehlende Seite im jeweiligen rechtwinkligen Dreieck.



a) Gegeben: $a = 8$, $b = 15$
b) Gegeben: $a = 6$, $c = 10$
c) Gegeben: $b = 12$, $c = 37$
d) Gegeben: $a = 3$, $c = 6$
e) Gegeben: $b = 4$, $c = 8$
f) Gegeben: $a = 5$, $b = 6$

2. Prüfe mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, ob die folgenden Dreiecke rechtwinklig sind:

a) Dreieck mit Seitenlängen 2, 3 und 4.
b) Dreieck mit Seitenlängen 3, 4 und 5.
c) Dreieck mit Seitenlängen 5, 12 und 13.
d) Dreieck mit Seitenlängen 8, 15 und 17.
e) Dreieck mit Seitenlängen 6, 9 und 10.

3. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Länge 11, eine der Katheten hat die Länge 5 Berechne die Länge der anderen Kathete.

4. Wie lang ist die Hypotenuse eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks, in dem beide Katheten die Länge 1 haben?

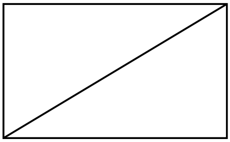
5. Berechne die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der

Seitenlänge 1.

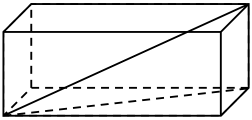
6. Berechne Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 5$.

7. Finde die allgemeine Formel für die Berechnung der Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a.

8. Berechne die Länge der Diagonalen eines 5 cm langen und 3 cm breiten Rechtecks.

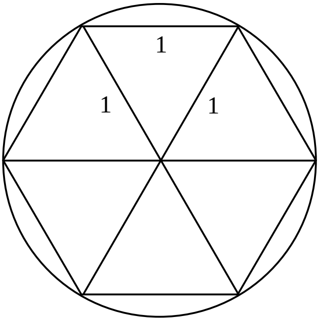


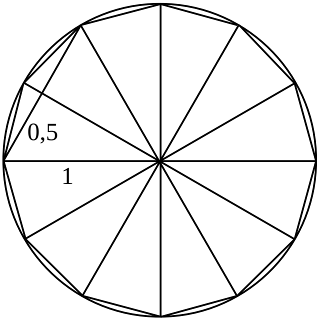
9. Berechne die Länge der Raumdiagonalen eines Schuhkartons, der 30 cm lang, 15 cm breit und 10 cm hoch ist.



10. Berechne Höhe und Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln $a = b = 5$ cm und der Grundseite $c = 3$ cm.

11. a) Gehe vom regelmäßigen Sechseck aus, um die Seitenlänge s des regelmäßigen Zwölfecks zu berechnen. Berechne außerdem Umfang und Flächeninhalt von Sechseck und Zwölfeck.

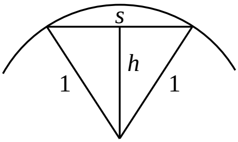


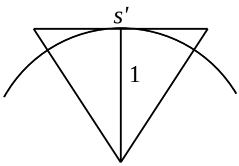


6-Eck

12-Eck

b) Berechne die Seitenlänge s' des umschriebenen Zwölfecks (ähnliche Dreiecke).



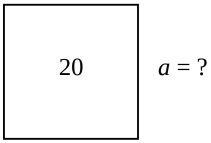


c) Folgere aus a) und b), dass π zwischen 3,1058 und 3,2154 liegen muss.

2.2 Quadratwurzeln

Bei der Berechnung einer Seitenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe des Satz von Pythagoras ergibt sich zunächst lediglich die Fläche des Quadrats über der gesuchten Seite. Aus der Fläche des Quadrats muss dann die Seitenlänge berechnet werden.

<u>Beispiel</u>
Berechne die Seitenlänge a eines Quadrats mit der Fläche 20.



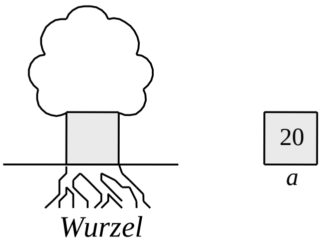
Lösung:

Die Fläche des Quadrates ist

$$a^2 = 20\,.$$

Man sagt:

„a ist die Quadratwurzel aus 20."



Oft wird auch kurz „Wurzel“ statt „Quadratwurzel“ gesagt. Das von Christoph Rudolff (ca. 1450-1543) eingeführte Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ist der stilisierte Anfangsbuchstabe *r* von *radix*, des lateinischen Ausdruckes für *Wurzel*. Die Entwicklung kann man sich etwa wie folgt vorstellen:

$$\text{Wurzel aus } 20 \;\rightarrow\; \text{r}20 \;\rightarrow\; \surd 20 \;\rightarrow\; \sqrt{20}$$

Die gesuchte Seitenlänge a hat mit $\sqrt{20}$ einen neuen Namen bekommen. Sie muss aber noch als Dezimalzahl hingeschrieben, also berechnet werden.

Berechnung von Quadratwurzeln

Wir betrachten eine nach dem Griechen Heron (ca. 10-70, Alexandria) benanntes Verfahren, das jedoch im Wesentlichen schon den Altbabyloniern um 1800 v. Chr. bekannt war.
Die heutigen Taschenrechner berechnen damit die Wurzeln. Das Verfahren von Heron geht von einem (groben) Näherungswert (*Startwert*) aus. Der Wert wird dann verbessert. Diese Verbesserungsprozedur wird nun so lange wiederholt, bis man die gewünschte Genauigkeit (z. B. 8 richtige Stellen nach dem Komma) erreicht hat.

Die Einzelheiten werden nun am Beispiel der Wurzel aus 20 erläutert.

Wir suchen eine Zahl, die mit sich selber multipliziert 20 ergibt:

$$? \cdot ? = 20$$

Eine glatte (ganze) Zahle kommt leider nicht in Frage, denn $4 \cdot 4 = 16$ ist zu klein und $5 \cdot 5 = 25$ zu groß. Die gesuchte Wurzel muss zwischen 4 und 5 liegen.
Geht man den pragmatischen Kompromiss ein, zunächst auf die Gleichheit der Faktoren zu verzichten, ist es leicht, 20 als Produkt zu bekommen:

$$4 \cdot 5 = 20$$

Wenn man keine so schöne Zerlegung findet, kann man immer auf die Zerlegung mit der Eins als einem der Faktoren zurückgreifen:

$$1 \cdot 20 = 20$$

Bei einer solchen *Zerlegung* ist der eine Faktor zu klein und der andere zu groß, um bei der Multiplikation mit sich selber 20 zu ergeben. Die Wahrheit liegt dazwischen. Der am einfachsten zu berechnende Zwischenwert ist der *Mittelwert*, er liegt genau in der Mitte und berechnet sich als die Summe der beiden Zahlen, dividiert durch Zwei. Genauso findet man übrigens auch die Endnote aus zwei Teilnoten.
Betrachten wir die Zerlegung

$$4 \cdot 5 = 20,$$

so sind die Faktoren 4 und 5, und ihr Mittelwert ist:

$$\frac{4+5}{2} = 4{,}5\,.$$

Den Wert 4,5 nehmen wir nun als *neuen* ersten *Faktor*. Der zweite Faktor kann nicht frei gewählt werden, sondern muss so berechnet werden, dass das Produkt 20 ergibt:

$$4{,}5 \cdot ? = 20\,.$$

Der gesuchte zweite Faktor muss daher der Quotient von 20 und 4,5 sein:

$$4{,}5 \cdot \frac{20}{4{,}5} = 20\,.$$

Setzt man den Quotienten (auf 5 Nachkommastellen gerundet) ein, so kommen wir zu folgender Zerlegung:

$$4{,}5 \cdot 4{,}44444 \approx 20\,.$$

Beide Faktoren liegen nun viel näher beieinander als bei der ursprünglichen Zerlegung. Setzt man das Verfahren fort, so gelangt man zu Faktoren, die sich beliebig nahe kommen.

Wir führen das erläuterte Verfahren nun in kurzer schematischer Form durch, um $\sqrt{20}$ bis auf 5 Nachkommastellen zu berechnen.

1. Schritt

Zerlegung: $4 \cdot 5 = 20$ (auch möglich: $1 \cdot 20 = 20$)

Mittelwert: $\dfrac{4+5}{2} = 4{,}5$

2. Schritt

Zerlegung: $4{,}5 \cdot ? = 20$

$$4{,}5 \cdot \frac{20}{4{,}5} = 20$$

$$4{,}5 \cdot 4{,}44444 \approx 20$$

Mittelwert: $\dfrac{4{,}5 + 4{,}44444}{2} = 4{,}47222$

3. Schritt

Zerlegung: $4{,}47222 \cdot ? = 20$

$$4{,}47222 \cdot \frac{20}{4{,}47222} = 20$$

$$4{,}47222 \cdot 4{,}47205 \approx 20$$

Mittelwert: $\dfrac{4{,}47222 + 4{,}47205}{2} \approx 4{,}47214$

4. Schritt

Zerlegung: $4{,}47214 \cdot ? = 20$

$$4{,}47214 \cdot \frac{20}{4{,}47214} = 20$$

$$4{,}47214 \cdot 4{,}47213 \approx 20$$

Mittelwert: $\dfrac{4{,}47214 + 4{,}47213}{2} \approx 4{,}47214$

Der letzte Schritt hat keine weitere Verbesserung gebracht. Auch weitere Schritte würden wieder die Zahl 4,42214 liefern. Wir können also abbrechen und das Ergebnis festhalten:

$$\sqrt{20} \approx 4{,}47214$$

Anmerkungen

1. Das Heron-Verfahren ist *quadratisch konvergent*. Das bedeutet praktisch, grob gesagt, folgendes: Bei jedem Verbesserungsschritt verdoppelt sich die Anzahl zutreffender Nachkommastellen.

2. Das Heron-Verfahren ist ein *iteratives* Verfahren, der gleiche Rechenvorgang wird immer wiederholt. Auch kom-

plizierte Gleichungen können durch iterative Verfahren gelöst werden. In der Tat ist das Heron-Verfahren ein Spezialfall des Newton-Verfahrens.

3. Eine andere und allgemeinere Begründung des Heron-Verfahrens ist folgende. Wenn x_1 ein guter Näherungswert für $\sqrt{20}$ ist, so ist der genaue Wert $x = x_1 + d$, wobei d einen kleinen Wert hat. Da $x^2 = (x_1 + d)^2 = x_1^2 + 2x_1 d + d^2$ und $x^2 = 20$, ist $x_1^2 + 2x_1 d + d^2 = 20$. Weil d betraglich klein ist, ist d^2 noch kleiner und praktisch vernachlässigbar (zum Beispiel $d = 0{,}01$ und $d^2 = 0{,}0001$). Also kann d^2 in obiger Gleichung weggelassen werden: $x_1^2 + 2x_1 d \approx 20$. Daraus ergibt sich

$$d \approx (20 - x_1^2)/(2x_1) \quad \text{und} \quad x = x_1 + d \approx \frac{x_1 + 20/x_1}{2}.$$

Der verbesserte Wert $x_2 = \dfrac{x_1 + 20/x_1}{2}$ entspricht genau dem Mittelwert der Faktoren der Zerlegung, die sich aus dem Faktor x_1 ergibt.

4. Bei der Wurzelberechnung kann man sich auf Zahlen zwischen 1 und 100 beschränken. Beispiel:

$$\begin{aligned}\sqrt{200.000} &= \sqrt{20 \cdot 10.000}\\ &= \sqrt{20} \cdot \sqrt{10.000}\\ &= \sqrt{20} \cdot 100\end{aligned}$$

5. Das Heron-Verfahren kann sinngemäß auf die Berechnung der Kubikwurzel und weiterer höherer Wurzeln übertragen werden.

Aufgaben

1. Berechne die Quadratwurzel aus den Zahlen 2, 3, 5, 10 und 65 mit einer Genauigkeit von sechs Nachkommastellen.

2. Berechne die Quadratwurzel aus 80 mit einer Genauigkeit von sechs Nachkommastellen mit den zwei verschiedenen Startwerten 1 und 10 (d. h. mit der Anfangszerlegungen $1 \cdot 80 = 80$ bzw. $10 \cdot 8 = 80$).

3. Finde die Quadratwurzel aus folgenden Zahlen:
a) 9, 900, 90.000, 9.000.000, 0,09, 0,0009, 0,000.009.
b) 90, 9000, 0,9, 0,009.

4. Berechne die Quadratwurzel aus

$$4{,}51 \cdot 10^{30} \text{ und } 4{,}51 \cdot 10^{31}$$

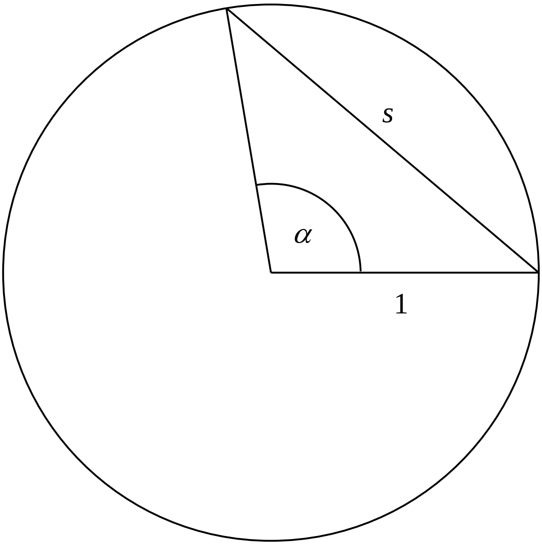
mit einer Genauigkeit von jeweils sechs Dezimalstellen.

2.3 Sinus, Kosinus, Tangens

Wenn von einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten gegeben sind, kann man die dritte Seite mit dem Satz von Pythagoras berechnen. Wie kann man aber die Winkel berechnen? Umgekehrt, wenn eine Seite und alle Winkel gegeben sind, wie kann man dann die zwei fehlenden Seiten berechnen?

Man benötigt eine Beziehung zwischen Winkeln und Seitenlängen.

In der Antike hat man dafür eine *Sehnentabelle* benutzt. In ihr ist zu jedem (Mittelpunkts-)Winkel die zugehörige Sehnenlänge in einem Kreis (mit dem Radius 1) angegeben.



Eine Sehnentabelle steht auf der nächsten Seite.

Sehnentabelle

Winkel α	Sehne s
0°	0,0000
5°	0,0872
10°	0,1743
15°	0,2611
20°	0,3473
25°	0,4329
30°	0,5176
35°	0,6014
40°	0,6840
45°	0,7654
50°	0,8452
55°	0,9235
60°	1,0000
65°	1,0746
70°	1,1472
75°	1,2175
80°	1,2856
85°	1,3512
90°	1,4142

Winkel α	Sehne s
90°	1,4142
95°	1,4746
100°	1,5321
105°	1,5867
110°	1,6383
115°	1,6868
120°	1,7321
125°	1,7740
130°	1,8126
135°	1,8478
140°	1,8794
145°	1,9074
150°	1,9319
155°	1,9526
160°	1,9696
165°	1,9829
170°	1,9924
175°	1,9981
180°	2,0000

Grobe Werte der Sehnenlängen können zeichnerisch ermittelt werden. Genauere Werte können berechnet werden. Für einige Winkel ist die Sehnenlänge leicht zu bestimmen:

a) Für 0° ist die Sehne nur ein Punkt, die Länge also 0.

b) Für 60° liegt ein gleichseitiges Dreieck vor. Die Sehne hat daher die Länge 1.

c) Für 90° ist die Sehne die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Länge 1. Nach dem Satz von Pythagoras beträgt die Sehnenlänge $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

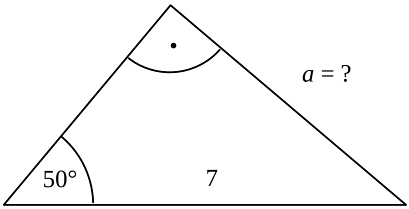
d) Für 120° ist besteht das Dreieck aus zwei halben gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 1. Die halbe Sehne ist die Höhe dieser Dreiecke. Die Sehne hat also die Länge $\sqrt{3} \approx 1,7321$.

e) Für 180° ist die Sehne der Durchmesser, also 2 lang.

An einem Beispiel soll nun gezeigt werden, wie man die Sehnentabelle für die Berechnung an einem rechtwinkligen Dreieck nutzen kann.

Beispiel 1

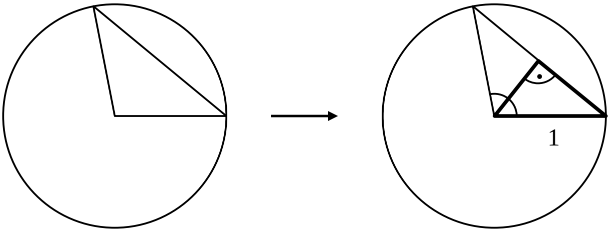
Gegeben ist das folgende rechtwinklige Dreieck:



Die Kathete a soll berechnet werden.

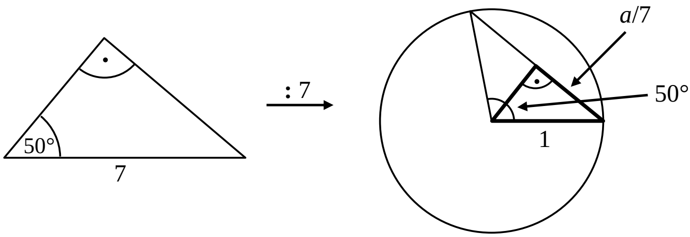
Lösung:

Wir möchten ein rechtwinkliges Dreieck mit Hilfe der Sehnentabelle berechnen. Dazu halbieren wird das vom Mittelpunktswinkel und der Sehne gebildete Dreieck, indem wir die Höhe auf der Sehne hinzufügen:



Wir erhalten zwei (gleiche) rechtwinklige Dreiecke. Die Hypotenuse hat die Länge 1, die Kathete gegenüber dem halben Mittelpunkstwinkel ist die halbe Sehne.

Das gegebene Dreieck des Beispiels hat eine Hypotenuse der Länge 7. Wir müssen es um den Faktor 7 verkleinern, damit die Hypotenuse die passende Länge von 1 hat:



Nun schauen wir also bei $\alpha = 2 \cdot 50° = 100°$ in der Sehnentabelle nach und erhalten die Sehnenlänge $s = 1{,}5321$.

Nun ist $a/7$ die ***halbe*** Sehnenlänge:

$$\frac{a}{7} = \frac{1{,}5321}{2} = 0{,}76605 .$$

Also ist $a = 7 \cdot 0,76605 = 5,36235$ die gesuchte Länge der Katheten.

Das Beispiel zeigt, wie umständlich die Sehnentabelle bei der Anwendung auf rechtwinklige Dreiecke ist. Zunächst wurde der Winkel verdoppelt und anschließend die Sehne halbiert.

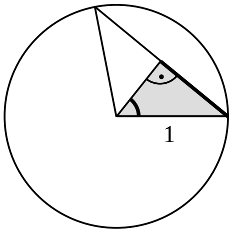
Der Inder Aryabhata (476-550) hat Abhilfe geschaffen. Er hat die ***halbe*** Sehne zum ***halben*** Mittelpunktswinkel betrachtet und eine entsprechende Tabelle erstellt. Durch einen Übersetzungsfehler ist aus dem Wort *ardha-jya* (Sanskrit für ***halbe Sehne***) die Bezeichnung ***Sinus*** (lateinisch für Bucht, Ausbuchtung, Bogen, Busen, Tasche) hervorgegangen. Aryabhata ist also der Verfasser der ersten Sinustabelle. Sie hat die Schrittweite von 3,75°:

Sinustabelle (Halbsehnentabelle)

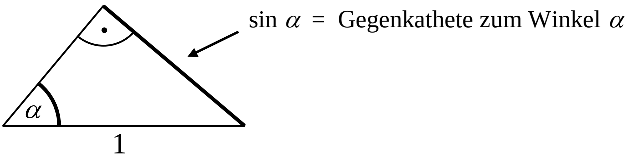
Winkel	Sinus
0,00°	0,0000
3,75°	0,0654
7,50°	0,1305
11,25°	0,1951
15,00°	0,2588
18,75°	0,3214
22,50°	0,3827
26,25°	0,4423
30,00°	0,5000
33,75°	0,5556
37,50°	0,6088
41,25°	0,6593
45,00°	0,7071

Winkel	Sinus
45,00°	0,7071
48,75°	0,7518
52,50°	0,7934
56,25°	0,8315
60,00°	0,8660
63,75°	0,8969
67,50°	0,9239
71,25°	0,9469
75,00°	0,9659
78,75°	0,9808
82,50°	0,9914
86,25°	0,9979
90,00°	1,0000

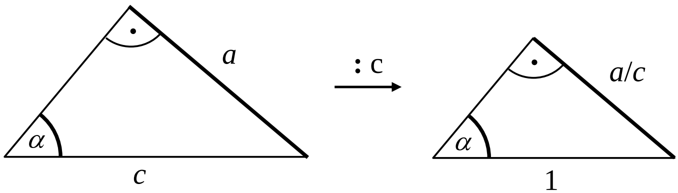
Die Halbsehne zum halben Mittelpunktswinkel ist nichts anderes als die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse der Länge 1. Die Kathete liegt gegenüber dem betrachteten Winkel, sie wird daher auch als ***Gegenkathete*** bezeichnet.



Wir lassen nun den Kreis weg und betrachten lediglich das rechtwinklige Dreieck, das wir in übersichtlicher Größe zeichnen:



Ein rechtwinkliges Dreieck mit einer *beliebigen* Hypotenuse *c*, kann wie in Beispiel 1 zu einem Dreieck mit der Hypotenuse 1 gemacht werden:



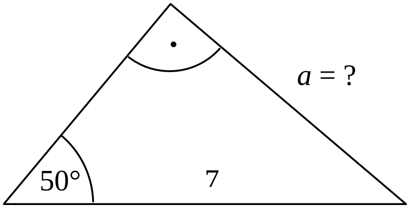
Die Gegenkathete im rechten Dreieck ist $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

Wir greifen das Dreieck aus Beispiel 1 nochmals auf und lösen es mit Hilfe des Sinus.

Beispiel 2

Gegeben ist das folgende rechtwinklige Dreieck:



Die Kathete a soll berechnet werden.

