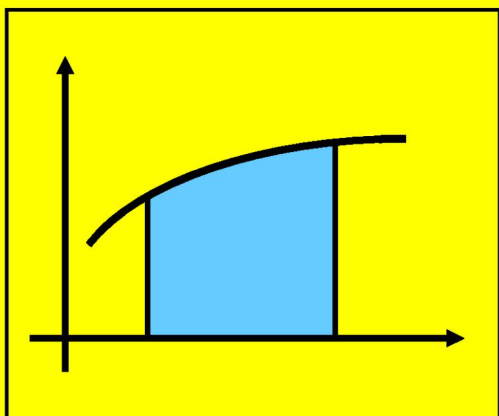


El pequeño libro de cálculo integral

Alexander Roux



Cálculo integral

**El pequeño libro de
cálculo integral**

Alexander Roux

Impressum

Copyright: © 2024 Alexander Roux

Todos los derechos reservados.

ISBN 9798877119444

Edición de autor, Alexander Roux

c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291,

D-50939 Köln

Impresión y distribución por

Kindle Direct Publishing

Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,

L-1855 Luxemburg

Edición original alemana:

Alexander Roux: *Das kleine Buch der Integralrechnung*.

Brühl, 2023

Prefacio

Este texto es una introducción al cálculo integral elemental.

El énfasis está en exponer las ideas visuales fundamentales y en explicar las técnicas de calcular las integrales.

La integral es la respuesta a la pregunta de cómo calcular áreas de figuras con borde curvilíneo. El avance decisivo en el cálculo del área fue posible con la invención de los sistemas de coordenadas.

Por un lado, en realidad, solamente con ellos se pueden describir figuras arbitrarias. Esta descripción se hace mediante ecuaciones en las coordenadas. Por ejemplo, $y = 2x - 1$ describe una recta, $y = x^2$ describe una parábola.

Por otro lado, el cálculo diferencial salió de los sistemas de coordenadas. El cálculo diferencial es la clave para calcular el área por medio de integrales, ya que el teorema fundamental del cálculo dice que la integral es en cierto modo la inversa de la derivada.

Entonces, para leer este librito se necesitan conocimientos básicos de cálculo diferencial: la definición de la derivada y las reglas fáciles de derivación. En el apéndice se resumen algunos resultados importantes del cálculo diferencial.

El cálculo diferencial y el cálculo integral son fundamentales para numerosas áreas de las diferentes ciencias.

Dr. A. Roux

Brühl, enero 2024

Contenido

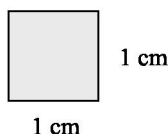
Prefacio	5
Contenido	7
1. Introducción	9
2. La integral	24
2.1 El signo integral	24
2.2 Ejemplos	25
3. El teorema fundamental del cálculo	30
3.1 Estructura básica	30
3.2 Esclareciendo el secreto de F	31
3.3 Ejemplos	33
Ejercicios	43
4. Aplicación: cuerpos de rotación	44
Ejemplo 1: el cono	47
Ejemplo 2: el barril	50
Ejemplo 3: la esfera	54
Ejercicios	57
5. Reglas y técnicas de integración	59
5.1 Reglas elementales de integración	60
5.2 Integración por partes	66
5.3 La regla de sustitución	73
Ejercicios	84
6. Integrales indefinidas	86
6.1 Definición de la integral indefinida	86
6.2 Reglas para integrales indefinidas	88
6.3 Ejemplos para las reglas de integración	90
Ejercicios	101
Soluciones	103

Anexo 1. Rectas y parábolas	108
Anexo 2. Cálculo diferencial, resumen	112
Anexo 3. Números complejos	120
Anexo 4. Cálculo integral, resumen	127

1. Introducción

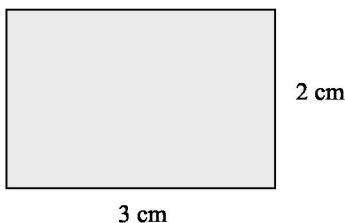
El área de un rectángulo

¿Qué es el área de una figura, y como la medimos? En primer lugar, se tiene que elegir una unidad para la longitud, por ejemplo cm (centímetro). Entonces se puede escoger el cuadrado con lados de 1 cm de largo como unidad del área:



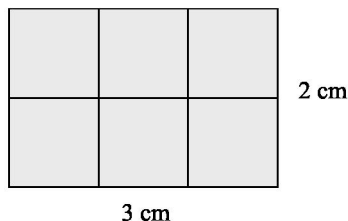
El área de ese cuadrado es 1 cm^2 (un centímetro cuadrado). Para determinar el área de una figura dada, se tiene que comprobar cuántas veces cabe aquel cuadradito en ella.

Por ejemplo, en el rectángulo



caben exactamente 6 cuadrados, como se puede ver fácilmente en el siguiente croquis:

Introducción



(2 pisos con 3 cuadrados cada uno: 2 veces 3 = 6.)