Lösung:

Die obige Beziehung

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

angewendet auf das vorliegende Dreieck ergibt:

$$\sin 50° = \frac{a}{7}.$$

Einer Sinustabelle (s. u.) oder einem Taschenrechner entnehmen wir, dass $\sin 50° \approx 0,7661$. Wir setzen dies in die Gleichung ein, multiplizieren mit 7:

$$0,7661 \approx \frac{a}{7}$$

$$7 \cdot 0,7661 \approx a$$

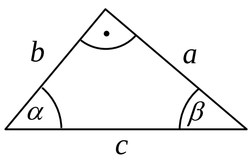
$$a \approx 5,3627$$

Die folgende kleine Sinustabelle kann der Leser aus obiger Sehnentabelle gewinnen:

α	sin α
0°	0,0000
5°	0,0872
10°	0,1737
15°	0,2588
20°	0,3420
25°	0,4226
30°	0,5000
35°	0,5736
40°	0,6428
45°	0,7071
50°	0,7661
55°	0,8192
60°	0,8661
65°	0,9063
70°	0,9397
75°	0,9660
80°	0,9848
85°	0,9962
90°	1,0000

Zum Sinus sind später noch der ***Kosinus*** und ***Tangens*** hinzugekommen.

Der Kosinus wurde ursprünglich ausführlicher als „sinus complementi“ bezeichnet. Er kann als Sinus des Komplementwinkels betrachtet werden:

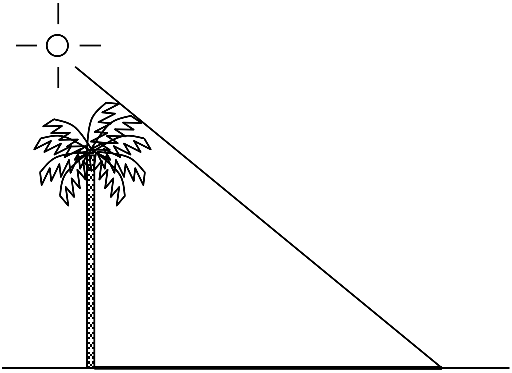


$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \text{Sinus des Komplementwinkels von}\,\alpha \\ &= \text{Sinus von}\,\beta \\ &= \frac{\text{Gegenkathete von}\,\beta}{\text{Hypotenuse}} \\ &= \frac{\text{Ankathete von}\,\alpha}{\text{Hypotenuse}}\end{aligned}$$

Also ist einfach

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

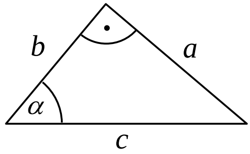
Der Tangens wurde früher „umbra versa“ („umbra“ lateinisch für „Schatten“) genannt und ist aus arabischen Schattentabellen hervorgegangen. Gegenstandshöhe und Schattenlänge sind die ***zwei Katheten*** eines rechtwinkligen Dreiecks, wie man an der folgenden kleinen Zeichnung sehen kann:



Die Definition des Tangens enthält daher nur die Katheten:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}.$$

Zusammenfassung



$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Anmerkungen

1. Die *Gegen*kathete ist die Kathete, die dem betrachteten Winkel *gegen*über liegt. Die *An*kathete ist die Kathete, die *an* dem betrachteten Winkel liegt.

2. Der Kosinus eines Winkels ist der Sinus des Komplementwinkels, d. h. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

3. Der Tangens ist der Quotient von Sinus und Kosinus (weil die Hypotenusen sich wegkürzen): $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

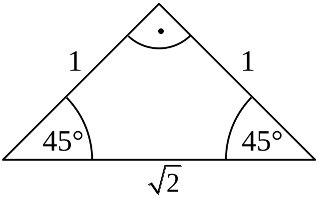
Die Anmerkungen 2 und 3 ermöglichen die Erweiterung der obigen Sinustabelle um die Kosinus- und Tangenswerte. Das Ergebnis ist die nachstehende trigonometrische Tafel:

α	sin α	cos α	tan α
0°	0,0000	1,0000	0,0000
5°	0,0872	0,9962	0,0875
10°	0,1737	0,9848	0,1764
15°	0,2588	0,9660	0,2679
20°	0,3420	0,9397	0,3639
25°	0,4226	0,9063	0,4663
30°	0,5000	0,8661	0,5773
35°	0,5736	0,8192	0,7002
40°	0,6428	0,7661	0,8391
45°	0,7071	0,7071	1,0000
50°	0,7661	0,6428	1,1918
55°	0,8192	0,5736	1,4282
60°	0,8661	0,5000	1,7322
65°	0,9063	0,4226	2,1446
70°	0,9397	0,3420	2,7477
75°	0,9660	0,2588	3,7326
80°	0,9848	0,1737	5,6695
85°	0,9962	0,0872	11,4243
90°	1,0000	0,0000	-

In Kapitel 4.4 und 5.4 werden wir trigonometrische Tafeln berechnen. Für die besonderen Winkel 45°, 30° und 60° können die Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte einfach berechnet werden, und zwar mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, angewendet auf ein halbes Quadrat (d. h. ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck) und ein halbes gleichseitiges Dreieck.

Die besonderen Winkel 45°, 60° und 30°

1. Wir betrachten ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge 1.



Die Hypotenuse c ist $\sqrt{2}$, denn nach dem Satz von Pythagoras ist:

$$\begin{aligned} c^2 &= 1^2 + 1^2 \\ c^2 &= 2 \\ c &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

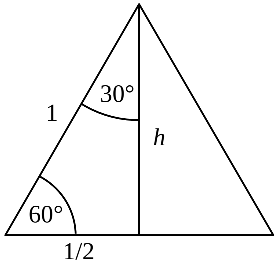
Also

$$\sin 45° = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$$

$$\cos 45° = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$$

$$\tan 45° = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und zeichnen die Höhe h ein. Die zwei Teildreiecke sind rechtwinklig, wir betrachten das linke. Alle Winkel im gleichseitigen Dreieck betragen 60°.



Wir berechnen die Höhe mit dem Satze von Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
h^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 &= 1^2 \\
h^2 + \tfrac{1}{4} &= 1 \\
h^2 &= \tfrac{3}{4} \\
h &= \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
h &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Daher:

$$
\begin{aligned}
\sin 60° &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{1} = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660 \\
\cos 60° &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \\
\tan 60° &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1{,}7321
\end{aligned}
$$

Und für den Winkel von 30° ergibt sich:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{1} = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$$

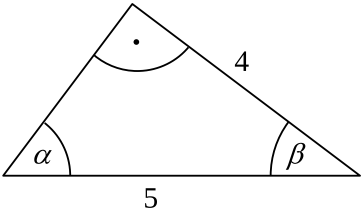
$$\tan 30^\circ = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Zusammenfassung

α	sin α	cos α	tan α
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Wir betrachten nun einfache Beispiele zur Anwendung von Sinus, Kosinus und Tangens. Dazu wird eine trigonometrische Tabelle (s. Seite 145 ff.) oder ein wissenschaftlicher Taschenrechner benötigt.

Beispiel 3 (*Winkel gesucht*)
In dem rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel α und β zu berechnen:



Lösung

1. Berechnung von α

Betrachte den Sinus, da Gegenkathete und Hypotenuse gegeben sind.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\sin\alpha = 0{,}8$$

Der Taschenrechner liefert dann $\alpha \approx 53{,}13°$.

2. Berechnung von β

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°:

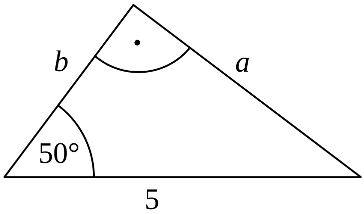
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 90° &= 180° \\ \alpha + \beta &= 90° \\ \beta &= 90° - \alpha \\ &\approx 90° - 53{,}13° \\ &= 36{,}87° \end{aligned}$$

Also: $\beta \approx 36{,}87°$

Die gesuchten Winkel sind daher $\alpha \approx 53{,}13°$, $\beta \approx 36{,}87°$.

Beispiel 4 (*Katheten gesucht*)

In dem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten gesucht:



Lösung

1. Berechnung von a

Betrachte den Sinus, da a die Gegenkathete zum 50°-Winkel ist und die Hypotenuse gegeben ist.

$$\sin 50° = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{5}$$

$$5 \cdot \sin 50° = a$$

Also:

$$\begin{aligned} a &= 5 \cdot \sin 50° \\ &= 5 \cdot 0{,}766\ldots \\ &\approx 3{,}83 \end{aligned}$$

2. Berechnung von b

Betrachte den Kosinus, da b die Ankathete zum 50°-Winkel ist und die Hypotenuse gegeben ist.

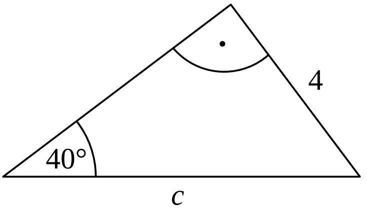
$$\cos 50° = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{5}$$

$$5 \cdot \cos 50° = b$$

Also: $b = 5 \cdot \cos 50° = 5 \cdot 0{,}6427\ldots \approx 3{,}21$

Die gesuchten Seiten sind daher $a \approx 3{,}83$, $b \approx 3{,}21$.

<u>Beispiel 5</u> (*Hypotenuse gesucht*)
In dem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gesucht:



Lösung

Betrachte den Sinus, da ein Winkel und die zugehörige Gegenkathete gegeben sind. Löse nach c auf.

$$\sin 40° = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{4}{c}$$

$$c \cdot \sin 40° = 4$$

$$c = \frac{4}{\sin 40°}$$

$$c = \frac{4}{0,6427\ldots}$$

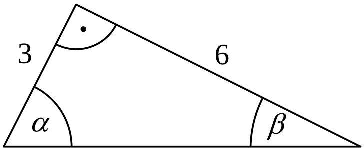
$$c \approx 6,22$$

Die gesuchte Hypotenuse ist also $c \approx 6,22$.

<u>Beispiel 6</u> (*Katheten gegeben*)
Ein rechtwinkliges Dreieck hat eine Katheten die Länge 3, die andere die Länge 6.
Wie groß sind die Winkel gegenüber den Katheten?

Lösung

Das beschriebene Dreieck sieht wie folgt aus:



1. Berechnung von α

Betrachte den Tangens, weil beide Katheten gegeben sind.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\tan\alpha = 2$$

$$\alpha \approx 63{,}43°$$

2. Berechnung von β

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°:

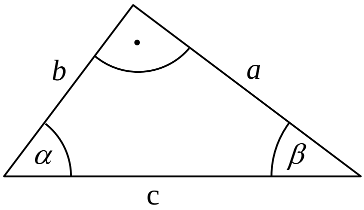
$$\begin{aligned}\alpha+\beta+90° &= 180°\\ \alpha+\beta &= 90°\\ \beta &= 90°-\alpha\\ &\approx 90°-63{,}43°\\ &= 26{,}57°\end{aligned}$$

Die gesuchten Winkel sind daher:

$$\begin{aligned}\alpha &\approx 63{,}43°\\ \beta &\approx 26{,}57°\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Berechne den fehlenden Winkel und die fehlenden Seiten im rechtwinkligen Dreieck. Die Bezeichnungen sind wie üblich:



a) Gegeben: $\alpha = 20°$, $a = 4$
b) Gegeben: $\alpha = 50°$, $c = 7$
c) Gegeben: $\alpha = 70°$, $b = 2$
d) Gegeben: $\beta = 10°$, $c = 4$
e) Gegeben: $\beta = 30°$, $b = 6$

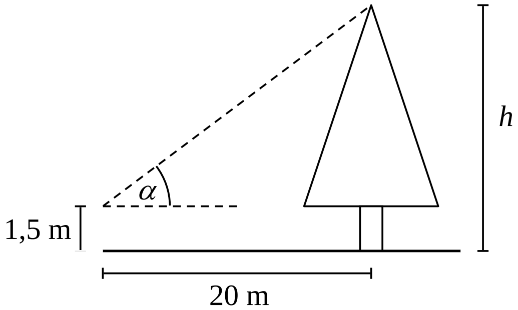
2. Berechne jeweils die fehlende Seite und die fehlenden Winkel des rechtwinkligen Dreiecks. Die Bezeichnungen sind die üblichen, wie in Aufgabe 1.

a) Gegeben: $a = 15$, $b = 8$
b) Gegeben: $a = 3$, $c = 5$
c) Gegeben: $b = 12$, $c = 37$
d) Gegeben: $a = 6$, $b = 10$
e) Gegeben: $b = 4$, $c = 8$
f) Gegeben: $a = 5$, $b = 6$

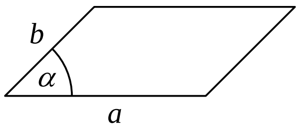
3. Löse die genannten Aufgaben mit den vorgegebenen Hilfsmitteln:

a) Die Aufgaben 1 und 2 nur mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und des Sinus.
b) Die Aufgaben 1 und 2 nur mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und des Kosinus.
c) Die Aufgabe 2 nur mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und des Tangens.

4. Um die Höhe h einer Tanne zu berechnen, wird 20 m entfernt und 1,50 m über dem Boden der Höhenwinkel $\alpha = 36°$ gemessen. Berechne h.



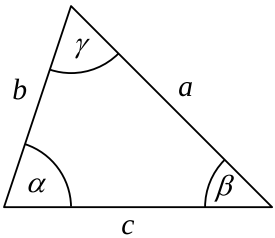
5. Berechne die Höhe h und den Flächeninhalt A des Parallelogramms, wenn $\alpha = 36°$, $a = 10$ cm und $b = 8$ cm.



6. In einem rechtwinkligen Dreieck hat eine der Katheten die Länge 3, die andere Kathete ist um 1 kleiner als die Hypotenuse. Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel.

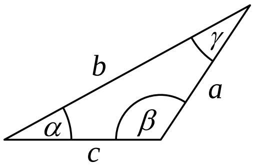
7. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Länge 10, eine der Katheten ist doppelt so lang wie die andere. Berechne die Länge der Katheten und die Winkel des Dreiecks.

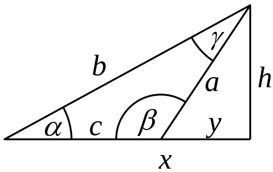
8. Berechne jeweils die Höhe h auf c und alle fehlenden Seiten und Winkel des schiefwinkligen Dreiecks. Berechne dazu vollständig die zwei rechtwinkligen Teildreiecke, die durch das Einzeichnen der Höhe auf c entstehen.



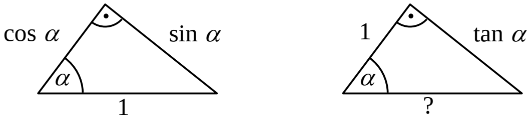
a) Gegeben: $b = 4$, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 60°$
b) Gegeben: $a = 8$, $b = 5$, $\alpha = 36°$
c) Gegeben: $b = 6$, $c = 7$, $\alpha = 50°$

9. Berechne die Höhe h auf c und alle fehlenden Seiten und Winkel des schiefwinkligen Dreiecks mit $a = 5$, $b = 8$, $\alpha = 30°$. Berechne dazu das große rechtwinklige Dreieck und das rechte kleine rechtwinklige Teildreieck:





10. Betrachte die folgenden zwei rechtwinkligen Dreiecke, deren die Hypotenuse bzw. Ankathete die Länge 1 haben.



Leite daraus die folgenden Beziehungen ab.

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

($\sin^2\alpha$ bedeutet $(\sin\alpha)^2$, analog $\cos^2\alpha$, $\tan^2\alpha$)

b) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ und $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

c) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ und $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

d) $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ und $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

Man kann b), c) und d) auch rein rechnerisch aus a) herleiten.

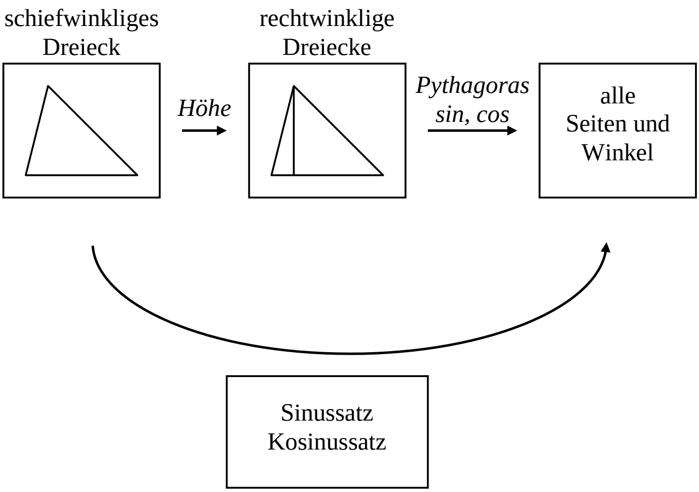
Bemerkung zur Anwendung dieser Formeln: Wenn einer der Werte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ gegeben ist, so lassen sich die anderen damit berechnen.

3. Schiefwinklige Dreiecke

Wir betrachten drei Themen

* Sinussatz
* Kosinussatz
* Die vier Grundprobleme der Trigonometrie

Schiefwinklige Dreiecke können grundsätzlich durch Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke berechnet werden. Sinussatz und Kosinussatz fassen diese immer wiederkehrenden Zerlegungen und Berechnungen in zwei Formeln zusammen.



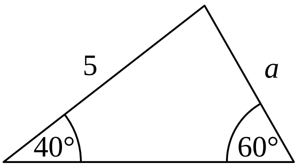
3.1 Der Sinussatz

Wir betrachten zunächst ein Beispiel für die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke. Dann lösen wir die Aufgabe allgemein und erhalten so den Sinussatz. Anschließend wird dasselbe Beispiel nochmal durchgerechnet, aber mit Hilfe des Sinussatzes.

Schließlich betrachten wir noch den Fall stumpfwinkliger Dreiecke, die eine Erweiterung der Sinustabelle für Winkel von bis zu 180° erzwingen.

Beispiel 1

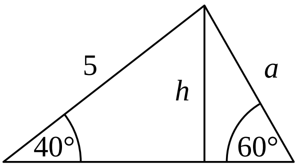
Gegeben sind die Winkel 40° und 60°, die Gegenseite des letztgenannten Winkels hat die Länge 5.



Gesucht ist Gegenseite a zum 40°-Winkel.

Lösung

1. Zeichne die Höhe auf c ein. Sie zerstört weder die gegebene Seite noch die gesuchte Seite a.



2. Berechne h mit Hilfe des linken rechtwinkligen Dreiecks:

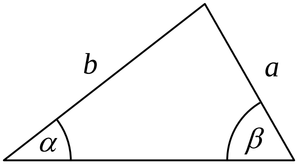
$$\begin{aligned} \sin 40° &= \frac{h}{5} \\ h &= 5 \cdot \sin 40° \\ h &\approx 3{,}214 \end{aligned}$$

3. Berechne nun a mit Hilfe des rechten rechtwinkligen Dreiecks:

$$\begin{aligned} \sin 60° &= \frac{h}{a} \\ a \cdot \sin 60° &= h \\ a &= \frac{h}{\sin 60°} \\ a &\approx \frac{3{,}214}{\sin 60°} \\ a &\approx 3{,}71 \end{aligned}$$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

Allgemein (*Buchstaben statt konkreter Zahlen*)

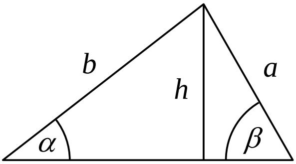


Gegeben: α, β, b

Gesucht: a (Gegenseite zu α)

Lösung

Zeichne die Höhe auf c ein. Sie zerstört weder die gegebene noch die gesuchte Seite.



Berechne h aus dem linken rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$
$$h = b\cdot\sin\alpha$$

Berechne nun a aus dem rechten rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin\beta = \frac{h}{a}$$
$$a\cdot\sin\beta = h$$
$$a = \frac{h}{\sin\beta}$$

Setze nun $h = b\cdot\sin\alpha$ ein:

$$a = \frac{h}{\sin\beta}$$
$$a = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}$$

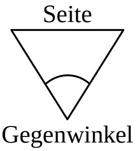
Die Aufgabe ist damit gelöst.

Die gerade gewonnene Formel für a kann schöner und symmetrischer geschrieben werden. Wir dividieren beide Seiten durch $\sin\alpha$ und erhalten die folgende Formel:

Seite Seite

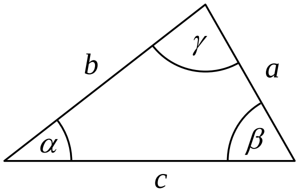
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}}$$

Winkel gegenüber Winkel gegenüber

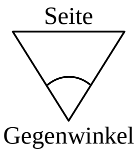


Was den Seiten a und b recht ist, ist auch der Seite c billig. Wir bekommen so den Sinussatz:

Sinussatz



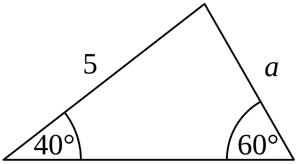
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$



Wir betrachten nochmal das erste Beispiel, aber wir lösen es mit Hilfe des Sinussatzes.

Beispiel 2

Gegeben sind die Winkel 40° und 60°, die Gegenseite des letztgenannten Winkels hat die Länge 5.



Gesucht ist Gegenseite a zum 40°-Winkel.

Lösung

Der Sinussatz besagt in der vorliegenden Situation:

$$\frac{a}{\sin 40°} = \frac{5}{\sin 60°}$$

Also:

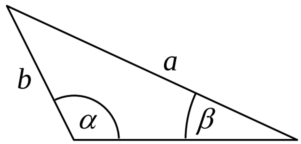
$$a = \frac{5 \cdot \sin 40°}{\sin 60°} \approx 3{,}71$$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

Stumpfwinklige Dreiecke

Ein stumpfwinkliges Dreieck hat einen stumpfen Winkel (einen Winkel größer als 90°). Die zwei anderen Winkel müssen dann zwangsläufig spitz sein (d. h. kleiner als 90°), denn die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Wir betrachten als Beispiel das folgende stumpfwinklige Dreieck:



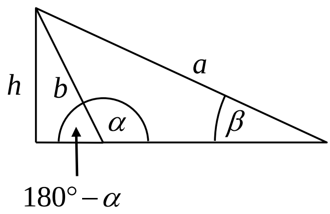
$\alpha = 115°$

Der Sinussatz erscheint zunächst sinnlos, wenn $\alpha = 115°$ ist:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Was soll „$\sin 115°$“ bedeuten? Unsere Sinustabelle bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke und umfasst nur Winkel bis 90°.
Wenn der Sinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke gültig bleiben soll, muss man den Sinusbegriff und die Sinustabelle erweitern bis 180°. Aber wie?

Wir betrachten nochmal die frühere Herleitung des Sinussatzes und zeichnen die Höhe ein:



Berechne h aus dem linken rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \sin(180° - \alpha)$$

Berechne nun a aus dem großen rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin\beta = \frac{h}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = h$$

$$a = \frac{h}{\sin\beta}$$

Setze $h = b \cdot \sin(180° - \alpha)$ ein:

$$a = \frac{h}{\sin\beta}$$

$$a = \frac{b \cdot \sin(180° - \alpha)}{\sin\beta}$$

Also:

$$\frac{a}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Wir vergleichen diese Formel mit der gewünschten Form des Sinussatzes:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Wenn beide Versionen übereinstimmen sollen, müssen wir (für stumpfe Winkel α)

$$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$$

setzen.

In Worten bedeutet dies:

Der Sinus eines stumpfen Winkels ist der Sinus des (stets spitzen) Ergänzungswinkels zu 180°.

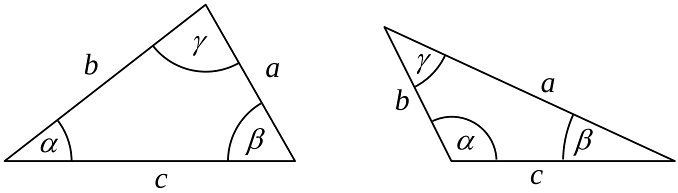
Beispiele:

$$\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = 0{,}5$$
$$\sin 135° = \sin(180° - 135°) = \sin 45° \approx 0{,}707$$
$$\sin 120° = \sin(180° - 120°) = \sin 60° \approx 0{,}866$$

Mit dieser Erweiterung des Sinus für stumpfe Winkel ist der Sinussatz für beliebige (auch stumpfwinklige) Dreiecke gültig.

Sinussatz

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$



Eine grobe Sinustabelle für Winkel von 0° bis 180° steht auf der nächsten Seite.

WARNUNG
In der Praxis ist zu beachten, dass man nicht eindeutig vom Sinuswert auf den Winkel zurückschließen kann.
Beispielsweise sind

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \text{und}$$

$$\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = 0{,}5$$

gleich.
Es kommen immer (außer bei 90°) zwei Winkel in Betracht, ein spitzer und sein stumpfer Ergänzungswinkel zu 180°.

Sinustabelle (0° bis 180°)

α	**sin** α
0°	0,00
10°	0,17
20°	0,34
30°	0,50
40°	0,64
50°	0,77
60°	0,87
70°	0,94
80°	0,98
90°	1,00
100°	0,98
110°	0,94
120°	0,87
130°	0,77
140°	0,64
150°	0,50
160°	0,34
170°	0,17
180°	0,00

Der Taschenrechner liefert bei Eingabe des Sinuswertes nur den spitzen Winkel. Man darf nicht vergessen, den stumpfen Ergänzungswinkel einzubeziehen. Daraus ergibt sich die Faustregel: Meide den Sinus bei der Winkelberechnung!

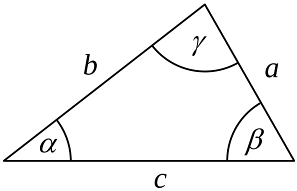
Aufgaben

1. Berechne den Sinuswert der stumpfen Winkel durch Rückführung auf den Sinus spitzer Winkel:
$\sin 120°$, $\sin 150°$, $\sin 135°$, $\sin 100°$, $\sin 170°$, $\sin 160°$.

2. Finde alle Winkel α, die zu den gegebenen Sinuswerten gehören:

$$\sin\alpha = 0{,}5,\ \ \sin\alpha = 0{,}1736\ldots,\ \ \sin\alpha = 0{,}8660\ldots,$$
$$\sin\alpha = 0{,}7071\ldots,\ \ \sin\alpha = 0{,}6427\ldots,\ \ \sin\alpha = 1.$$

3. Berechne den fehlenden Winkel und die fehlenden Seiten der folgenden schiefwinkligen Dreiecke. Die Bezeichnungen sind wie üblich:



a) Gegeben: $c = 7,\ \alpha = 68°,\ \beta = 40°$

b) Gegeben: $c = 8,\ \alpha = 23°,\ \gamma = 106°$

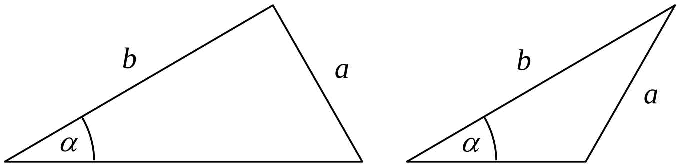
c) Gegeben: $a = 7,\ \beta = 28°,\ \gamma = 32°$

d) Gegeben: $b = 5,\ \alpha = 59°,\ \gamma = 70°$

e) Gegeben: $a = 3{,}5,\ \alpha = 20°,\ \beta = 115°$

f) Gegeben: $b = 8,\ \beta = 41°,\ \gamma = 124°$

4. In beiden skizzierten Dreiecken ist $a = 5,\ b = 8,\ \alpha = 30°$. Berechne jeweils alle fehlenden Größen mit Hilfe des Sinussatzes.



5. Skizziere die Dreiecke, prüfe jeweils ob ein oder zwei Dreiecke in Frage kommen und berechne alle fehlenden Größen. Die Bezeichnungen sind wie üblich (s. Aufgabe 3).

a) Gegeben: $a = 7,\ b = 6,\ \alpha = 56°$

b) Gegeben: $a = 6,\ b = 3,\ \alpha = 125°$

c) Gegeben: $a = 8,\ b = 5,\ \alpha = 40°$

d) Gegeben: $a = 4,\ c = 5,\ \gamma = 63°$

e) Gegeben: $a = 7,\ b = 9,\ \beta = 46°$

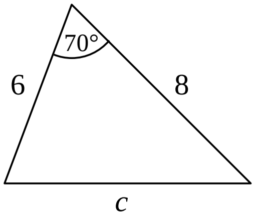
f) Gegeben: $b = 9,\ c = 10,\ \gamma = 71°$

3.2 Der Kosinussatz

Wir betrachten zunächst ein Beispiel für die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke. Dann lösen wir die Aufgabe allgemein und erhalten so den Kosinussatz. Anschließend wird dasselbe Beispiel nochmal durchgerechnet, aber mit Hilfe des Kosinussatz.

Schließlich betrachten wir noch den Fall stumpfwinkliger Dreiecke, die eine Erweiterung der Kosinustabelle für Winkel von bis zu 180° erzwingen.

Beispiel 1

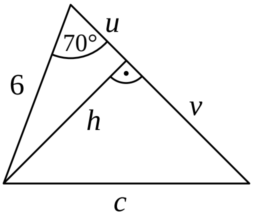


Gegeben sind die zwei Seiten 8 und 6 und der Winkel dazwischen von 70°.
Gesucht ist Gegenseite c zum 70°-Winkel.

Lösung

1. Zerlegung des Dreiecks

Zeichne die Höhe so ein, dass der gegebene Winkel nicht zerstört wird. Wir wählen die Höhe auf der Seite der Länge 8; möglich wäre auch die Höhe auf der Seite der Länge 6. Bei den rechtwinkligen Dreiecken können wir den Satz des Pythagoras und den Kosinus anwenden.



2. Berechnung der Seiten u, h des linken oberen rechtwinkligen Dreiecks:

$$\cos 70° = \frac{u}{6}$$
$$u = 6 \cdot \cos 70°$$
$$u \approx 2{,}052$$

Berechne nun h mit Hilfe des Satze von Pythagoras:

$$h^2 + u^2 = 6^2$$
$$h^2 = 36 - u^2$$
$$h = \sqrt{36 - u^2}$$
$$h \approx \sqrt{36 - 2{,}052^2}$$
$$h \approx 5{,}638$$

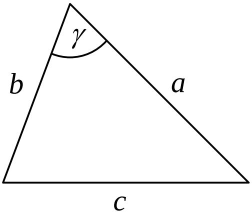
3. Berechne v und c aus dem rechten unteren rechtwinkligen Dreieck.

Da $u + v = 8$, ist $v = 8 - u \approx 5{,}948$. Der Satz von Pythagoras liefert dann:

$$c^2 = h^2 + v^2$$
$$c = \sqrt{h^2 + v^2}$$
$$c \approx \sqrt{5{,}638^2 + 5{,}948^2}$$
$$c \approx 8{,}20$$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

<u>**Allgemein** (*Buchstaben statt konkreter Zahlen*)</u>



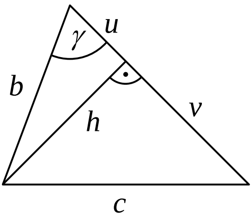
Gegeben: a, b, γ

Gesucht: c (Gegenseite zu γ)

Lösung

1. Zerlegung des Dreiecks

Zeichne die Höhe so ein, dass der gegebene Winkel nicht zerstört wird. Wir wählen die Höhe auf der Seite a; möglich wäre auch die Höhe auf b.
Bei den rechtwinkligen Dreiecken können wir den Satz des Pythagoras und den Kosinus anwenden.



2. Berechnung der Seiten u, h des linken oberen rechtwinkligen Dreiecks:

$$\cos\gamma = \frac{u}{b}$$
$$u = b \cdot \cos\gamma$$

Berechne nun h^2 mit Hilfe des Satze von Pythagoras:

$$h^2 + u^2 = b^2$$
$$h^2 = b^2 - u^2$$

3. Berechne v und c aus dem rechten unteren rechtwinkligen Dreieck.

$$v = a - u$$

Der Satz von Pythagoras liefert:

$$c^2 = h^2 + v^2$$

Setze $h^2 = b^2 - u^2$ und $v = a - u$ ein, benutze die zweite binomische Formel:

$$c^2 = h^2 + v^2$$
$$c^2 = b^2 - u^2 + (a-u)^2$$
$$c^2 = b^2 - u^2 + a^2 - 2au + u^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2au$$

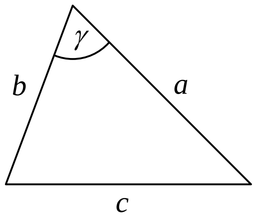
Setze $u = b \cdot \cos\gamma$ ein

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2au$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

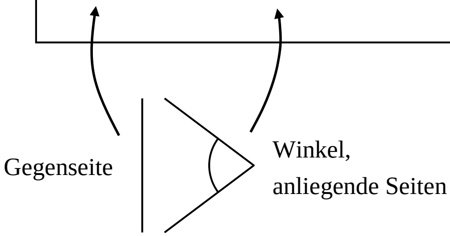
Diese Formel ist der *Kosinussatz* und wird auch *verallgemeinerter Satz von Pythagoras* genannt.

Wir fassen nun zusammen und fügen einige Erläuterungen an:

Kosinussatz



$$\boxed{c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$



Bemerkungen

1. Der Kosinussatz ähnelt dem Satz von Pythagoras. Der Unterschied liegt nur im Ausdruck

$$-2ab\cos\gamma\,.$$

2. Der Kosinussatz ähnelt auf der rechten Seite der zweiten binomischen Formel

$$(a-b)^2 \;=\; a^2+b^2-2ab\,.$$

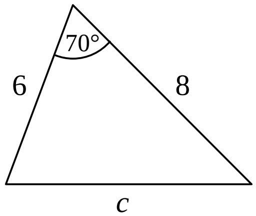
Der Unterschied liegt nur im Ausdruck $\cos\gamma$. Aus Sicht der Vektorrechnung ***ist*** der Kosinussatz eine binomische Formel.

3. Wenn $\gamma = 90°$ ist, so ist $\cos\gamma = 0$ und der Ausdruck

$-2ab\cos\gamma$ verschwindet aus dem Kosinussatz. Es ergibt sich der Satz von Pythagoras als Sonderfall.

Wir betrachten nochmal das erste Beispiel, aber wir lösen es mit Hilfe des Kosinussatzes.

Beispiel 2



Gegeben sind die zwei Seiten 8 und 6 und der Winkel dazwischen von 70°.
Gesucht ist Gegenseite c zum 70°-Winkel.

Lösung

Der Kosinussatz hat folgende Struktur:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Also:

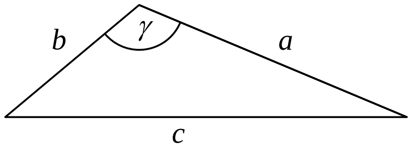
$$\begin{aligned} c^2 &= 8^2 + 6^2 - 2\cdot 8\cdot 6\cdot\cos 70° \\ c^2 &= 64 + 36 - 96\cdot\cos 70° \\ c^2 &= 100 - 96\cdot\cos 70° \\ c &= \sqrt{100 - 96\cdot\cos 70°} \\ c &\approx 8{,}1955 \end{aligned}$$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

Stumpfwinklige Dreiecke

Ein stumpfwinkliges Dreieck hat einen stumpfen Winkel (einen Winkel größer als 90°). Die zwei anderen Winkel müssen dann zwangsläufig spitz sein (d. h. kleiner als 90°), denn die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Wir betrachten als Beispiel das folgende stumpfwinklige Dreieck:



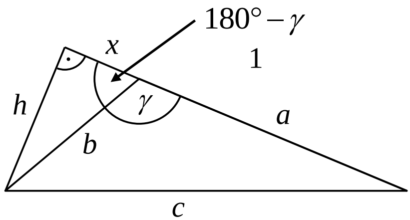
$\gamma = 115°$

Der Kosinussatz erscheint zunächst sinnlos, wenn $\gamma = 115°$ ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Was soll „$\cos 115°$“ bedeuten? Unsere Kosinustabelle bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke und umfasst nur Winkel bis 90°.
Wenn der Kosinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke gültig bleiben soll, muss man den Kosinusbegriff und die Kosinustabelle erweitern bis 180°. Aber wie?

Wir betrachten nochmal die frühere Herleitung des Kosinussatzes und zeichnen die Höhe ein:



Berechnung der Seiten x und h des linken oberen rechtwinkligen Dreiecks:

$$\cos(180° - \gamma) = \frac{x}{b}$$

$$x = b \cdot \cos(180° - \gamma)$$

Berechne nun h^2 mit Hilfe des Satze von Pythagoras:

$$h^2 + x^2 = b^2$$

$$h^2 = b^2 - x^2$$

Der Satz von Pythagoras liefert (großes Dreieck):

$$c^2 = h^2 + (x + a)^2$$

Setze $h^2 = b^2 - x^2$ ein, benutze die erste binomische Formel:

$$c^2 = h^2 + (x + a)^2$$

$$c^2 = b^2 - x^2 + x^2 + 2ax + a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$$

Setze $x = b \cdot \cos(180° - \gamma)$ ein

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(180° - \gamma)$$

Wir vergleichen die gewonnene Formel

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(180° - \gamma)$$

mit der gewünschten Form des Kosinussatzes:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Wenn beide Versionen übereinstimmen sollen, müssen wir (für stumpfe Winkel γ)

$$\cos\gamma = -\cos(180° - \gamma)$$

setzen.

In Worten bedeutet dies:

Der Kosinus eines stumpfen Winkels ist der ***negative*** Kosinus des (stets spitzen) ***Ergänzungswinkels*** zu 180°.

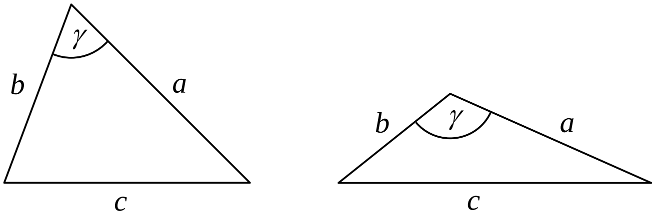
Beispiele:

$$\cos 150° = \cos(180° - 150°) = \cos 30° \approx -0{,}866$$
$$\cos 135° = \cos(180° - 135°) = \cos 45° \approx -0{,}707$$
$$\cos 120° = \cos(180° - 120°) = \cos 60° = -0{,}5$$

Mit dieser Erweiterung des Kosinus für stumpfe Winkel ist der Kosinussatz für beliebige (auch stumpfwinklige) Dreiecke gültig.

Kosinussatz:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$



Eine grobe Kosinustabelle für Winkel von 0° bis 180° sieht etwa wie folgt aus:

Kosinustabelle (0° bis 180°)

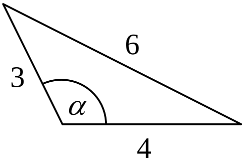
α	**cos** α	
0°	1,00	
10°	0,98	
20°	0,94	
30°	0,87	
40°	0,77	
50°	0,64	
60°	0,50	
70°	0,34	
80°	0,17	
90°	0,00	–
100°	– 0,17	
110°	– 0,34	
120°	– 0,50	
130°	– 0,64	
140°	– 0,77	
150°	– 0,87	
160°	– 0,94	
170°	– 0,98	
180°	– 1,00	

Beachte
Wenn der Kosinuswert eines Dreieckswinkels gegeben ist, kann man *eindeutig* auf den *Winkel* zurückschließen. Zu negativen Kosinuswerten gehören die stumpfen Winkel. Bei der ***Winkelberechnung*** an Dreiecken ist der ***Kosinus*** also dem Sinus vorzuziehen.

Im nächsten Beispiel werden Winkelberechnungen an einem Dreieck durchgeführt.

<u>Beispiel 3</u>

Berechne den Winkel α des nachstehenden Dreiecks:



Lösung:

Kosinussatz:

Die Seite der Länge 6 liegt dem gesuchten Winkel α gegenüber, also:

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$$

Rechne aus, löse nach $\cos\alpha$ auf und bestimme α:

$$\begin{aligned} 36 &= 9 + 16 - 24 \cdot \cos\alpha \\ 36 &= 25 - 24 \cdot \cos\alpha \\ 11 &= -24 \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha &= -\frac{11}{24} \\ \alpha &\approx 117{,}28° \end{aligned}$$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

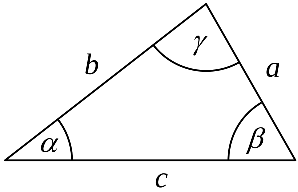
Aufgaben

1. Berechne den Kosinuswert der stumpfen Winkel durch Rückführung auf den Kosinus spitzer Winkel:
$\cos 120°, \ \cos 150°, \ \cos 135°, \ \cos 95°, \ \cos 100°, \ \cos 170°.$

2. Finde jeweils den Winkel α, der zu dem gegebenen Kosinuswert gehört. Bestimme dazu zunächst den (spitzen) Ergänzungswinkel:

$$\cos\alpha = -0{,}5, \ \cos\alpha = -0{,}8660\ldots, \ \cos\alpha = 0{,}7071\ldots,$$
$$\cos\alpha = -0{,}1736\ldots, \ \cos\alpha = -0{,}6427\ldots, \ \cos\alpha = -1.$$

3. Berechne die fehlende Seite der folgenden schiefwinkligen Dreiecke. Die Bezeichnungen sind wie üblich:



a) Gegeben: $a = 11, \ b = 9, \ \gamma = 70°$
b) Gegeben: $a = 8{,}5, \ b = 6{,}7, \ \gamma = 18°$
c) Gegeben: $b = 9, \ c = 10, \ \alpha = 27°$
d) Gegeben: $a = 3{,}6, \ c = 4, \ \beta = 124°$
e) Gegeben: $b = 8, \ c = 10, \ \alpha = 108°$
f) Gegeben: $a = 4, \ c = 3, \ \beta = 76°$

4. Berechne alle Winkel der folgenden schiefwinkligen Dreiecke. Bezeichnungen wie in Aufgabe 3.

a) Gegeben: $a = 12, \ b = 9, \ c = 15$
b) Gegeben: $a = 4, \ b = 5, \ c = 8$

c) Gegeben: $a = 15,\ b = 7,\ c = 10$
d) Gegeben: $a = 7,\ b = 9,\ c = 6$
e) Gegeben: $a = 4\ b = 7,\ c = 5$
f) Gegeben: $a = 9,\ b = 3,\ c = 10$

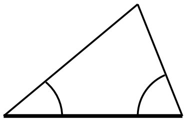
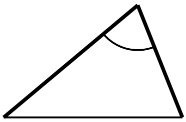
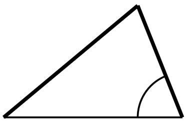
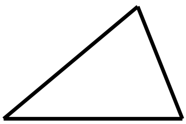
5. Berechne in Aufgabe 3 auch die fehlenden Winkel.

6. Diese Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe für Leser, die quadratische Gleichungen lösen können. Die üblichen Bezeichnungen vorausgesetzt, berechne die fehlenden Größen der schiefwinkligen Dreiecke. Benutze dabei *nur* den *Kosinussatz*.

a) Gegeben: $a = 7,\ b = 6,\ \alpha = 56°$
b) Gegeben: $a = 6,\ b = 3,\ \alpha = 125°$
c) Gegeben: $a = 8,\ b = 5,\ \alpha = 40°$

3.3 Die vier Grundprobleme der Dreiecksberechnung

Je nachdem welche Größen eines Dreiecks gegeben sind, ergeben sich verschiedene Aufgaben. In der nachstehenden Tabelle sind die vier Grundprobleme aufgelistet, geordnet nach der Anzahl der gegebenen Seiten (fett gedruckt).

Gegeben	**Skizze**	**Beschreibung**
1 Seite, 2 Winkel		WSW Winkel Seite Winkel
2 Seiten, 1 Winkel		SWS Seite Winkel Seite
2 Seiten, 1 Winkel		SSW Seite Seite Winkel
3 Seiten, 0 Winkel		SSS Seite Seite Seite

Anmerkungen

1. Die Aufgabe, bei der *keine* Seite, aber alle Winkel gegeben sind, ist nicht sinnvoll. Beispielsweise gibt es unendlich viele (verschieden große) gleichseitige Dreiecke. Obwohl alle drei Winkel gegeben sind, ist die Seitenlänge nicht berechenbar.

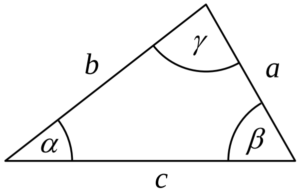
2. Ob bei einem Dreieck *zwei* oder *drei* Winkel gegeben sind, ist praktisch dasselbe. Denn der dritte Winkel ergibt sich automatisch, weil die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Bei der ersten Grundaufgabe werden daher die zwei "schönen" Winkel als gegeben betrachtet; beide liegen an der gegebenen Seite.

3. Wenn zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind , so gibt es zwei Aufgaben. Bei der einen liegt der gegebene Winkel *zwischen* den gegebenen Seiten, bei der anderen liegt er *an einer* der gegebenen Seiten.

4. Wir werden im Folgenden die vier Grundaufgaben besprechen und mit Hilfe des Sinussatzes und des Kosinussatzes lösen. Die (praktische) ebene Trigonometrie ist damit abgeschlossen: Alle Dreiecksaufgaben lassen sich rechnerisch mit Sinus- und Kosinussatz lösen.

5. Wir werden die vier Grundprobleme in allgemeiner Form behandeln. Zu Beginn wird eine zeichnerische Lösung (geometrische Konstruktion) skizziert, was auch das Verständnis für sinnvoll gestellte Probleme und die Anzahl der Lösungsdreiecke sicherstellt. Danach wird das jeweilige Problem rechnerisch gelöst. Da keine konkreten Größen vorliegen sind die Ergebnisse Formeln, die die gesuchten Größen durch gegebene oder bereits berechnete Größen ausdrücken.

Die 1. Grundaufgabe (WSW)



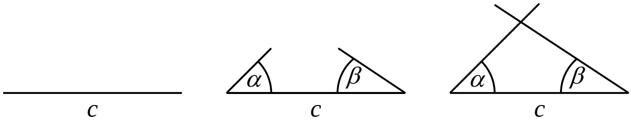
Gegeben: $c,\ \alpha,\ \beta$

Gesucht: $a,\ b,\ \gamma$

Lösung:

I. Konstruktion des gesuchten Dreiecks

II. Rechnerische Lösung



1. Berechne γ

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

2. Berechne a

Sinussatz anwenden:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

3. Berechne b

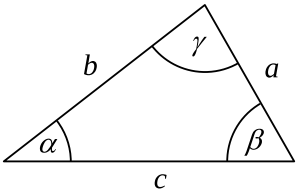
Sinussatz anwenden:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Damit ist das erste Grundproblem gelöst.

<u>Die 2. Grundaufgabe (SWS)</u>

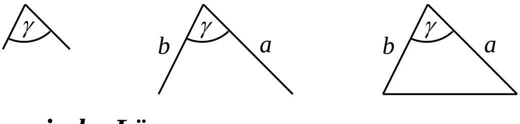


Gegeben: a, b, γ

Gesucht: c, α, β

Lösung:

I. Konstruktion des gesuchten Dreiecks



II. Rechnerische Lösung

1. Berechne c

Kosinussatz anwenden:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Nun sind alle Seiten bekannt.

2. Berechne α

Kosinussatz anwenden, nach $\cos\alpha$ auflösen:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ 2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Winkel α.

(Damit sind nun zwei Winkel bekannt.)

3. Berechne β

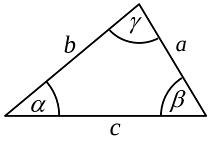
Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ - \alpha - \gamma \end{aligned}$$

Damit ist das zweite Grundproblem gelöst.

Wir lösen nun zunächst die vierte Grundaufgabe, weil die dritte etwas schwieriger ist.

<u>Die 4. Grundaufgabe (SSS)</u>

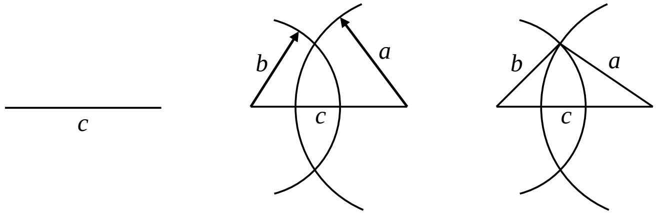


Gegeben: a, b, c

Gesucht: α, β, γ

Lösung:

I. Konstruktion des gesuchten Dreiecks
Zeichne eine Strecke der Länge c Schlage einen Kreis um jeden Streckenendpunkt, mit Radius a bzw. b.



II. Rechnerische Lösung

1. Berechne α

Kosinussatz anwenden, nach $\cos\alpha$ auflösen:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ 2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Winkel α.

2. Berechne β

Kosinussatz anwenden, nach $\cos\beta$ auflösen:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ 2ac\cos\beta &= a^2 + c^2 - b^2 \\ \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Winkel β.

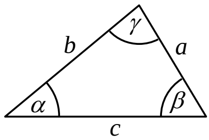
3. Berechne γ

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 180^\circ \\ \gamma &= 180^\circ-\alpha-\beta \end{aligned}$$

Damit ist das vierte Grundproblem gelöst.

Die 3. Grundaufgabe (WSS)



Gegeben: $a,\ b,\ \alpha$

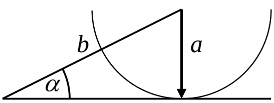
Gesucht: $c,\ \beta,\ \gamma$

Lösung:

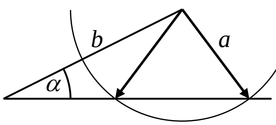
I. Konstruktion des gesuchten Dreiecks

Zeichne den Winkel α, wobei einer der Schenkel die Länge b hat. Schlage einen Kreis mit Radius a um den Endpunkt des Schenkelabschnitts b. Die Schnittpunkte des Kreises mit dem anderen Schenkel kommen als dritte Ecke des Dreiecks in Frage. Man stellt fest, dass sich zwei verschiedene Lösungsdreiecke ergeben können:

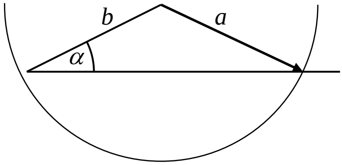
1 Dreieck



2 Dreiecke



1 Dreieck



II. Rechnerische Lösung

Vorbemerkung: Wenn α spitz ist, $a < b$ und $a > b\sin\alpha$ gibt es zwei Dreiecke als Lösung, wie man an obigen Skizzen ablesen kann. Bei einem der Dreiecke ist der Winkel β spitz, beim anderen ist β stumpf, und zwar der Ergänzungswinkel zu 180°. Dies passt zur Zweideutigkeit des Winkels bei gegebenem Sinuswert. Daher kann der Sinussatz zur Bestimmung von β benutzt werden.

1. Berechne β

Sinussatz anwenden, Kehrwert bilden, nach $\sin\beta$ auflösen:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

Aus dem Sinuswert ergeben sich zwei mögliche Winkel:

$$\beta_1 \quad \text{(spitz oder 90°)}$$
$$\beta_2 = 180° - \beta_1 \quad \text{(stumpf oder 90°)}$$

Von nun an müssen zwei Dreiecke einbezogen werden.

2. Berechne $\gamma_1,\ \gamma_2$

Die Winkelsumme in einem Dreieck ist 180°.

Also ist im ersten Dreieck:

$$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1$$

Und im zweiten Dreieck:

$$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2$$

(Nun sind alle Winkel gegeben.)

3. Berechne $c_1,\ c_2$

Sinussatz für das erste Dreieck:

$$\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha}$$

Sinussatz für das zweite Dreieck:

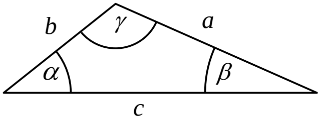
$$\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha}$$

Damit ist das dritte Grundproblem gelöst.

Wir betrachten nun zwei Beispiele zur dritten Grundaufgabe. Eines mit einem Lösungsdreieck und eines mit zwei Lösungsdreiecken.

Beispiel 1



Gegeben: $a=4,\ b=3,\ \alpha=30°$
Gesucht: $c,\ \beta,\ \gamma$

Lösung:

1. Berechne β

Sinussatz anwenden, Kehrwert bilden, nach $\sin\beta$ auflösen:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{3\sin 30°}{4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Aus dem Sinuswert ergeben sich zwei mögliche Winkel:

$$\beta_1 \approx 22{,}0243°$$

$$\beta_2 = 180° - \beta_1 \approx 180° - 22{,}0243° = 157{,}9757°$$

Der stumpfe Winkel $\beta_2 \approx 157{,}9757°$ scheidet aus, da $a=4>b=3$. Außerdem wäre schon

$$\alpha+\beta_2 \approx 30°+157{,}9757° = 187{,}9757°$$

mehr als 180° (Winkelsumme im Dreieck).

Es bleibt nur $\beta = \beta_1 \approx 22{,}0243°$.

2. Berechne γ

Die Winkelsumme in einem Dreieck ist 180°. Also:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180° \\ \gamma &= 180° - \alpha - \beta \\ \gamma &\approx 180° - 30° - 22{,}0243° \\ \gamma &\approx 127{,}9757° \end{aligned}$$

(Nun sind alle Winkel gegeben.)

3. Berechne c

Sinussatz:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sin\gamma} &= \frac{a}{\sin\alpha} \\ c &= \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \\ c &\approx \frac{3 \cdot \sin 127{,}9757°}{\sin 30°} \\ c &\approx 4{,}7296 \end{aligned}$$

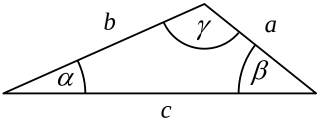
Die gesuchten Größen sind also:

$$\begin{aligned} c &\approx 4{,}7296 \\ \beta &\approx 22{,}0243° \\ \gamma &\approx 127{,}9757° \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Im ersten Beispiel ergibt sich nur ein Lösungsdreieck. Im folgenden Beispiel ergeben sich zwei Lösungsdreiecke.

Beispiel 2

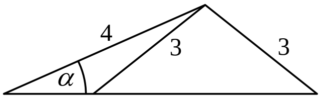


Gegeben: $a = 3,\ b = 4,\ \alpha = 30°$

Gesucht: $c,\ \beta,\ \gamma$

Lösung:

Es gibt zwei Dreiecke mit den gegebenen Größen.



1. Berechne β

Sinussatz anwenden, Kehrwert bilden, nach $\sin\beta$ auflösen:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{4\cdot\sin 30°}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$$

Aus dem Sinuswert ergeben sich zwei mögliche Winkel:

$$\beta_1 \approx 41{,}8103°$$

$$\beta_2 = 180° - \beta_1 \approx 180° - 41{,}8103° \approx 138{,}1897°$$

Von nun an müssen zwei Dreiecke einbezogen werden.

2. Berechne $\gamma_1,\ \gamma_2$

Die Winkelsumme in einem Dreieck ist 180°. Daher:

$$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 180° - 30° - 41{,}8103° = 108{,}1897°$$
$$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 180° - 30° - 138{,}1897° = 11{,}8103°$$

(Nun sind alle Winkel gegeben.)

3. Berechne $c_1,\ c_2$

Sinussatz für das erste Dreieck:

$$\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha}$$

$$c_1 = \frac{3 \cdot \sin 108{,}1897°}{\sin 30°} \approx 5{,}7002$$

Analog erhält man für das zweite Dreieck:

$$c_2 = \frac{3 \cdot \sin 11{,}8103°}{\sin 30°} \approx 1{,}2280$$

Wir fassen die verstreuten Ergebnisse zusammen:

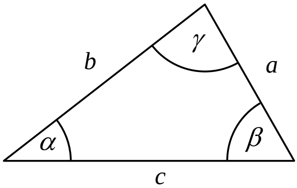
Dreieck 1: $c_1 \approx 5{,}7002,\ \beta_1 \approx 41{,}8103°,\ \gamma_1 \approx 108{,}1897°$

Dreieck 2: $c_2 \approx 1{,}2280,\ \beta_2 \approx 138{,}1897°,\ \gamma_2 \approx 11{,}8103°$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

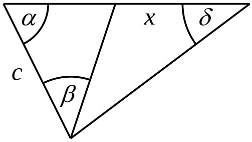
Aufgaben

1. Benutze den Sinus- und Kosinussatz zur Berechnung aller fehlenden Seiten und Winkel der schiefwinkligen Dreiecke. Die Bezeichnungen sind die üblichen:



a) $a = 4,\ \beta = 110°,\ \gamma = 40°$
b) $a = 4,\ b = 3,\ c = 5$
c) $a = 4,\ b = 3,\ \gamma = 50°$
d) $a = 4,\ b = 3,\ \alpha = 65°$
e) $c = 5,\ \beta = 55°,\ \gamma = 20°$
f) $a = 4,\ c = 5,\ \beta = 40°$
g) $a = 5,\ b = 4,\ c = 6$
h) $b = 3,\ c = 5,\ \beta = 30°$
i) $b = 3,\ c = 5,\ \alpha = 70°$
j) $b = 7,\ c = 5,\ \gamma = 40°$

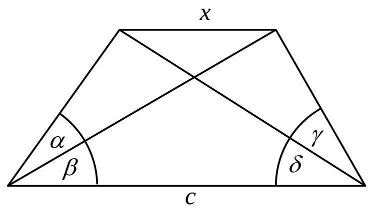
2. In der Skizze ist $\alpha = 76°,\ \beta = 41°,\ \delta = 34°,\ c = 4$. Berechne x.



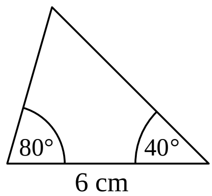
3. In der skizzierten Figur ist

$$\alpha = 22°,\ \beta = 29°,\ \gamma = 27°,\ \delta = 32°,\ c = 12\ .$$

Berechne *x*.



4. Berechne den Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks:



4. Anwendungen

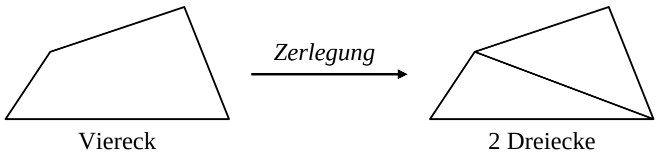
Wir betrachten folgende Themen:

* Vierecke
* Sinus und Kosinus vom halben Winkel
* Additionstheoreme für Sinus und Kosinus
* Berechnung einer Sinus- und Kosinustabelle
* Sinus und Kosinus für beliebige Winkel

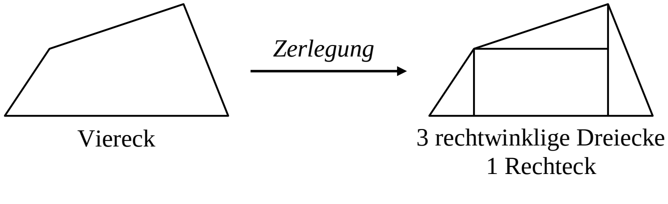
4.1 Vierecke

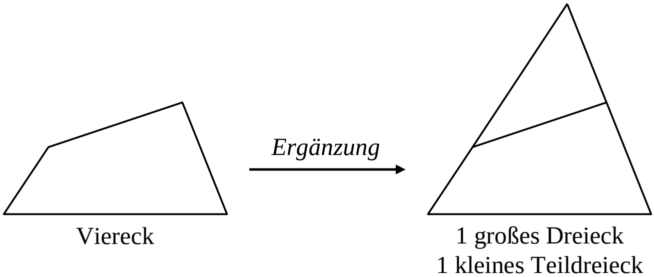
Wir berechnen in drei Beispielen die fehlenden Seiten und Winkel eines Vierecks.

Meistens führt die Zerlegung des Vierecks in zwei Dreiecke zum Ziel.



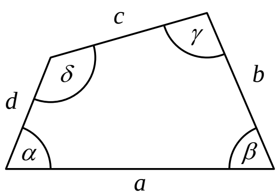
Manchmal muss man anders ansetzen. Zwei mögliche Ansätze sind die folgenden:





Übrigens zeigt die Zerlegung eines Vierecks in zwei Dreiecke, dass die Winkelsumme im Viereck 360° (zweimal 180°) beträgt.

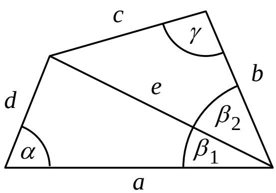
<u>Beispiel 1</u>



Gegeben: $a = 8,\ b = 6,\ d = 4,\ \alpha = 60°,\ \beta = 70°$
Gesucht: $c,\ \gamma,\ \delta$ (die oberen Winkel und die obere Seite)

Lösung:

1. Ansatz: Zerlegung in zwei Dreiecke:



2. Berechne e im linken unteren Dreieck

Der Kosinussatz liefert:

$$
\begin{aligned}
e^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \\
e^2 &= 8^2 + 4^2 - 2\cdot 8\cdot 4\cdot\cos 60^\circ \\
e^2 &= 64 + 16 - 64\cdot 0{,}5 = 48 \\
e &= \sqrt{48} \\
e &\approx 6{,}928203230
\end{aligned}
$$

3. Berechne β_1 und β_2

Der Kosinussatz liefert:

$$
\begin{aligned}
d^2 &= a^2 + e^2 - 2ae\cos\beta_1 \\
2ae\cos\beta_1 &= a^2 + e^2 - d^2 \\
\cos\beta_1 &= \frac{a^2 + e^2 - d^2}{2ae} \\
\cos\beta_1 &\approx \frac{8^2 + 48 - 4^2}{2\cdot 8\cdot 6{,}928203230} \approx 0{,}86602540
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &\approx 30{,}000.000^\circ \\
\beta_2 &= \beta - \beta_1 \approx 70^\circ - 30{,}000.000^\circ = 40^\circ
\end{aligned}
$$

4. Berechne c mit dem rechten, oberen Dreieck

Kosinussatz:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= b^2 + e^2 - 2be\cos\beta_2 \\
c^2 &\approx 6^2 + 48 - 2\cdot 6\cdot 6{,}928203230\cdot\cos 40^\circ \\
c^2 &\approx 20{,}312261 \\
c &\approx \sqrt{20{,}312261} \approx 4{,}506913
\end{aligned}
$$

5. Berechne γ mit dem rechten, oberen Dreieck

Wir wenden wieder den Kosinussatz an:

$$
\begin{aligned}
e^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \\
\cos\gamma &= \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc} \\
\cos\gamma &\approx \frac{6^2 + 4{,}506.913^2 - 48}{2 \cdot 6 \cdot 4{,}506.913} \approx 0{,}153.695 \\
\gamma &\approx 81{,}158.882^\circ
\end{aligned}
$$

6. Berechne δ

Winkelsumme im Viereck ist 360°:

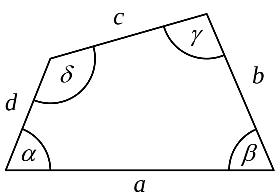
$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma + \delta &= 360^\circ \\
\delta &= 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma \\
\delta &\approx 360^\circ - 60^\circ - 70^\circ - 81{,}1589^\circ \\
\delta &\approx 148{,}8411^\circ
\end{aligned}
$$

Wir fassen die verstreuten Ergebnisse zusammen:

$$c \approx 4{,}5069,\ \gamma \approx 81{,}1589^\circ,\ \delta \approx 148{,}8411^\circ$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Beispiel 2

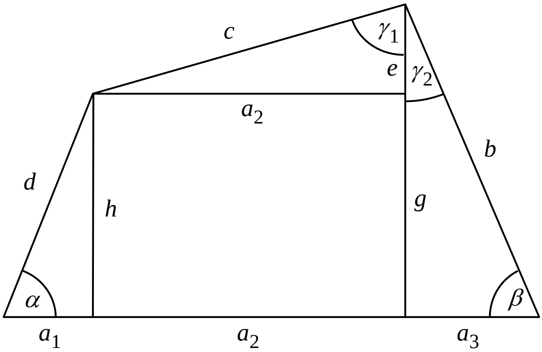


Gegeben: $b = 4,\ c = 4,\ d = 3,\ \alpha = 60^\circ,\ \beta = 70^\circ$

Gesucht: $a,\ \gamma,\ \delta$ (die oberen Winkel und die untere Seite)

Lösung:

1. Ansatz
So zerlegen, dass links, rechts und oben rechtwinklige Dreiecke entstehen:



2. Berechne a_1 und h im linken rechtwinkligen Dreieck

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{d}; \quad a_1 = d\cdot\cos\alpha = 3\cdot\cos 60° = 1,5$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}; \quad h = d\cdot\sin\alpha = 3\cdot\sin 60° \approx 2,598076$$

3. Berechne a_3, g, γ_2 im rechten rechtwinkligen Dreieck

$$\cos\beta = \frac{a_3}{b}; \quad a_3 = b\cdot\cos\beta = 4\cdot\cos 70° \approx 1,368081$$

$$\sin\beta = \frac{g}{b}; \quad g = b\cdot\sin\beta = 4\cdot\sin 70° \approx 3,758770$$

Der Winkel γ_2 ergibt sich aus der Winkelsumme von 180°:

$$\gamma_2 = 180° - 90° - \beta$$
$$\gamma_2 = 180° - 90° - 70° = 20°$$

4. Berechne a_2, e und γ_1 im oberen rechtwinkligen Dreieck

$$e = g - h \approx 3{,}758770 - 2{,}598076 = 1{,}160694$$

Der Satz von Pythagoras liefert:

$$\begin{aligned} {a_2}^2 + e^2 &= c^2 \\ {a_2}^2 &= c^2 - e^2 \\ a_2 &= \sqrt{c^2 - e^2} \\ a_2 &\approx \sqrt{4^2 - 1{,}160694^2} \approx 3{,}827896 \end{aligned}$$

Benutze den Sinus:

$$\begin{aligned} \sin\gamma_1 &= \frac{a_2}{c} \approx \frac{3{,}827896}{4} \approx 0{,}956974 \\ \gamma_1 &\approx 73{,}131646° \end{aligned}$$

5. Berechne a

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 + a_3 \\ a &\approx 1{,}5 + 3{,}827896 + 1{,}368081 \\ a &\approx 6{,}695977 \end{aligned}$$

6. Berechne γ

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma &\approx 73{,}131646° + 20° \\ \gamma &\approx 93{,}131646° \end{aligned}$$

7. Berechne δ

Winkelsumme im Viereck ist 360°:

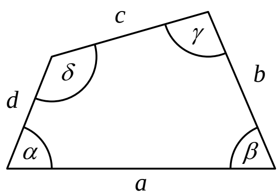
$$\begin{aligned} \delta &= 360° - \alpha - \beta - \gamma \\ \delta &\approx 360° - 60° - 70° - 93{,}131646° \\ \delta &\approx 136{,}868354° \end{aligned}$$

Wir fassen die verstreuten Ergebnisse zusammen:

$$a \approx 6{,}695977,\ \gamma \approx 93{,}131646°,\ \delta \approx 136{,}868354°$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

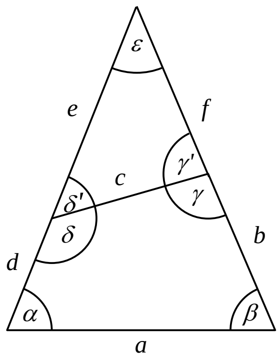
Beispiel 3



Gegeben: $a = 8,\ c = 3,\ \alpha = 60°,\ \beta = 70°,\ \delta = 125°$
Gesucht: $b,\ d,\ \gamma$ (2 gegenüberliegende Seiten, ein Winkel)

Lösung:

1. Ansatz
   Ergänze das Viereck zu einem Dreieck. Wir betrachten dieses große Dreieck und das oben *erkennbare Teildreieck*.



2. Berechne γ

Die Winkelsumme im Viereck ist 360°:

$$\gamma = 360° - \alpha - \beta - \delta$$

$$\gamma = 360° - 60° - 70° - 125°$$

$$\gamma = 105°$$

3. Berechne γ', δ', ε

$$\gamma' = 180° - \gamma = 180° - 105° = 75°$$

$$\delta' = 180° - \delta = 180° - 125° = 55°$$

Die Winkelsumme im Teildreieck ist 180°, also:

$$\varepsilon = 180° - \gamma' - \delta' = 180° - 75° - 55° = 50°$$

4. Berechne e, f im oberen Teildreieck

Wende den Sinussatz an:

$$\frac{e}{\sin \gamma'} = \frac{c}{\sin \varepsilon}$$

$$e = \frac{c \cdot \sin \gamma'}{\sin \varepsilon} = \frac{3 \cdot \sin 75°}{\sin 50°} \approx 3,782780$$

$$\frac{f}{\sin \delta'} = \frac{c}{\sin \varepsilon}$$

$$f = \frac{c \cdot \sin \delta'}{\sin \varepsilon} = \frac{3 \cdot \sin 55°}{\sin 50°} \approx 3,207981$$

5. Berechne $x = d + e$ und $y = b + f$ im Gesamtdreieck

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \varepsilon}$$

$$x = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \varepsilon} = \frac{8 \cdot \sin 70°}{\sin 50°} \approx 9,813453$$

$$\frac{y}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\varepsilon}$$

$$y = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\varepsilon} = \frac{8\cdot\sin 60°}{\sin 50°} \approx 9{,}044127$$

6. Berechne b, d

$$b = y - f \approx 9{,}044127 - 3{,}207981 = 5{,}836146$$

$$d = x - e \approx 9{,}813453 - 3{,}782780 = 6{,}030673$$

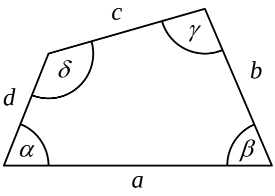
Wir fassen die verstreuten Ergebnisse zusammen:

$$b \approx 5{,}836146,\ d \approx 6{,}030673,\ \gamma = 105°$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgaben

1. Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel der Vierecke. Die Bezeichnungen sind die üblichen:



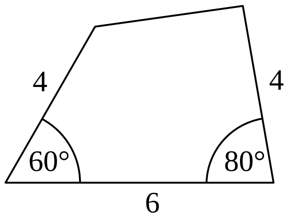
a) $a = 6,\ b = 5,\ c = 4,\ d = 3,\ \delta = 130°$
b) $a = 5,\ b = 3,\ d = 4,\ \alpha = 60°,\ \beta = 135°$
c) $a = 5,\ b = 7,\ d = 3,\ \alpha = 100°,\ \delta = 75°$
d) $a = 3,\ b = 2,\ d = 4,\ \alpha = 110°,\ \gamma = 60°$
e) $a = 3,\ d = 4,\ \alpha = 100°,\ \beta = 110°,\ \delta = 70°$

2. Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel der Vierecke. Die Bezeichnungen sind wie in Aufgabe 1.

a) $a = 6,\ b = 5,\ d = 4,\ \gamma = 50°,\ \delta = 60°$

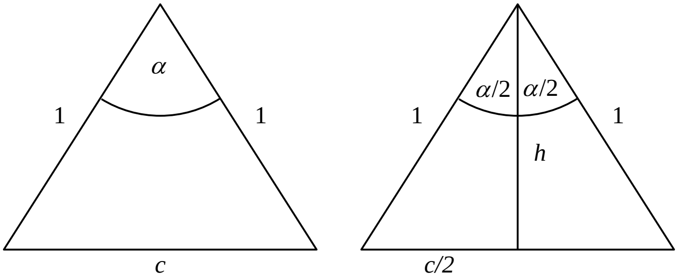
b) $a = 3,\ c = 7,\ \alpha = 140°,\ \gamma = 70°,\ \delta = 60°$

3. Berechne den Flächeninhalt A des folgenden Vierecks:



4.2 Sinus und Kosinus vom halben Winkel

Unsere Hilfsmittel wie Sinus- und Kosinussatz beziehen sich auf Dreiecke. Daher müssen wir ein Dreieck betrachten, das den gegebenen Winkel α und den halben Winkel $\alpha/2$ enthält:



Beide Dreiecke sind gleich, beim rechts stehenden ist die Höhe eingezeichnet.

Wir berechnen nun c mit Hilfe des Kosinussatzes:

$$c^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$
$$c^2 = 2 - 2\cos\alpha$$
$$c = \sqrt{2 - 2\cos\alpha}$$

Wir bestimmen h mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und des Ergebnisses für c^2:

$$h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 1^2$$
$$h^2 = 1 - \frac{c^2}{4}$$

$$h^2 = 1 - \frac{2 - 2\cos\alpha}{4}$$

$$h^2 = 1 - \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$h^2 = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

Wir bestimmen nun $\sin(\alpha/2)$:

$$\sin(\alpha/2) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{c/2}{1} = \frac{c}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - 2\cos\alpha}}{2} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos\alpha}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{2 - 2\cos\alpha}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

Wir bestimmen nun $\cos(\alpha/2)$:

$$\cos(\alpha/2) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{1} = h = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

Wir fassen zusammen:

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \text{und} \qquad \cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

<u>Beispiel</u>
Wir berechnen $\sin 15°$ und $\cos 15°$.

Nun ist 15° die Hälfte des Winkels 30°, dessen Sinus und Kosinus wir bereits mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks berechnet haben. Also:

$$\begin{aligned}
\sin(15°) &= \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} \\
&\approx \sqrt{\frac{1-0,8660254038}{2}} \\
&\approx 0,2588190451
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(15°) &= \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} \\
&\approx \sqrt{\frac{1+0,8660254038}{2}} \\
&\approx 0,9659258263
\end{aligned}$$

Anmerkung
Die Formeln für Sinus und Kosinus des halben Winkels lassen sich auch aus den Additionstheoremen herleiten.

Aufgaben

1. Berechne Sinus und Kosinus von 7,5° und 3,75°.

2. Berechne Sinus und Kosinus von 22,5° und 11,25°.

4.3 Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

Zur Berechnung der Sehnentabelle wurden bereits in der Antike Regeln benutzt, die wir heute als Additionstheoreme bezeichnen würden. Sie gestatten die Berechnung der Sehne zum Winkel $\alpha+\beta$, wenn die Sehnen von α und β bekannt sind.

Aryabhata hat diese Regeln auf den Sinus übertragen und bei der Erstellung seiner Sinustafel angewendet. Sein Vorgehen war etwa wie folgt.

Die Werte von Sinus und Kosinus für die Winkel 30°, 45°, 60° sind am halben gleichseitigen Dreieck bzw. halben Quadrat mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet worden.

Aus den Werten zu 30° können die Werte zu den jeweils halben Winkel 15°, 7,5° und 3,75° berechnet werden. Die Additionstheoreme erlauben dann die Berechnung der Sinus- und Kosinuswerte für die Winkel (3,75°-Schritte):

3,75°, 7,5°, 11,25°, 15°, 18,75°, ..., 86,25°.

In der elementaren Differentialrechnung werden die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus angewendet, um die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion zu bestimmen.

Aus der fortgeschritteneren Perspektive der komplexen Zahlen verschmelzen Sinus und Kosinus zu einer Potenz

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ die so genannte „imaginäre Einheit“ ist. Die Additionstheoreme gehen auf in dem *Potenzgesetz*:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \,.$$

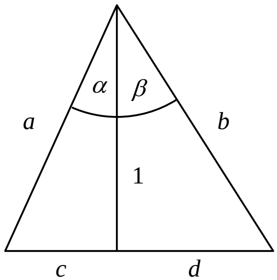
Die Additionstheoreme sind Formeln zur Berechnung von Sinus und Kosinus einer Summe zweier Winkel aus den Sinus - und Kosinuswerten der beiden Winkel. Sie lauten:

Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

Herleitung

Im Hinblick auf unsere Hilfsmittel Sinus- und Kosinussatz, die sich auf Dreiecke beziehen, ergänzen wir unsere Winkelsumme zu einem Dreieck. Wir können dies so tun, dass wir eine Höhe der Länge 1 erhalten:



1. Additionstheorem für Sinus

Sinussatz für das gesamte Dreieck:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c+d} = \frac{\sin(90°-\alpha)}{b}$$

Aus dem linken rechtwinkligen Dreieck liest man ab:

$$\sin(90°-\alpha) = \frac{1}{a}$$

Daher

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c+d} = \frac{1}{ab}$$

und somit

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{c+d}{ab}$$

Ordne und fasse algebraisch so zusammen, dass die Größen aus je einem rechtwinkligen Teildreieck beieinander stehen (a, c und b, d).

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{c}{ab} + \frac{d}{ab}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{d}{b} \cdot \frac{1}{a}$$

Jeder der rechts stehenden Brüche kann nun als Sinus oder Kosinus in einem der rechtwinkligen Teildreiecke gedeutet werden:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Damit ist das Additionstheorem für den Sinus bewiesen.

2. Additionstheorem für Kosinus

Kosinussatz für das gesamte Dreieck:

$$(c+d)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta)$$

Also

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2 + b^2 - (c+d)^2}{2ab}$$

Das Binom $(c+d)^2$ ausschreiben:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2cd - d^2}{2ab}$$

Zusammenfassen nach Zugehörigkeit zu einem Teildreieck:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2 - c^2 \;+\; b^2 - d^2 \;-\; 2cd}{2ab}$$

Nun ist nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2 - c^2 = 1$$

$$b^2 - d^2 = 1$$

und daher

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1 \;+\; 1 \;-\; 2cd}{2ab}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{2 - 2cd}{2ab}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1 - cd}{ab}$$

Nach Zugehörigkeit zu einem Teildreieck geordnet und als Sinus oder Kosinus gedeutet:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1-cd}{ab}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{ab}-\frac{cd}{ab}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}-\frac{c}{a}\cdot\frac{d}{b}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Damit ist das Additionstheorem für den Kosinus bewiesen.

Die Additionstheoreme für stumpfe Winkel

Unsere Herleitung der beiden Additionstheoreme beruht auf einem Dreieck, dessen rechtwinklige Teildreiecke die Winkel α und β enthalten; dabei wird also vorausgesetzt, dass α und β kleiner als 90° sind (spitz).

Wir betrachten nun noch den Fall, dass einer der Winkel, etwa α, größer als 90° ist. Der andere muss dann kleiner als 90° sein, da $\alpha+\beta \le 180°$.

Wir zerlegen α:

$$\alpha = 90°+\alpha'.$$

Wegen $\alpha+\beta \le 180°$ muss $\alpha'+\beta \le 90°$ sein. Auf die Winkel α', β und $\alpha'+\beta$ können die Additionstheoreme und die Definitionen von Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck benutzt werden. Daher:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\left(180°-(\alpha+\beta)\right)\\ &= \sin\left(180°-(90°+\alpha'+\beta)\right)\\ &= \sin\left(90°-(\alpha'+\beta)\right)\\ &= \cos(\alpha'+\beta)\\ &= \cos\alpha'\cdot\cos\beta-\sin\alpha'\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

Weil α stumpf ist, gilt

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(180°-\alpha) = \sin\left(180°-(90°+\alpha')\right)\\ &= \sin(90°-\alpha')\\ &= \cos\alpha'\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\cos(180°-\alpha) = -\cos\left(180°-(90°+\alpha')\right)\\ &= -\cos(90°-\alpha')\\ &= -\sin\alpha'\end{aligned}$$

Also:

$$\sin\alpha=\cos\alpha' \quad \text{und} \quad \cos\alpha=-\sin\alpha'$$

Dies eingesetzt in

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha'\cdot\cos\beta-\sin\alpha'\cdot\sin\beta$$

ergibt

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\,.$$

Das Additionstheorem für Sinus bleibt also gültig, wenn stumpfe Winkel auftreten.

Die entsprechende Herleitung des Additionstheorems für den Kosinus für stumpfe Winkel verläuft analog und wird dem Leser als Übung empfohlen.

Anmerkungen

1. Die Additionstheoreme zeigen, wie eng Sinus und Kosinus miteinander verknüpft sind.

2. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die Länge 1 hat, so sind Sinus und Kosinus nichts weiter als die Gegen- bzw. Ankathete bezüglich des betrachteten Winkels. Der Satz des Pythagoras besagt dann:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 .$$

Die Additionstheoreme und dieser trigonometrisch verkleidete Satz des Pythagoras sind die wichtigsten trigonometrischen Formeln.

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

3. Aus den gerade genannten Formeln kann man die bereits geometrisch hergeleiteten Ausdrücke für Sinus und Kosinus des halben Winkels gewinnen:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} .$$

Aufgaben

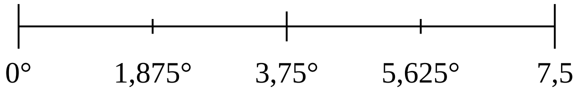
1. Es ist $\sin 1° \approx 0,0174524$.

a) Berechne $\cos 1°$ sowie Sinus und Kosinus von 2°, 3°, 4°, ..., 10°.

b) Berechne Sinus und Kosinus von 0,5°, 0,25°, 0,75°.

2.

a) Berechne Sinus und Kosinus von 1,875° (der Hälfte von 3,75°) und 5,625°.



Benutze dabei die bereits berechneten Werte:
$\sin 3,75° \approx 0,06540317$ und $\cos 3,75° \approx 0,99785891$.

b) Berechne $\sin 1°$ näherungsweise durch Interpolation (0° < 1° < 1,875°).
Berechne dann daraus $\cos 1°$.

3. Finde Formeln für Sinus und Kosinus des doppelten und vierfachen Winkels:

a) $\sin 2\alpha = ?$

b) $\cos 2\alpha = ?$

c) $\sin 4\alpha = ?$

d) $\cos 4\alpha = ?$

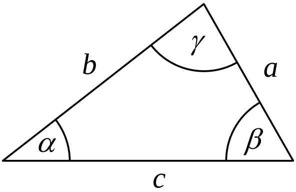
4. Leite die folgenden Formeln für den Tangens ab:

a) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

b) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

c) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

5. Leite den "Tangenssatz" in zwei Schritten aus dem



Sinussatz ab. Die Bezeichnungen sind wie in der Skizze:

a) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$ (mit Sinussatz)

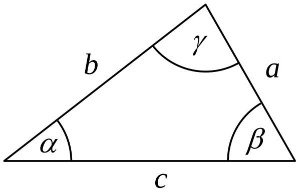
b) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$

Also:

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$ (*Tangenssatz*)

Tipps zu b): Aufgabe 4, Additionstheoreme für Sinus und Kosinus, Faktor $\cos\alpha+\cos\beta$ kann ausgeklammert und dann gekürzt werden.

6. Leite den "Halbwinkelsatz" in folgenden Schritten aus dem Kosinussatz ab:



a) $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (mit Kosinussatz)

b) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

c) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)\cdot(s-c)}{(s-a)\cdot s}}$ (*Tangenssatz*)

wobei $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ der halbe Dreiecksumfang ist.

4.4 Die Sinustafel von Aryabhata

Wir verfügen nun über die Hilfsmittel, um Aryabhatas Berechnungen bei der Erstellung seiner Sinustabelle nachzuvollziehen.

Folgende Sinus- und Kosinuswerte haben wir bereits berechnet oder sind unmittelbar aus den Definitionen (z. B. Halbsehne im Einheitskreis) klar:

α	sin α	cos α
0°	0,000 000 000	1,000 000 000
15°	0,258 819 045	0,965 925 826
30°	0,500 000 000	0,866 025 404
45°	0,707 106 781	0,707 106 781
60°	0,866 025 404	0,500 000 000
90°	1,000 000 000	0,000 000 000

Wir betrachten nun noch die Winkel, die sich durch ein- und zweimaliges Halbieren von 15° ergeben:

$$\sin 7{,}5° = \sin\frac{15°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 15°}{2}} \approx 0{,}130\ 526\ 193$$

$$\cos 7{,}5° = \cos\frac{15°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 15°}{2}} \approx 0{,}991\ 444\ 861$$

$$\sin 3{,}75° = \sin\frac{7{,}5°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 7{,}5°}{2}} \approx 0{,}065\ 403\ 131$$

$$\cos 3{,}75° = \cos\frac{7{,}5°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 7{,}5°}{2}} \approx 0{,}997\ 858\ 923$$

Nun können wir eine Tabelle mit 3,75°-Schritten mittels der

Additionstheoreme gewinnen. Wir betrachten nur ein Beispiel für eine solche Berechnung:

$$\begin{aligned}
\sin 11,25° &= \sin\left(7,5° + 3,75°\right) \\
&= \sin 7,5° \cdot \cos 3,75° \;+\; \cos 7,5° \cdot \sin 3,75° \\
&= 0,130526193 \cdot 0,997858923 \\
&\quad + 0,991444861 \cdot 0,065403131 \\
&\approx 0,195\ 090\ 324
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 11,25° &= \cos\left(7,5° + 3,75°\right) \\
&= \cos 7,5° \cdot \cos 3,75° \;-\; \sin 7,5° \cdot \sin 3,75° \\
&= 0,991444861 \cdot 0,997858923 \\
&\quad - 0,130526193 \cdot 0,065403131 \\
&\approx 0,980\ 785\ 280
\end{aligned}$$

Auf diese Weise erhält man eine Sinus- und Kosinustabelle, die wie die von Aryabhata eine Schrittweite von 3,75° hat. Sie ist auf der nächsten Seite wiedergegeben.

Wenn man die Werte der Tabelle mit den vom Taschenrechner gelieferten Werten vergleicht, so wird man kleine Abweichungen feststellen. Es handelt sich dabei um *Rundungsfehler*. Wir haben nämlich mit Hilfe gerundeter Werte als Grundlage weitere Sinus- und Kosinuswerte berechnet. Dadurch ist mit immer größeren Rundungsfehlern zu rechnen. Der Taschenrechner benutzt daher intern mehr Stellen als er anzeigt; so ist sichergestellt, dass die angezeigten Ziffern richtig sind. Wenn man mit einem (zehnstelligen) Taschenrechner $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2} - 1,4142135$ berechnet, mit 1.000.000 multipliziert und vergleicht, kann man die nicht angezeigten Ziffern sehen.

Sinus- und Kosinustabelle im Sinne von Aryabhata

α	sin α	cos α
0,00°	0,000 000 000	1,000 000 000
3,75°	0,065 403 131	0,997 858 923
7,50°	0,130 526 193	0,991 444 861
11,25°	0,195 090 324	0,980 785 280
15,00°	0,258 819 045	0,965 925 826
18,75°	0,321 439 467	0,946 930 129
22,50°	0,382 683 433	0,923 879 532
26,25°	0,442 288 692	0,896 872 740
30,00°	0,500 000 000	0,866 025 404
33,75°	0,555 570 234	0,831 469 611
37,50°	0,608 761 430	0,793 353 340
41,25°	0,659 345 817	0,751 839 806
45,00°	0,707 106 781	0,707 106 781
48,75°	0,751 839 808	0,659 345 814
52,50°	0,793 353 340	0,608 761 428
56,25°	0,831 469 613	0,555 570 230
60,00°	0,866 025 404	0,500 000 000
63,75°	0,896 872 742	0,442 288 689
67,50°	0,923 879 533	0,382 683 431
71,25°	0,946 930 130	0,321 439 463
75,00°	0,965 925 826	0,258 819 045
78,75°	0,980 785 281	0,195 090 320
82,50°	0,991 444 861	0,130 526 191
86,25°	0,997 858 923	0,065 403 127
90,00°	1,000 000 000	0,000 000 000

Interpolation

Sinus- und Kosinuswerte von Winkeln, die nicht in der Tabelle vorkommen, können in guter Näherung durch *Interpolation* berechnet werden. Wir erläutern dies an einem Beispiel.

<u>**Beispiel**</u>
Gesucht: sin 65°

Lösung:

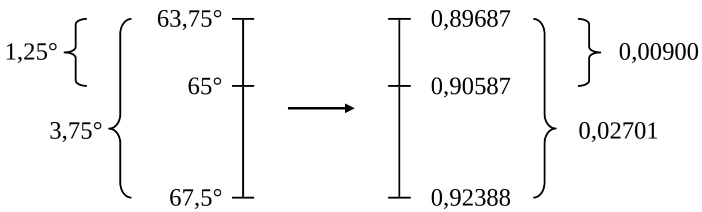
Der Winkel von 65° liegt zwischen den in der Tabelle vorkommenden Winkeln

$$63{,}75° \text{ und } 67{,}5°,$$

die einen Abstand von 3,75° voneinander haben. Die entsprechenden Sinuswerte sind (auf fünf Nachkommastellen gerundet):

$$0{,}89687 \text{ und } 0{,}92388,$$

die einen Abstand von 0,02701 voneinander haben. Der Abstand zwischen 65° und 63,75° beträgt 1,25°.
Folgende Situation liegt also vor:



Wir berechnen den Abstand zwischen den Sinuswerten von $65°$ und $63{,}75°$ (näherungsweise) mit einem Dreisatz:

Winkelabstand $3{,}75° \rightarrow$ Sinuswertabstand 0,02701

Winkelabstand $1{,}25° \rightarrow$ Sinuswertabstand x

$$x = \frac{1{,}25 \cdot 0{,}02701}{3{,}75} \approx 0{,}00900$$

Daher ist

$$\sin 65° \approx 0{,}89687 + 0{,}00900 = 0{,}90587$$

Tatsächlich ist der auf fünf Nachkommastellen gerundete Wert $\sin 65° \approx 0{,}90631$. Drei Stellen nach dem Komma stimmen nach der Rundung überein.

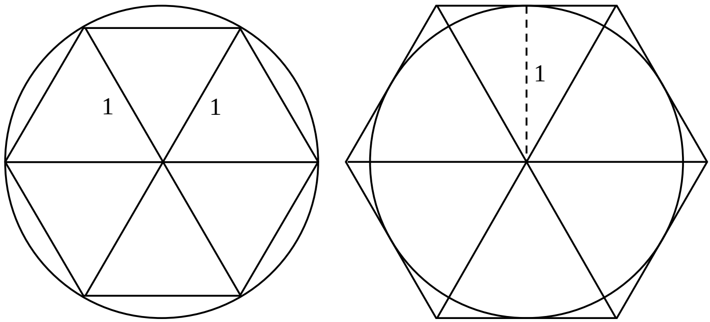
Die Interpolation kann auch benutzt werden, um Winkel näherungsweise zu berechnen, deren Sinus- oder Kosinuswert nicht in der Tabelle vorkommt.

Berechnung von π mittels der Tabelle

Als Anwendung unserer Sinus- und Kosinustabelle berechnen wir näherungsweise die Kreiszahl π.

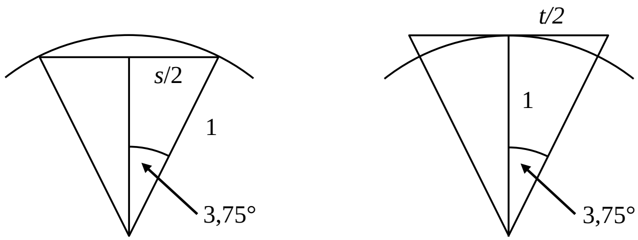
Wie Archimedes betrachten wir dazu regelmäßige Vielecke. Die Abbildung zeigt zwei regelmäßige Sechsecke.

Wir nehmen 48-Ecke - ein eingeschriebenes und ein umschriebenes, mit einem Kreis vom Radius 1.



Die folgende Skizze zeigt Teildreiecke der inneren und äußeren 48-Ecke:

Hierbei ist s die Seite des inneren 48-Ecks und t die Seite des äußeren 48-Ecks.



Wir berechnen s:

$$\begin{aligned}\sin 3{,}75^\circ &= \frac{s/2}{1} = \frac{s}{2}\\ s &= 2\cdot\sin 3{,}75^\circ\\ &\approx 2\cdot 0{,}065\ 403\ 131\\ &= 0{,}130\ 806\ 262\end{aligned}$$

Analog berechnen wir t:

$$\begin{aligned}\tan 3{,}75^\circ &= \frac{t/2}{1} = \frac{t}{2}\\ t &= 2\cdot\tan 3{,}75^\circ\\ &= 2\cdot\frac{\sin 3{,}75^\circ}{\cos 3{,}75^\circ}\\ &\approx 2\cdot\frac{0{,}065\ 403\ 131}{0{,}997\ 858\ 923}\\ &\approx 0{,}131\ 086\ 929\end{aligned}$$

Der Umfang unseres Einheitskreises (Radius $r = 1$) ist

$$U = 2\pi r = 2\pi$$

Er liegt zwischen den Umfängen der beiden 48-Ecke:

$$\begin{aligned}48s &\le 2\pi \le 48t\\ 6{,}278700576 &\le 2\pi \le 6{,}292172592\end{aligned}$$

Wir halbieren und bekommen:

$$3{,}139350288 \le \pi \le 3{,}146086296$$

Nehmen wir den Mittelwert der unteren und oberen Grenze als Näherungswert für π, so erhalten wir den aus der Schule bekannten Wert:

$$\pi \approx 3{,}14 .$$

Aufgaben

1. Berechne $\sin 1°$ näherungsweise durch Interpolation. Berechne dann daraus $\cos 1°$.

2. Berechnen Sie näherungsweise durch Interpolation von Werten aus der Sinus- und Kosinustafel:
$\sin 10°$, $\sin 20°$, $\sin 40°$.

3. Berechnen Sie den Winkel α näherungsweise durch Interpolation von Werten aus der Sinus- und Kosinustafel:

a) $\sin\alpha = 0{,}1$

b) $\sin\alpha = 0{,}2$

c) $\sin\alpha = 0{,}3$

d) $\sin\alpha = 0{,}4$

e) $\sin\alpha = 0{,}8$

f) $\sin\alpha = 0{,}9$

4.5 Sinus und Kosinus für beliebige Winkel

Unterstellt man die Gültigkeit der Additionstheoreme für beliebige Winkel, so lassen sich Sinus und Kosinus von beliebigen Winkeln definieren und berechnen.

Zur Erläuterung werden wir folgende Winkelbereiche betrachten:

* negative Winkel
* Winkel zwischen 180° bis 360°
* Winkel zwischen 360° bis 720°

Negative Winkel

Die negative Zahl $-\alpha$ ist durch die Gleichung

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

bestimmt. Hier können wir nun die Additionstheoreme anwenden:

$$\sin(\alpha + (-\alpha)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\alpha) + \cos\alpha \cdot \sin(-\alpha)$$
$$\cos(\alpha + (-\alpha)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\alpha) - \sin\alpha \cdot \sin(-\alpha)$$

Wir setzen $\sin 0° = 0$ und $\cos 0° = 1$ ein:

$$0 = \sin\alpha \cdot \cos(-\alpha) + \cos\alpha \cdot \sin(-\alpha)$$
$$1 = \cos\alpha \cdot \cos(-\alpha) - \sin\alpha \cdot \sin(-\alpha)$$

Diese beiden Gleichungen können wir nun als ein lineares Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten

$$\mathrm{x} = \cos(-\alpha) \quad \text{und} \quad y = \sin(-\alpha)$$

auffassen:

$$(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y = 0$$
$$(\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y = 1$$

Wir lösen es mit dem Additionsverfahren und entfernen zunächst x (und erhalten y) und dann y (und erhalten x):

$$(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y = 0 \qquad |\cdot\cos\alpha$$
$$(\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y = 1 \qquad |\cdot\sin\alpha$$

$$(\cos\alpha)(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)^2 y = 0$$
$$(\sin\alpha)(\cos\alpha)x - (\sin\alpha)^2 y = \sin\alpha$$

Wir ziehen die untere Gleichung von der oberen ab und erhalten:

$$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)y = -\sin\alpha$$

und wegen $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$:

$$y = -\sin\alpha$$

Analog berechnen wir nun x:

$$(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y = 0 \qquad |\cdot\sin\alpha$$
$$(\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y = 1 \qquad |\cdot\cos\alpha$$

$$(\sin\alpha)^2 x + (\sin\alpha)(\cos\alpha)\,y = 0$$
$$(\cos\alpha)^2 x - (\cos\alpha)(\sin\alpha)\,y = \cos\alpha$$

Wir addieren nun beide Gleichungen und erhalten:

$$\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) x = \cos\alpha$$

und wegen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$x = \cos\alpha$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}}$$

Winkel zwischen 180° bis 360°

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= \sin 180^\circ \cdot \cos\alpha + \cos 180^\circ \cdot \sin\alpha \\ &= 0 \cdot \cos\alpha - 1 \cdot \sin\alpha \\ &= -\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ + \alpha) &= \cos 180^\circ \cdot \cos\alpha - \sin 180^\circ \cdot \sin\alpha \\ &= -1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha \\ &= -\cos\alpha \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen folgt:

$$
\begin{aligned}
\sin(360°) &= \sin(180° + 180°) = -\sin 180° \\
&= -\sin(180° - 180°) = 0 \\
\cos(360°) &= \cos(180° + 180°) = -\cos 180° \\
&= -(-\cos(180° - 180°)) = -(-1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Winkel zwischen 360° bis 720°

$$
\begin{aligned}
\sin(360° + \alpha) &= \sin 360° \cdot \cos\alpha \; + \; \cos 360° \cdot \sin\alpha \\
&= 0 \cdot \cos\alpha \; + \; 1 \cdot \sin\alpha \\
&= \sin\alpha \\
\cos(360° + \alpha) &= \cos 360° \cdot \cos\alpha \; - \; \sin 360° \cdot \sin\alpha \\
&= 1 \cdot \cos\alpha \; - \; 0 \cdot \sin\alpha \\
&= \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Ab 360° wiederholen sich also die Werte aus dem Bereich von 0° bis 360°. Man sagt, dass Sinus und Kosinus *periodisch* sind mit der *Periode* 360°.

Aufgaben

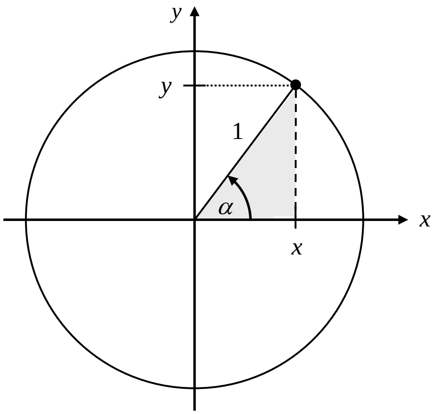
1. Berechne vor allem mit Hilfe der Additionstheoreme und der Sinus- und Kosinustafel:

$\sin(-7{,}5°)$, $\sin 210°$, $\cos(-240°)$, $\sin 750°$, $\cos 547{,}5°$, $\cos(-225°)$, $\cos 195°$, $\cos(-3{,}75°)$.

4.6 Eulers Definition von Sinus und Kosinus

Leonhard Euler (1707-1783) hat die komplizierte Situation bei der Definition von Sinus und Kosinus für die verschiedenen Winkelbereiche zu einer kurzen und anschaulichen Definition zusammengefasst.

Wir betrachten einen Kreis mit einem Radius der Länge 1 und dem Mittelpunkt im Ursprung eines Koordinatensystems. Winkel werden mittels der x-Achse und eines Radiusstrahles dargestellt:



$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= y\\ \cos\alpha &= x\end{aligned}}$$

Diese allgemeinen Definitionen beruhen auf den Definitionen am rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{x}{1} = x$$

Die Definitionen können wie folgt beschrieben werden:

1. Wenn der gegebene Winkel α positiv ist, wird der Radiusstrahl von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn so weit gedreht, wie α angibt. Wenn α negativ ist, wird der Strahl im Uhrzeigersinn gedreht.
2. Die Koordinaten x und y des Endpunktes liefern dann den zugehörigen Kosinus- bzw. Sinuswert:

$$\cos\alpha = x$$

$$\sin\alpha = y$$

Übrigens können wir nun auch den Tangens auf naheliegende Weise verallgemeinern:

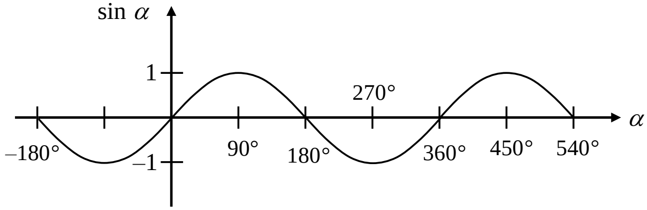
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \text{oder} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

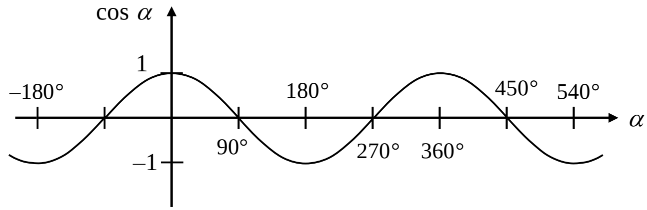
Da die Nenner nicht Null sein dürfen, müssen beim Tangens alle Winkel ausgeschlossen werden, bei denen der Kosinus (d. h. x) Null ist. Wie man am Einheitskreis leicht ablesen kann, sind die auszuschließenden Winkel:

$$90°,$$
$$90° + \text{Vielfache von } 180°,$$
$$90° - \text{Vielfache von } 180°.$$

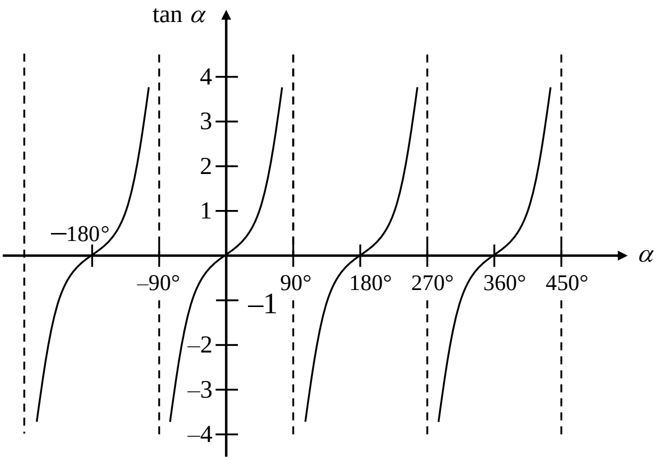
Nachdem wir nun Sinus und Kosinus für alle reellen Winkel definiert haben, können wir die Werte graphisch darstellen und die schöne wellenförmige Sinus- und Kosinuskurve bewundern. Die Tangenskurve ist weniger übersichtlich und besteht aus unendlich vielen getrennten Stücken:

Sinus- und Kosinuskurve





Tangenskurve



5. Sinus und Kosinus für kleine Winkel

Wir betrachten folgende Themen:

* Winkel im Bogenmaß
* Sinus für kleine Winkel
* Kosinus für kleine Winkel
* Sinus- und Kosinustafel mit einer Schrittweite von 1°

Das Hauptergebnis dieses Kapitels sind folgende Näherungsformeln für Sinus und Kosinus von kleinen Winkeln:

$$\sin\alpha \approx \alpha \qquad \text{(Abweichung} < 0{,}54\alpha^3\text{)}$$

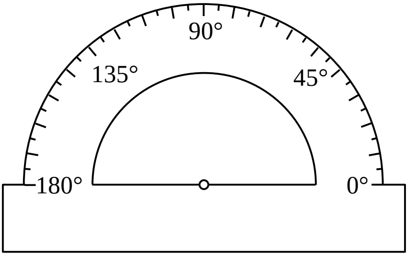
$$\cos\alpha \approx 1-\frac{\alpha^2}{2} \qquad \text{(Abweichung} < 0{,}54\alpha^4\text{)}$$

Hierbei ist der Winkel α im Bogenmaß gemeint (360° entsprechen im Bogenmaß 2π). Die Faktoren 0,54 gelten für Winkel bis zu 30° (im Bogenmaß $\pi/6$).

Wir benutzen die Näherungsformeln, um (wie der Inder Bhaskara II um 1150 n. Chr.) eine Sinus- und Kosinustafel mit einer Schrittlänge von 1° zu berechnen.

5.1 Winkel im Bogenmaß

Betrachtet man einen Winkelmesser, so stellt man fest, dass die Winkelgröße nichts anderes als die Länge des zugehörigen Kreisbogens ist; allerdings wird die Länge in Graden gemessen. (90° entsprechen einem rechten Winkel, einem Viertel des Kreisumfanges.)



Es ist viel natürlicher (weniger willkürlich), die Größe eines Winkels direkt durch die Länge des zugehörigen Kreisbogens anzugeben, wobei ein Kreis vom Radius $r = 1$ (Einheitskreis) zugrunde gelegt wird.

Der Winkel α im Bogenmaß:

$$\boxed{\alpha = \text{Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis}}$$

Beispiele 1

$360° = 2\pi$ (Kreisumfang: $U = 2\pi r = 2\pi$, wegen $r = 1$)

$180° = \pi$

$90° = \frac{\pi}{2}$

$60° = \frac{\pi}{3}$ (ein Drittel von 180°)

$45° = \frac{\pi}{4}$ (die Hälfte von 90°)

$30° = \frac{\pi}{6}$ (ein Sechstel von 180°)

und schließlich:

$$1° = \frac{\pi}{180}$$

Beispiel 2

Wir rechnen $\alpha = 40°$ in Bogenmaß um. Ein einfacher Dreisatz liefert das Ergebnis:

$$\begin{aligned} 180° &= \pi \\ 1° &= \frac{\pi}{180} \\ 40° &= \frac{\pi \cdot 40}{180} \approx \frac{3{,}14 \cdot 40}{180} \approx 0{,}698 \end{aligned}$$

Beispiel 3

Wir rechnen $\alpha = 0{,}2$ in Grad um. Ein einfacher Dreisatz führt wieder zum Ziel:

$$\begin{aligned} \pi &= 180° \\ 1 &= \frac{180°}{\pi} \\ 0{,}2 &= \frac{180° \cdot 0{,}2}{\pi} \approx \frac{180° \cdot 0{,}2}{3{,}14} \approx 11{,}5° \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Rechne die folgenden Winkel ins Bogenmaß um:

5°, 8°, 12°, 20°, 40°, 52°, 75°, 80°, 100°, 0,3°.

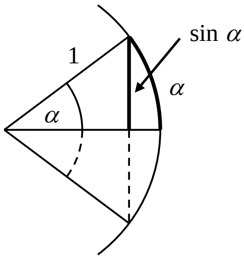
2. Die folgenden Winkel sind im Bogenmaß gegeben.
Berechne die Winkel in Grad:

0,1 , 0,25 , 0,5 , 1/3 , 1.

5.2 Sinus für kleine Winkel

1. Eine Näherungsformel für Sinus

In der Skizze beträgt die Sehnenlänge $2\sin\alpha$ und die Länge des zugehörigen Bogens ist 2α.



Die Sehne ist als gerade Verbindung der Endpunkte stets kürzer als der zugehörige Kreisbogen, d. h. $2\sin\alpha \le 2\alpha$, also:

$$\sin\alpha \le \alpha$$

Wenn α klein ist, so sind die Sehne und der Bogen etwa gleich lang. Daher gilt in guter Näherung $2\sin\alpha \approx 2\alpha$, somit:

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

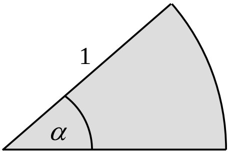
Beispielsweise erhält man für $\alpha = 3{,}75°$:

$$\sin\alpha \approx \alpha = \frac{\pi \cdot 3{,}75°}{180°} \approx \frac{3{,}14 \cdot 3{,}75°}{180°} \approx 0{,}06542$$

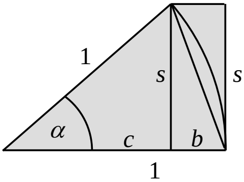
(Der genauere Wert aus unserer Tabelle ist $\sin 3{,}75° \approx$ 0,065403...)

2. Eine Fehlerabschätzung bei der Näherung für Sinus

Wir haben gesehen, dass der Sinus eines Winkels (Bogens) kleiner als der Winkel (Bogen) ist. Nun suchen wir gewissermaßen etwas, das größer als der Bogen ist. Dazu betrachten wir die folgenden zwei Flächen:



Fläche 1



Fläche 2

Die Fläche 2 ist offenbar größer als Fläche 1. Wir berechnen beide Flächen und erhalten daraus die gewünschte Ungleichung.

Fläche 1:

Es handelt sich um einen Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel α. Der Vollkreis ist ein Sektor mit dem Mittelpunktswinkel 2π (im Bogenmaß). Ein einfacher Dreisatz zeigt dann, dass die Fläche 1 den Inhalt

$$A_1 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2}$$

Fläche 2:

Diese Fläche kann in folgende zwei Teile zerlegt werden:

1. Das linke Dreieck mit der Grundseite 1 und der Höhe $s = \sin\alpha$.

2. Das rechte obere rechtwinklige Dreieck mit der Grund

seite $b = 1-c = 1-\cos\alpha$ und der Höhe $s = \sin\alpha$.

Der gesamte Flächeninhalt beträgt also:

$$A_2 = \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{(1-\cos\alpha)\cdot\sin\alpha}{2}$$

Aus $A_1 \le A_2$ folgt nun:

$$\frac{\alpha}{2} \le \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{(1-\cos\alpha)\cdot\sin\alpha}{2}.$$

Nach Multiplikation mit 2 bekommt man die Ungleichung:

$$\alpha \le \sin\alpha + (1-\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1-\cos\alpha &= \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)} \\ &= \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} \end{aligned}$$

Dies eingesetzt, erhält man:

$$\alpha \le \sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Wir ziehen nun $\sin\alpha$ auf beiden Seiten ab und bekommen die Ungleichung:

$$0 \le \alpha - \sin\alpha \le \frac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Wir beschränken uns auf Winkel α von 0° bis 30°. Dann ersetzen wir $\cos\alpha$ durch den kleineren Wert $\cos 30°$. Schließlich ersetzen wir $\sin\alpha$ in der Potenz $\sin^3\alpha$ durch den größeren Wert α und erhalten:

$$\frac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha} \le \frac{\alpha^3}{1+\cos 30°} \le 0{,}54\alpha^3.$$

Also ist die Abweichung bei der Näherung

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

gegeben durch

$$0 \le \alpha - \sin\alpha \le 0.54\alpha^3.$$

Beispiel
Näherungswert für $\sin 1°$.

$\alpha = 1°$ ist im Bogenmaß $\alpha = \dfrac{\pi}{180} \approx \dfrac{3{,}14}{180} \approx 0{,}0174$.

Bei der Näherung

$$\sin 1° \approx \sin 0{,}0174 \approx 0{,}0174$$

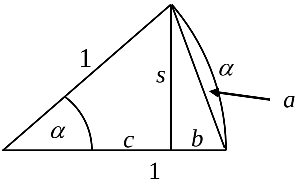
sind die angegebenen Ziffern richtig, denn die Abweichung ist höchstens

$$0{,}54 \cdot 0{,}0174^3 \approx 0{,}000\,003.$$

5.3 Kosinus für kleine Winkel

1. Eine Näherungsformel für Kosinus

Wir betrachten die folgende Skizze:



Hierbei ist $s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$ und $b = 1 - \cos\alpha$.

Die Sehne a ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} a^2 &= s^2 + b^2 \\ &= \sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha)^2 \\ &= \sin^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha \\ &= 2 - 2\cos\alpha \end{aligned}$$

Wir lösen nach $\cos\alpha$ auf:

$$\begin{aligned} a^2 &= 2 - 2\cos\alpha \\ 2\cos\alpha &= 2 - a^2 \\ \cos\alpha &= 1 - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Die Sehne a ist kleiner als der Bogen α. Für kleine Werte von α sind beide annähernd gleich. Daher:

$$\cos\alpha \approx 1-\frac{\alpha^2}{2}$$

$$\cos\alpha \geq 1-\frac{\alpha^2}{2}$$

2. Eine Fehlerabschätzung bei der Näherung für Kosinus

Wir benutzen wieder die oben aufgestellte Beziehung

$$1-\cos\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

und betrachten die Abweichung:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha-\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) &= \frac{\alpha^2}{2}-\left(1-\cos\alpha\right)\\
&= \frac{\alpha^2}{2}-\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}\\
&\leq \frac{\alpha^2}{2}-\frac{\sin^2\alpha}{2}\\
&= 0,5\left(\alpha+\sin\alpha\right)\cdot\left(\alpha-\sin\alpha\right)\\
&= 0,5\left(\alpha+\sin\alpha\right)\cdot\left(\alpha-\sin\alpha\right)\\
&\leq 0,5\left(\alpha+\alpha\right)\cdot 0,54\alpha^3\\
&\leq 0,54\alpha^4
\end{aligned}$$

Also ist die Abweichung bei der Näherung

$$\cos\alpha \approx 1-\frac{\alpha^2}{2}$$

gegeben durch

$$0 \le \cos\alpha - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \le 0{,}54\alpha^4 .$$

Diese Abschätzung gilt für Winkel α von $0°$ bis $30°$.

Beispiel
Näherungswert für $\cos 1°$.

$\alpha = 1°$ ist im Bogenmaß $\alpha = \frac{\pi}{180} \approx \frac{3{,}14}{180} \approx 0{,}0174$.

Bei der Näherung

$$\cos 1° \approx \cos 0{,}0174 \approx 1 - \frac{0{,}0174^2}{2} \approx 0{,}9998$$

sind die angegebenen Ziffern richtig, denn die Abweichung ist höchstens

$$0{,}54 \cdot 0{,}0174^4 \approx 0{,}000\,000\,092 .$$

5.4 Sinus- und Kosinustafel mit 1°-Schritten

Wir benutzen die früher berechnete Tafel mit einer Schrittlänge von 3,75°, um mit Hilfe der Additionstheoreme eine Tafel der Schrittlänge 1° zu bekommen.

Dazu berechnen wir zuerst Sinus und Kosinus von 0,25°, dann mithilfe der Additionstheoreme Sinus und Kosinus der Winkel 0,5°, 0,75°, 1°, 2° und 3°. Schließlich kann man mit diesen Werten die gewünschte Tabelle erstellen.

Wir werden im Folgenden mit sieben Nachkommastellen rechnen.

sin 0,25° und cos 0,25°

Wir nehmen den Näherungswert $\pi \approx 3{,}1416.$ Dann ist:

$$0{,}25^\circ = \frac{0{,}25^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \approx \frac{0{,}25^\circ \cdot 3{,}1416}{180^\circ} \approx 0{,}004\,363\,3,$$

wobei die angegebenen sieben Nachkommastellen zutreffen, weil die Abweichung bei den Näherungen höchstens 0,000 000 04 beträgt.

Der Sinus kleiner Winkel ist ungefähr diesem Winkel (im Bogenmaß) gleich:

$$\sin 0{,}25^\circ \approx 0{,}004\,363\,3.$$

Die Abweichung bei dieser Näherung ist höchstens:

$$0{,}54 \cdot \left(0{,}004\,363\,3\right)^3 \approx 0{,}000\,000\,045.$$

Die sieben angegebenen Nachkommastellen sind also gesichert.

Die Näherungsformel

$$\cos\alpha \approx 1-\frac{\alpha^2}{2}$$

liefert

$$\cos 0{,}25^\circ \approx 1-\frac{0{,}0043633^2}{2} \approx 0{,}999\,990\,5,$$

wobei die sieben Nachkommastellen gesichert sind, denn die Abweichung ist höchstens

$$0{,}54\cdot\left(0{,}004\,363\,3\right)^4 \approx 0{,}000\,000\,000\,2.$$

Wir fassen zusammen:

$$\sin 0{,}25^\circ \approx 0{,}004\,363\,3,$$
$$\cos 0{,}25^\circ \approx 0{,}999\,990\,5.$$

Sinus und Kosinus von 0,5°, 0,75°, 1°, 2°, 3° und 4°

Wir benutzen die Additionstheoreme:

$$\sin\left(\alpha+\beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos\left(\alpha+\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

und die Sonderfälle gleicher Winkel:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Also:

$$\begin{aligned} \sin 0,5° &= \sin(2 \cdot 0,25°) \\ &= 2\sin 0,25° \cos 0,25° \\ &\approx 2 \cdot 0,0043633 \cdot 0,9999905 \\ &\approx 0,0087265 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 0,5° &= \cos(2 \cdot 0,25°) \\ &= \cos^2 0,25° - \sin^2 0,25° \\ &\approx 0,9999905^2 - 0,0043633^2 \\ &\approx 0,9999620 \end{aligned}$$

Analog erhält man nacheinander Sinus und Kosinus der Winkel:

$$\begin{aligned} 0,75° &= 0,5° + 0,25°, \\ 1° &= 0,5° + 0,5°, \\ 2° &= 1° + 1°, \\ 3° &= 2° + 1°, \\ 4° &= 3,75° + 0,25°. \end{aligned}$$

Sinus und Kosinus von 1°, 2°, 3°, ... , 45°

Die Werte für 8° = 7,5°+0,5° und 12° = 11,25°+0,75° lassen sich aus der früheren Tafel berechnen. Die fehlenden Zwischenwerte können durch Addition von jeweils 1° gewonnen werden. Liegen nun Sinus und Kosinus der ganzzahligen Winkel von 1° bis 15° vor, erhält man die entsprechenden Werte für die Bereiche von 16° bis 30° (durch Addition von 15°) und von 31° bis 45° (Addition von 30°).

Sinus und Kosinus 46°, 47°, ... , 90°

Diese Werte ergeben sich direkt aus den bereits berechneten Werten für 1°,2°, ... , 45°:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos\left(90^\circ - \alpha\right) \\ \cos\alpha &= \sin\left(90^\circ - \alpha\right) \end{aligned}$$

für $\alpha = 46°, 47°, \ldots, 90°$.

So erhalten wir die folgende Sinus- und Kosinustafel, die wie die Tabelle des Inders Bhaskara II. (1114-1185) eine Schrittweite von 1° besitzt. Die Sinus- und Kosinuswerte sind mit sieben Nachkommastellen angegeben. Die letzte Nachkommastelle kann durch die durchgeführten Rundungen vom wirklichen Wert abweichen.

Sinus- und Kosinustafel

Winkel	Sinus	Kosinus
0°	0,0000000	1,0000000
1°	0,0174523	0,9998478
2°	0,0348993	0,9993910
3°	0,0523357	0,9986298
4°	0,0697564	0,9975640
5°	0,0871556	0,9961948
6°	0,1045282	0,9945221
7°	0,1218690	0,9925465
8°	0,1391731	0,9902682
9°	0,1564344	0,9876886
10°	0,1736480	0,9848081
11°	0,1908087	0,9816277
12°	0,2079117	0,9781477
13°	0,2249510	0,9743703
14°	0,2419218	0,9702961
15°	0,2588190	0,9659258
16°	0,2756372	0,9612618
17°	0,2923715	0,9563049
18°	0,3090168	0,9510568
19°	0,3255680	0,9455185
20°	0,3420200	0,9396927
21°	0,3583677	0,9335807
22°	0,3746063	0,9271843
23°	0,3907311	0,9205050
24°	0,4067366	0,9135457
25°	0,4226181	0,9063082
26°	0,4383709	0,8987946
27°	0,4539905	0,8910066
28°	0,4694715	0,8829478
29°	0,4848096	0,8746201
30°	0,5000000	0,8660254

Sinus- und Kosinustafel

Winkel	Sinus	Kosinus
30°	0,5000000	0,8660254
31°	0,5150380	0,8571674
32°	0,5299192	0,8480483
33°	0,5446389	0,8386709
34°	0,5591928	0,8290376
35°	0,5735764	0,8191522
36°	0,5877851	0,8090173
37°	0,6018149	0,7986360
38°	0,6156615	0,7880109
39°	0,6293205	0,7771462
40°	0,6427876	0,7660448
41°	0,6560590	0,7547102
42°	0,6691307	0,7431449
43°	0,6819984	0,7313539
44°	0,6946585	0,7193402
45°	0,7071068	0,7071068
46°	0,7193402	0,6946585
47°	0,7313539	0,6819984
48°	0,7431449	0,6691307
49°	0,7547102	0,6560590
50°	0,7660448	0,6427876
51°	0,7771462	0,6293205
52°	0,7880109	0,6156615
53°	0,7986360	0,6018149
54°	0,8090173	0,5877851
55°	0,8191522	0,5735764
56°	0,8290376	0,5591928
57°	0,8386709	0,5446389
58°	0,8480483	0,5299192
59°	0,8571674	0,5150380
60°	0,8660254	0,5000000

Sinus- und Kosinustafel

Winkel	Sinus	Kosinus
60°	0,8660254	0,5000000
61°	0,8746201	0,4848096
62°	0,8829478	0,4694715
63°	0,8910066	0,4539905
64°	0,8987946	0,4383709
65°	0,9063082	0,4226181
66°	0,9135457	0,4067366
67°	0,9205050	0,3907311
68°	0,9271843	0,3746063
69°	0,9335807	0,3583677
70°	0,9396927	0,3420200
71°	0,9455185	0,3255680
72°	0,9510568	0,3090168
73°	0,9563049	0,2923715
74°	0,9612618	0,2756372
75°	0,9659258	0,2588190
76°	0,9702961	0,2419218
77°	0,9743703	0,2249510
78°	0,9781477	0,2079117
79°	0,9816277	0,1908087
80°	0,9848081	0,1736480
81°	0,9876886	0,1564344
82°	0,9902682	0,1391731
83°	0,9925465	0,1218690
84°	0,9945221	0,1045282
85°	0,9961948	0,0871556
86°	0,9975640	0,0697564
87°	0,9986298	0,0523357
88°	0,9993910	0,0348993
89°	0,9998478	0,0174523
90°	1,0000000	0,0000000

6. Formeln für Sinus und Kosinus

Wir betrachten folgende Themen:

* Verbesserte Näherungsformeln für sin und cos
* Exakte Formeln für sin und cos
* Abweichung beim Abbruch der Reihen
* Berechnung von π auf acht Nachkommastellen

6.1 Bessere Näherungsformeln für sin und cos

Die Näherungsformeln

$$\sin\alpha \approx \alpha \qquad \text{(Abweichung höchstens: } 0{,}54\alpha^3\text{)}$$

$$\cos\alpha \approx 1-\frac{\alpha^2}{2} \qquad \text{(Abweichung höchstens: } 0{,}54\alpha^4\text{)}$$

werden bei kleiner werdenden Winkeln immer genauer. Halbiert man den Winkel α, so beträgt die Abweichung nur noch höchstens ein Achtel bzw. ein Sechzehntel der Abweichung:

$$0{,}54\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = 0{,}54\frac{\alpha^3}{2^3} = \frac{1}{8}\cdot 0{,}54\alpha^3$$

$$0{,}54\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 = 0{,}54\frac{\alpha^4}{2^4} = \frac{1}{16}\cdot 0{,}54\alpha^4$$

Diese Einsichten führen uns zu einer Verbesserung der Näherungsformeln. Man kann den Winkel in zwei Hälften zerlegen, die Additionstheoreme benutzen und dann die Näherungsformeln auf den halben Winkel anwenden:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \\
&\approx 2\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) \\
&= \alpha\cdot\left(1-\frac{\alpha^2}{8}\right) \\
&= \alpha-\frac{\alpha^3}{8}
\end{aligned}$$

Für den Kosinus benutzen wir das Additionstheorem, ersetzen aber Sinus durch Kosinus, da dies einfach möglich ist und die Näherungsformel für Kosinus genauer ist:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \\
&= \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(1-\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \ 2 \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 - 1$$

$$\approx \ 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right)^2 - 1$$

$$= \ 2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{8} \right)^2 - 1$$

$$= \ 2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{64} \right) - 1$$

$$= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{32}$$

Zusammenfassend ergeben sich die verbesserten Näherungsformeln:

$$\sin \alpha \ \approx \ \alpha - \frac{\alpha^3}{8}$$

$$\cos \alpha \ \approx \ 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{32}$$

Man kann die Verbesserungsprozedur wiederholen, aber nun die neuen Näherungsformeln anwenden. So ergeben sich noch genauere Näherungsformeln:

$$\sin \alpha \ = \ \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \ 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\approx\ 2\cdot\left((\alpha/2)-\frac{(\alpha/2)^3}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{(\alpha/2)^2}{2}+\frac{(\alpha/2)^4}{32}\right)$$

$$\ldots$$

$$=\ \alpha\ -\ \frac{5}{32}\alpha^3\ +\ \frac{3}{512}\alpha^5\ -\ \frac{1}{16384}\alpha^7$$

Für den Kosinus erhält man analog:

$$\cos\alpha\ =\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\ 2\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-1$$

$$\approx\ 2\cdot\left(1-\frac{(\alpha/2)^2}{2}+\frac{(\alpha/2)^4}{32}\right)^2-1$$

$$\ldots$$

$$=1\ -\ \frac{1}{2}\alpha^2\ +\ \frac{5}{128}\alpha^4\ -\ \frac{1}{1024}\alpha^6\ +\ \frac{1}{131072}\alpha^8$$

Die Näherungsformeln für Sinus enthalten lediglich ungerade Potenzen des Winkels (α, α^3, α^5, α^7, ...) und die Näherungsformeln für Kosinus nur gerade Potenzen (α^0, α^2, α^4, α^6, α^8, ...).

Setzt man das Verbesserungsverfahren fort, so wird man „schließlich“ exakte Formeln der Gestalt

$$\sin\alpha = \alpha + c_3\alpha^3 + c_5\alpha^5 + c_7\alpha^7 + \ldots$$

$$\cos\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + c_4\alpha^4 + c_6\alpha^6 + \ldots$$

erhalten. Den Wert der Koeffizienten c_3, c_4, c_5, ... werden wir im nächsten Abschnitt mit Hilfe der Additionstheoreme berechnen.

6.2 Exakte Formeln für sin und cos

Wir benötigen die ersten zwei Terme der allgemeinen ***binomischen Formel***:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{ höhere Potenzen von } b$$

Zum Verständnis betrachten wir den Übergang vom Term $(a+b)^2$ zu $(a+b)^3$ und von $(a+b)^3$ zu $(a+b)^4$:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) \\ &= \left(a^2+2ab+b^2\right)\cdot(a+b) \\ &= a^3+2a^2b+ab^2 \\ &\qquad + \ a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3 \cdot (a+b) \\ &= \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)\cdot(a+b) \\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+\ a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ &=\ a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die höchste Potenz ohne Koeffizient bleibt. Ferner erhöht sich der Koeffizient des zweiten Terms bei jedem Schritt um 1, er bleibt daher stets dem Exponenten n der Potenz $(a+b)^n$ gleich.

Wir setzen unsere Formeln

$$\sin\alpha \ = \ \alpha \ + \ c_3\alpha^3 \ + \ c_5\alpha^5 \ + \ c_7\alpha^7 \ + \ldots$$

$$\cos\alpha \ = 1 \ - \ \tfrac{1}{2}\alpha^2 \ + \ c_4\alpha^4 \ + \ c_6\alpha^6 \ + \ldots$$

in die Additionstheoreme

$$\sin(x+y) \ = \ \sin x \cos y \ + \ \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) \ = \ \cos x \cos y \ - \ \sin x \sin y$$

ein und bekommen:

$$x+y \ + \ c_3(x+y)^3 \ + \ c_5(x+y)^5 \ + \ c_7(x+y)^7 \ + \ldots$$

$$=$$

$$\left(x+c_3x^3+c_5x^5+c_7x^7+\ldots\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}y^2+c_4y^4+c_6y^6+\ldots\right) +$$

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x^2+c_4x^4+c_6x^6+\ldots\right)\cdot\left(y+c_3y^3+c_5y^5+c_7y^7+\ldots\right)$$

und

$$1-\tfrac{1}{2}(x+y)^2+c_4(x+y)^4+c_6(x+y)^6+\ldots$$

$$=$$

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x^2+c_4x^4+c_6x^6+\ldots\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}y^2+c_4y^4+c_6y^6+\ldots\right) -$$
$$\left(x+c_3x^3+c_5x^5+c_7x^7+\ldots\right)\cdot\left(y+c_3y^3+c_5y^5+c_7y^7+\ldots\right).$$

Wenn die links und rechts stehenden Ausdrücke gleich sein sollen, müssen die entsprechenden Koeffizienten gleich sein. Diese Schlussfolgerung ist als *Koeffizientenvergleich* bekannt. Nun konzentrieren wir uns auf die Terme der Gestalt $x^n y$ und notieren nur diese ausdrücklich:

$$\begin{aligned} &3c_3x^2y + 5c_5x^4y + 7c_7x^6y + \ldots \\ &= 0 - \tfrac{1}{2}x^2y + c_4x^4y + c_6x^6y + \ldots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &-xy + 4c_4x^3y + 6c_6x^5y + 8c_8x^7y + \ldots \\ &= 0 - xy - c_3x^3y - c_5x^5y - c_7x^7y + \ldots \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt nun:

$$\begin{aligned} 3c_3 &= -\tfrac{1}{2} \\ 4c_4 &= -c_3 \\ 5c_5 &= c_4 \\ 6c_6 &= -c_5 \\ 7c_7 &= c_6 \\ 8c_8 &= -c_7 \end{aligned}$$

Und daher

$$c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}$$
$$c_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$$
$$c_5 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$c_6 = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$
$$c_7 = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$
$$c_8 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$$

Die Größen

$$2! = 1\cdot 2$$
$$3! = 1\cdot 2\cdot 3$$
$$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$$
$$\ldots$$

heißen *Fakultäten*. Man liest $4!$ als „4 Fakultät“.

Die konkreten Formeln für Sinus und Kosinus lauten also folgendermaßen:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} +-\ldots$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} +-\ldots$$

Die Vorzeichen wechseln sich ab.

Die in der Formel enthaltenen Summen von unendlich vielen Summanden bezeichnet man als unendliche *Reihen* (Sinus- und Kosinusreihe).

6.3 Abweichung beim Abbruch der Reihen

Bei der praktischen Anwendung der Sinus- und Kosinusreihe wird man die Reihen abbrechen und beispielsweise

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$$

betrachten.

Zur Beurteilung der Genauigkeit des Ergebnisses benötigen wir eine Abschätzung der Abweichung vom tatsächlichen Wert. Im Beispiel wäre die Abweichung (*Rest*):

$$R = \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \frac{\alpha^{11}}{11!} + - \ldots$$

Die Einzelnen Glieder werden betraglich immer kleiner (wenn der Betrag von α kleiner als 8 ist). Wir betrachten der Einfachheit halber nur positive Winkel. Dann ist der Betrag des Restes:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\alpha^5}{5!} + \left(- \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} \right) + \left(- \frac{\alpha^{11}}{11!} + \frac{\alpha^9}{9!} \right) + - \ldots \\ &\le \frac{\alpha^5}{5!} \end{aligned}$$

Die runden Klammern haben einen negativen Wert, lässt man sie weg, so vergrößert sich der Ausdruck.

Die vorangehenden Überlegungen gelten bei beliebigen Abbrüchen und auch für die Kosinusreihe. Beim Abbruch ist die Abweichung betraglich höchstens so groß wie das Glied nach dem letzten berücksichtigten.

Zusammenfassung

$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + - \ldots$ $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + - \ldots$
$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + - \ldots \pm \frac{\alpha^n}{n!}$ Abweichung höchstens $\pm \frac{\alpha^{n+2}}{(n+2)!}$
$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - + \ldots \pm \frac{\alpha^n}{n!}$ Abweichung höchstens $\pm \frac{\alpha^{n+2}}{(n+2)!}$

Aufgaben

1. Berechne sin 30° näherungsweise mit Hilfe der jeweils angegebenen Formel. ($\pi \approx 3{,}1416$)

a) $\sin\alpha \approx \alpha$

b) $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$

c) $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!}$

d) $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!}$

2. Berechne cos 30° näherungsweise mit Hilfe der jeweils angegebenen Formel. ($\pi \approx 3{,}1416$)

a) $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$

b) $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!}$

c) $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!}$

d) $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!}$

6.4 Berechnung von π auf acht Nachkommastellen

Zur Berechnung der Sinus- und Kosinuswerte von in Grad gegebenen Winkeln benötigt man einen genaueren Wert von π, um die Winkel in das Bogenmaß umzurechnen.

Früher haben wir schon den Näherungswert $\pi \approx 3{,}14$ berechnet, und im Anhang wird der genauere Wert $\pi \approx 3{,}1416$ ermittelt.

Die Sinusreihe wird uns nun einen noch genaueren Wert für π liefern. Wir werden zunächst $\pi/6$ berechnen. Dies hat den Vorteil, dass $\pi/6$ kleiner als π ist. Daher braucht man weniger Terme bei der Sinus- und Kosinusreihe. Ferner ist $\sin\left(\pi/6\right) = 0{,}5$ ein glatter Wert.

1. Ein erster Näherungswert für $\pi/6$

Für π nehmen wir den Näherungswert $3{,}1416$ mit einer Genauigkeit von vier Nachkommastellen. Im Hinblick auf die Rundung ist die Abweichung höchstens 0,00005, also:

$$\pi = 3{,}1416 \pm 0{,}00005$$

Daher ist

$$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \pm 0{,}00001$$

2. Sinus und Kosinus vom ersten Näherungswert

Wir setzen $\alpha = 0{,}5236$ in die Näherungsformel

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!}$$

ein und erhalten

$$\sin 0{,}5236 \approx 0{,}500.001.060.4$$

Die Abweichung ist höchstens

$$\frac{\alpha^{11}}{11!} = \frac{0{,}5236^{11}}{39.916.800} \approx 0{,}000.000.000.021$$

Den Kosinus berechnen wir aus dem Sinus:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx 0{,}866.024.791.6$$

3. Ein verbesserter Näherungswert für $\pi/6$

Der Näherungswert $\alpha = 0{,}5236$ weicht höchstens um 0,00005 von $\pi/6$ ab. Wir können also

$$\frac{\pi}{6} = \alpha + \Delta$$

schreiben, wobei

$$-0{,}00005 \leq \Delta \leq 0{,}00005.$$

Daher

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= \sin \pi/6 \\ &= \sin\left(\alpha + \Delta\right) \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\Delta \;+\; \cos\alpha \cdot \sin\Delta \end{aligned}$$

Da Δ klein genug ist, ist mit hinreichender (mindestens achtstelliger) Genauigkeit:

$$\begin{aligned} \cos\Delta &\approx 1, \\ \sin\Delta &\approx \Delta. \end{aligned}$$

Aus der damit vereinfachten Gleichung:

$$0{,}5 = \sin\alpha \;+\; \cos\alpha \cdot \Delta$$

lassen sich Δ, $\pi/6$ und π bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta &\approx \frac{0{,}5 - \sin\alpha}{\cos\alpha} \approx -0{,}0000012244 \\ \frac{\pi}{6} &= \alpha + \Delta \approx 0{,}5236 - 0{,}0000012244 = 0{,}5235987756 \\ \pi &\approx 3{,}1415926536 \end{aligned}$$

Also ist mit acht gesicherten Nachkommastellen:

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

Die Leser, die über Kenntnisse der Differentialrechnung verfügen, werden erkannt haben, dass wir zur Berechnung des verbesserten Näherungswertes im Wesentlichen das Newtonverfahren benutzt haben.

Aufgaben

1. Berechne $\sin 35°$ näherungsweise (vier Nachkommastellen) auf zwei Arten:

a) Sinusreihe für $35°$
b) Zerlegung $35° = 30° + 5°$, Additionstheorem und die Sinusreihe für $5°$.

2. Berechne näherungsweise den Winkel α (in Grad) mit $\sin\alpha = 0{,}1$

Lösungen der Aufgaben

Aufgaben aus Kapitel 1

1. Viereck: 360°, Fünfeck: 540°, Sechseck: 720° und Siebeneck: 900°.
2. $(n-2)\cdot 180°$.
3. $a = 4{,}5$, $b = 3$ bzw. $a = 9$, $c = 12$
4. $a = 6{,}4$, $b = 9{,}6$ bzw. $b = 15$, $c = 12{,}5$
5. 11,33 m
6. 23,80 m

Aufgaben aus Kapitel 2.1

1. a) $c = 17$, b) $b = 8$, c) $a = 35$, d) $b \approx 5{,}20$,
e) $a \approx 6{,}93$, f) $c \approx 7{,}81$
2. Rechtwinklig: b), c), d).
3. Kathete ≈ 9,80
4. $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$
5. $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}8660254$
6. Höhe ≈ 4,330127, Flächeninhalt ≈ 10,825318
7. $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
8. ≈ 5,83 cm
9. 35 cm
10. Höhe ≈ 4,77 cm, Flächeninhalt ≈ 7,15 cm²
11. a) $s \approx 0{,}5176381$, Sechseck: Umfang: 6, Flächeninhalt: 2,5980762. Zwölfeck: Umfang ≈ 6,2116572, Fläche: 3,
b) $s' \approx 0{,}5358984$

Aufgaben aus Kapitel 2.2

1. $\sqrt{2} \approx 1,414214$, $\sqrt{3} \approx 1,732051$, $\sqrt{5} \approx 2,236068$,
$\sqrt{10} \approx 3,162278$, $\sqrt{65} \approx 8,062258$

2. $\sqrt{80} \approx 8,944272$

3. a) 3, 30, 300, 3.000, 0,3, 0,03 und 0,003

b) $\sqrt{90} \approx 9,486833$, $\sqrt{9000} \approx 94,86833$,
$\sqrt{0,9} \approx 0,9486833$, $\sqrt{0,009} \approx 0,09486833$

4. $2,12368 \cdot 10^{15}$ und $6,71565 \cdot 10^{15}$

Aufgaben aus Kapitel 2.3

1. a) $\beta = 70°, b \approx 10,99, c \approx 11,70$

b) $\beta = 40°, a \approx 5,36, b \approx 4,50$

c) $\beta = 20°, a \approx 5,50, c \approx 5,85$

d) $\alpha = 80°, a \approx 3,94, b \approx 0,69$

e) $\alpha = 60°, a \approx 10,39, c = 12$

2. a) $c = 17, \alpha \approx 61,93°, \beta \approx 28,07°$

b) $b = 4, \alpha \approx 36,87°, \beta \approx 53,13°$

c) $a = 35, \alpha \approx 71,08°, \beta \approx 18,92°$

d) $c \approx 11,66, \alpha \approx 30,96°, \beta \approx 59,04°$

e) $a \approx 6,93, \alpha = 60°, \beta = 30°$

f) $c \approx 7,81, \alpha \approx 39,81°, \beta \approx 50,19°$

3. Siehe Aufgaben 1 und 2

4. $h \approx 16,03\,\text{m}$

5. $h \approx 4,70\,\text{cm}, A \approx 47,02\,\text{cm}^2$

6. $b = 4, c = 5, \alpha \approx 36,87°, \beta \approx 53,13°$

7. $a \approx 4,47, b \approx 8,94, \alpha \approx 26,57°, \beta \approx 63,43°$

8. a) $h \approx 2,83,\ a \approx 2,93,\ c \approx 3,59$

b) $h \approx 2,94,\ c \approx 11,49,\ \beta \approx 21,55°,\ \gamma \approx 122,45°$

c) $h \approx 4,60,\ a \approx 5,57,\ \beta \approx 55,63°,\ \gamma \approx 74,37°$

9. $h = 4,\ c \approx 3,93,\ \beta \approx 126,87°,\ \gamma \approx 23,13°$

Aufgaben aus Kapitel 3.1

1. $\sin 120° \approx 0,8660,\ \sin 150° = 0,5,\ \sin 135° \approx 0,7071$
$\sin 100° \approx 0,9848,\ \sin 170° \approx 0,1736,\ \sin 160° \approx 0,3420$

2. $0,5{:}\ 30°, 150°,\ \ 0,1736\ldots{:}\ 10°, 170°,\ \ 0,8660\ldots{:}\ 60°, 120°,$
$0,7071\ldots{:}\ 45°, 135°,\ \ 0,6427\ldots{:}\ 40°, 140°,\ \ 1{:}\ 90°$

3. a) $a \approx 6,82,\ b \approx 4,73,\ \gamma = 72°$

b) $a \approx 3,25,\ b \approx 6,47,\ \beta = 51°$

c) $b \approx 3,79,\ c \approx 4,28,\ \alpha = 120°$

d) $a \approx 5,51,\ c \approx 6,05,\ \beta = 51°$

e) $b \approx 9,27,\ c \approx 7,24,\ \gamma = 45°$

f) $a \approx 3,16,\ c \approx 10,11,\ \alpha = 15°$

4. $c \approx 9,93,\ \beta \approx 53,13°,\ \gamma \approx 96,87°$ bzw.
$c \approx 3,93,\ \beta \approx 126,87°,\ \gamma \approx 23,13°$

5. a) $c \approx 8,28,\ \beta \approx 45,28°,\ \gamma \approx 78,72°$

b) $c \approx 3,75,\ \beta \approx 24,18°,\ \gamma \approx 30,82°$

c) $c \approx 11,16,\ \beta \approx 23,69°,\ \gamma \approx 116,31°$

d) $b \approx 5,32,\ \alpha \approx 45,46°,\ \beta \approx 71,54°$

e) $c \approx 12,32,\ \alpha \approx 34,02°,\ \gamma \approx 99,98°$

f) $a \approx 8,18,\ \alpha \approx 50,68°,\ \beta \approx 58,32°$

Aufgaben aus Kapitel 3.2

1. $\cos 120° \approx -0{,}5$, $\cos 150° = -0{,}8660$, $\cos 135° \approx -0{,}7071$
$\cos 95° \approx -0{,}0872$, $\cos 100° \approx -0{,}1736$, $\cos 170° \approx$
$-0{,}9848$

2. $-0{,}5 : 120°$, $-0{,}8660\ldots : 150°$, $-0{,}7071\ldots : 135°$,
$-0{,}1736\ldots : 100°$, $-0{,}6427\ldots : 130°$, $-1 : 180°$

3. a) $c \approx 11{,}59$ b) $c \approx 2{,}97$ c) $a \approx 4{,}54$ d) $b \approx 6{,}71$
e) $a \approx 14{,}61$ f) $b \approx 4{,}38$

4. a) $\alpha \approx 53{,}13°$, $\beta \approx 36{,}87°$, $\gamma = 90°$
b) $\alpha \approx 24{,}15°$, $\beta \approx 30{,}75°$, $\gamma \approx 125{,}10°$
c) $\alpha \approx 122{,}88°$, $\beta \approx 23{,}07°$, $\gamma \approx 34{,}05°$
d) $\alpha \approx 50{,}98°$, $\beta \approx 87{,}27°$, $\gamma \approx 41{,}75°$
e) $\alpha \approx 34{,}05°$, $\beta \approx 101{,}54°$, $\gamma \approx 44{,}42°$
f) $\alpha \approx 62{,}18°$, $\beta \approx 17{,}15°$, $\gamma \approx 100{,}67°$

5. a) $\alpha \approx 63{,}13°$, $\beta = 46{,}87°$
b) $\alpha \approx 117{,}78°$, $\beta = 44{,}22°$
c) $\beta \approx 64{,}83°$, $\gamma = 88{,}87°$
d) $\alpha \approx 26{,}40°$, $\gamma = 29{,}60°$
e) $\beta \approx 31{,}38°$, $\gamma \approx 40{,}62°$
f) $\alpha \approx 62{,}36°$, $\gamma = 41{,}64°$

6. a) $c \approx 8{,}28$, $\beta \approx 45{,}28°$, $\gamma \approx 78{,}72°$
b) $c \approx 3{,}75$, $\beta \approx 24{,}18°$, $\gamma \approx 30{,}82°$
c) $c \approx 11{,}16$, $\beta \approx 23{,}69°$, $\gamma \approx 116{,}31°$

Aufgaben aus Kapitel 3.3

1. a) $b \approx 7{,}52$, $c \approx 5{,}14$, $\alpha \approx 30°$
b) $\alpha \approx 53{,}13°$, $\beta \approx 36{,}87°$, $\gamma \approx 90°$

c) $c \approx 3,09,\ \alpha \approx 82,03°,\ \beta \approx 47,97°$
d) $c \approx 4,20,\ \beta \approx 42,82°,\ \gamma \approx 72,18°$
e) $a \approx 14,12,\ b \approx 11,98,\ \alpha \approx 105°$
f) $b \approx 3,22,\ \alpha \approx 53,02°,\ \gamma \approx 86,98°$
g) $\alpha \approx 55,77°,\ \beta \approx 41,41°,\ \gamma \approx 82,82°$
h) $a \approx 2,67,\ \alpha \approx 26,44°,\ \gamma \approx 123,56°$ bzw.
$a \approx 5,99,\ \alpha \approx 93,56°,\ \gamma \approx 56,44°$
i) $a \approx 4,87,\ \beta \approx 35,35°,\ \gamma \approx 74,65°$
j) $a \approx 7,54,\ \alpha \approx 75,85°,\ \beta \approx 64,15°$ bzw.
$a \approx 3,18,\ \alpha \approx 24,15°,\ \beta \approx 115,85°$

2. $x \approx 3,78$

3. $x \approx 4,97$

4. Flächeninhalt ≈ 13,16 cm², Umfang ≈ 17,28 cm

Aufgaben aus Kapitel 4.1

1. a) $\alpha \approx 76,43°,\ \beta \approx 69,95°,\ \gamma \approx 83,62°$
b) $c \approx 5,29,\ \gamma \approx 59,69°,\ \delta \approx 105,31°$
c) $c \approx 12,31,\ \beta \approx 164,41°,\ \gamma \approx 20,59°$
d) $c \approx 6,50,\ \beta \approx 143,22°,\ \delta \approx 46,78°$
e) $b \approx 3,29,\ c \approx 4,89,\ \gamma = 80°$

2. a) $c \approx 11,20,\ \alpha \approx 123,50°,\ \beta \approx 126,50°$
b) $b \approx 5,40,\ d \approx 4,67,\ \beta = 90°$

3. $A \approx 17,07\,\text{cm}^2$

Aufgaben aus Kapitel 4.2

1. $\sin 7,5° \approx 0,1305261922, \quad \cos 7,5° \approx 0,9914448614$**,**

$\sin 3{,}75° \approx 0{,}0654031291, \quad \cos 3{,}75° \approx 0{,}9978589232$

2. $\sin 22{,}5° \approx 0{,}3826834324, \quad \cos 22{,}5° \approx 0{,}9238795326$,
$\sin 11{,}25° \approx 0{,}1950903219, \quad \cos 11{,}25° \approx 0{,}9807852804$

Aufgaben aus Kapitel 4.3

1. a)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1°	0,0174524	0,9998477
2°	0,0348995	0,9993908
3°	0,0523360	0,9986295
4°	0,0697565	0,9975640
5°	0,0871558	0,9961947
6°	0,1045285	0,9945219
7°	0,1218694	0,9925462
8°	0,1391732	0,9902681
9°	0,1564346	0,9876884
10°	0,1736483	0,9848078

b)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0,50°	0,0087264	0,9999619
0,25°	0,0043646	0,9999905
0,75°	0,0130908	0,9999143

2. a) $\sin 1{,}875° \approx 0{,}03271918, \quad \cos 1{,}875° \approx 0{,}99946458$
$\sin 5{,}625° \approx 0{,}09801728, \quad \cos 5{,}625° \approx 0{,}99518470$

b) $\sin 1° \approx 0{,}01745, \quad \cos 1° \approx 0{,}99985$

3. a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

c) $\sin 4\alpha = \left(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha\right)\cdot\cos\alpha$

d) $\cos 4\alpha = 1 - 8\cos^2\alpha + 8\cos^4\alpha$

Aufgaben aus Kapitel 4.4

1. $\sin 1° \approx 0{,}01744$, $\cos 1° \approx 0{,}99985$
2. $\sin 10° \approx 0{,}17357$, $\sin 20° \approx 0{,}34185$, $\sin 40° \approx 0{,}64249$
3. a) $\alpha \approx 5{,}742°$, b) $\alpha \approx 11{,}539°$, c) $\alpha \approx 17{,}466°$, d) $\alpha \approx 23{,}590°$, e) $\alpha \approx 53{,}154°$, f) $\alpha \approx 64{,}185°$

Aufgaben aus Kapitel 4.5

1. $\sin(-7{,}5°) \approx -0{,}1305$, $\sin 210° = -0{,}5$
$\cos(-240°) = -0{,}5$, $\sin 750° = 0{,}5$
$\cos 547{,}5° \approx -0{,}9914$, $\cos(-225°) \approx -0{,}7071$
$\cos 195° \approx -0{,}9659$, $\cos(-3{,}75°) \approx 0{,}9979$

Aufgaben aus Kapitel 5.1

1. 5° ≈ 0,08722, 8° ≈ 0,13956, 12° ≈ 0,20933, 20° ≈ 0,34889, 40° ≈ 0,69778, 52° ≈ 0,90711, 75° ≈ 1,30833, 80° ≈ 1,39556, 100° ≈ 1,74444, 0,3° ≈ 0,00523
2. 0,1 ≈ 5,73°, 0,25 ≈ 14,33°, 0,5 ≈ 28,66°, 1/3 ≈ 19,11°, 1 ≈ 57,32°

Aufgaben aus Kapitel 6.3

1. 0,52360, b) 0,49968, c) 0,50001, d) 0,50001
2. 0,86292, b) 0,86605, c) 0,86602, d) 0,86602

Aufgaben aus Kapitel 6.4

1. $\sin 35° \approx 0{,}5736$
2. 5,73°, verbessert: 5,739170°

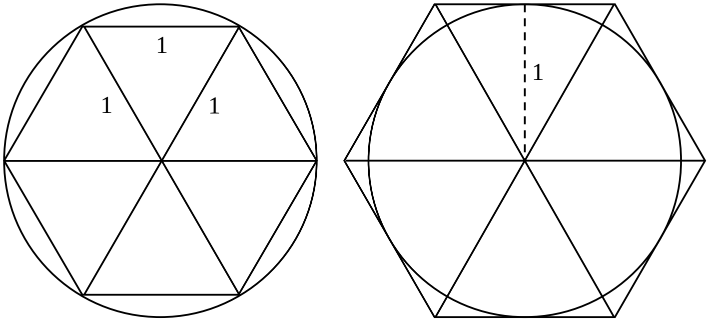
Anhang 1

Berechnung von π

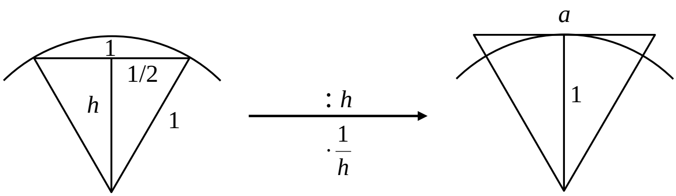
Berechnung von π mittels des Satzes von Pythagoras

Als Anwendung des Satzes von Pythagoras berechnen wir näherungsweise die Kreiszahl π.

Wie Archimedes betrachten wir dazu regelmäßige Vielecke. Die Abbildung zeigt zwei regelmäßige Sechsecke, eines liegt in dem Kreis mit Radius 1 (Einheitskreis), das andere außerhalb. Der Kreisumfang (2π) liegt zwischen den beiden Umfängen der Sechsecke.



Die Seitenlänge des äußeren Sechsecks lässt sich aus der des inneren Sechsecks berechnen.



Die beiden abgebildeten Dreiecke sind ähnlich, unterscheiden sich also nur um einen Faktor. Dieser Faktor muss die Höhe h in die Höhe 1 überführen, und ist also $\frac{1}{h}$.

Die Höhe des inneren Dreiecks ist nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{3}{4}} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned} \quad .$$

Also ist die Seitenlänge a des äußeren Sechsecks:

$$a = 1 \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h} = \frac{1}{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}} \approx 1{,}154700538$$

Die Umfänge der Sechsecke und des Einheitskreises sind daher:

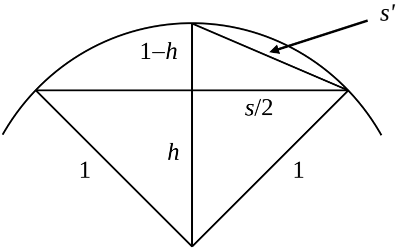
$$6 \leq 2\pi \leq 6{,}928203228$$

Also:

$$3 \leq \pi \leq 3{,}464101614$$

Um bessere Abschätzungen zu bekommen, unterteilen wir das Sechseck und erhalten ein 12-Eck, 24-Eck, ..., 768-Eck.

Wir berechnen nun die Seitenlänge des regelmäßigen $2n$-Ecks, das aus dem n-Eck durch Unterteilen hervorgeht.
Dabei werden wir den Satz des Pythagoras zweimal anwenden. Es sei s die Seitenlänge des n-Ecks, und s' die Seitenlänge des $2n$-Ecks.



Zur Berechnung von s' Wir betrachten die zwei rechten rechtwinkligen Dreiecke:

$$
\begin{aligned}
s'^2 &= (1-h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \\
&= 1 - 2h + h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \\
&= 1 - 2h + 1 \\
&= 2 - 2h \\
&= 2 - 2\sqrt{1-(s/2)^2}
\end{aligned}
$$

Wir dividieren nun durch 4 und führen die Abkürzungen

$$t = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad t' = \left(\frac{s'}{2}\right)^2$$

ein. Dann erhalten wir die überschaubare Beziehung:

$$t' = \frac{1-\sqrt{1-t}}{2}$$

Wenn man bei der praktischen Anwendung dieser Formel einer Rechner benutzt, so können sehr ungenaue Ergebnisse herauskommen. Die Ursache liegt einerseits in der begrenzten Stellenzahl des Rechners, andererseits in der ***Differenz*** zweier ***ungefähr gleicher*** Zahlen. Ein Beispiel soll das Phänomen illustrieren. Nehmen wir einen üblichen zehnstelligen Taschenrechner und bilden die folgende Differenz:

$$1{,}023\,412\,346 - 1{,}023\,412\,312 = 0{,}000\,000\,34$$

Die Ausgangszahlen enthielten zehn gültige Ziffern, das Ergebnis enthält nur noch zwei Ziffern!
Zur Vermeidung dieses Effektes versucht man, Ausdrücke so umzuformen, dass keine kleinen Differenzen auftauchen. Unsere Formel für t' enthält in der Tat die kleine Differenz $1-\sqrt{1-t}$. Da s und damit auch t klein sind, unterscheiden sich die Wurzel nicht viel von 1.

Wir erweitern unseren Bruch und benutzen die dritte binomische Formel:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1-\sqrt{1-t}}{2} \\ &= \frac{\left(1-\sqrt{1-t}\right)\left(1+\sqrt{1-t}\right)}{2\left(1+\sqrt{1-t}\right)} \\ &= \frac{1-\left(\sqrt{1-t}\right)^2}{2\left(1+\sqrt{1-t}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-(1-t)}{2\left(1+\sqrt{1-t}\right)}$$

$$= \frac{t}{2\left(1+\sqrt{1-t}\right)}$$

Der gewonnene Ausdruck enthält nun keine Differenz von etwa gleichen Größen:

$$t' = \frac{t}{2\left(1+\sqrt{1-t}\right)}$$

Die Seitenlänge a des äußeren n-Ecks ergibt sich (wie beim Sechseck, S. 176) aus s durch die Division durch die Höhe $h = \sqrt{1-t}$:

$$a = \frac{s}{\sqrt{1-t}}$$

Dies folgt alternativ auch daraus, dass die Seiten im selben Verhältnis wie die Höhen stehen: $\frac{a}{s} = \frac{1}{h}$.

Die Ergebnisse der Berechnungen für die n-Ecke (mit $n = 6, 12, 24, ..., 768$) sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Die erste Tabelle enthält die Größen t und Seitenlängen s und a des inneren bzw. äußeren n-Ecks. Die zweite Tabelle enthält dann die halben n-Ecks-Umfänge, die mit dem halben Einheitskreisumfang π verglichen werden können. Aus den Werten des 768-Ecks folgt:

$$\pi \approx 3{,}1416,$$

denn $3{,}14158\ldots \le \pi \le 3{,}14161\ldots$

n	t	$s = 2\sqrt{t}$	$a = \dfrac{s}{\sqrt{1-t}}$
6	0,25000000000000	1,00000000000000	1,15470053837925
12	0,06698729810778	0,51763809020504	0,53589838486224
24	0,01703708685547	0,26105238444014	0,26330499517483
48	0,00427756931310	0,13080625846037	0,13108692563056
96	0,00107053838070	0,06543816564361	0,06547322082600
192	0,00026770626182	0,03272346325315	0,03272784427080
384	0,00006693104522	0,01636227920798	0,01636282680769
768	0,00001673304130	0,00818120805260	0,00818127650171

n	Halber Umfang *n*-Eck innen	Halber Umfang *n*-Eck außen
6	3,000000000	3,464101615
12	3,105828541	3,215390309
24	3,132628613	3,159659942
48	3,139350203	3,146086215
96	3,141031951	3,142714600
192	3,141452472	3,141873050
384	3,141557608	3,141662747
768	3,141583892	3,141610177

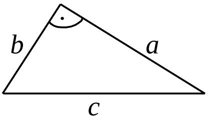
Anhang 2

Zusammenfassung

Trigonometrie
Überblick

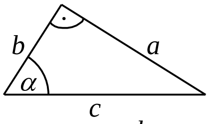
Rechtwinklige Dreiecke

Satz von Pythagoras



$$a^2 + b^2 = c^2$$

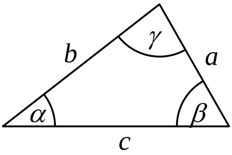
Sinus, Kosinus, Tangens



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

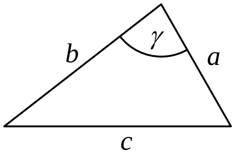
Schiefwinklige Dreiecke

Sinussatz



$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Kosinussatz



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Sinus- und Kosinusreihe

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + - \ldots$$
$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + - \ldots$$

Kleine Winkel

$$\sin\alpha \approx \alpha$$
$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$