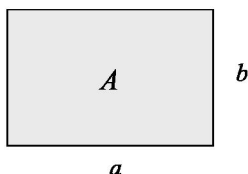
De esto resulta la fórmula conocida:

área de un rectángulo = largo por ancho



Siguiendo a François Viète, 1540-1603, que por primera vez usó *letras* para *todas* las magnitudes, podemos escribir la fórmula en la forma que hoy nos es muy común:

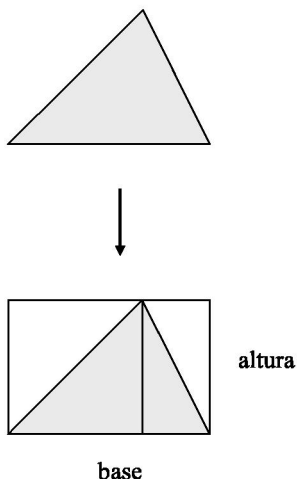
$$A = ab$$



La palabra “área” traducida al inglés o latín también es ‘area’. Por eso se pone la mayúscula “A” para el área.

El área de un triángulo

El área de un triángulo se puede sacar del área de un rectángulo. Los dos rectángulos parciales muestran con especial claridad que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo:



entonces:

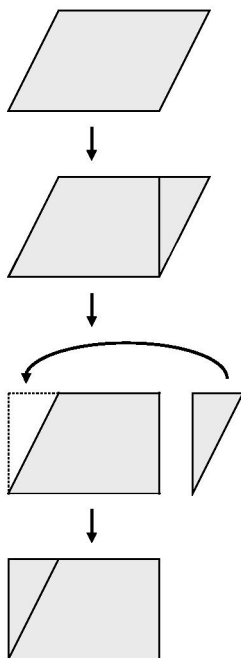
área de un triángulo = la mitad del área del
rectángulo

$$\text{área de un triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

El área de un paralelogramo

También el área de un paralelogramo se puede sacar del área de un rectángulo:

Introducción



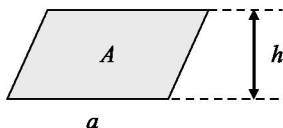
Entonces:

área del paralelogramo = área del rectángulo

área del paralelogramo = base $\cdot$ altura

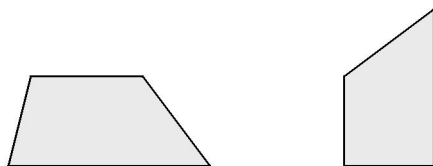
Con letras:

$$A = a \cdot h$$

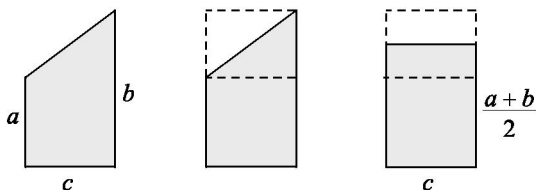


El área de un trapecio

Un trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos:



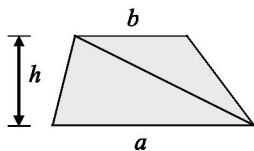
Para el trapecio de la derecha, los dibujos siguientes muestran como calcular su área:



El área A de un trapecio es tan grande como el de un rectángulo con el mismo ancho c y cuya longitud es el promedio de las longitudes de los dos lados paralelos a y b :

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot c$$

El área de un trapecio también se puede obtener partiéndolo en dos triángulos:

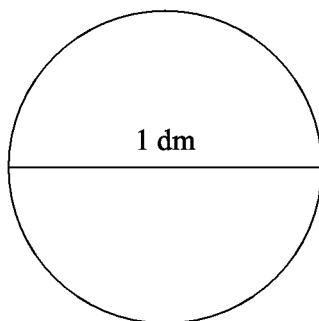


$$\text{Entonces: } A = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

El área de un círculo

El círculo no está limitado por líneas rectas, por eso es más difícil de calcular. Consideramos primero su circunferencia. Para ello tomamos un círculo con un diámetro de 1 dm (1 decímetro = 10 cm), como ocurre por ejemplo cuando tomamos la base de una lata de conservas de 10 cm. También se podría recortar un círculo de cartón.

Entonces medimos la longitud de la circunferencia con una cinta métrica de papel:



Si se mide cuidadosamente, el resultado será aproximadamente:

$$3,14 \text{ dm}$$

Ese valor se denomina *pi* y se escribe como

$$\pi = 3,14159\dots$$

π es la letra minúscula griega *pi*. William Jones (1675-1749) en el año 1706 introdujo el signo π , probablemente porque π es la primera letra de la palabra griega *περίμετρος*, *perímetros* (= circunferencia).

La circunferencia de un círculo con un diámetro de 1 decímetro es entonces π .

Si el diámetro del círculo ahora es de 2 decímetros en lugar de 1 decímetro, entonces todas las longitudes se duplican. Por eso la circunferencia es:

$$\text{circunferencia} = \pi \cdot 2 \text{ decímetros}$$

Si el diámetro del círculo ahora es de 3 decímetros en lugar de 1 decímetro, entonces se triplican todas las longitudes.

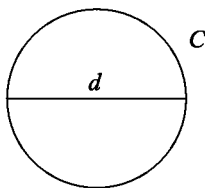
La circunferencia es por lo tanto:

$$\text{circunferencia} = \pi \cdot 3 \text{ decímetros}$$

Generalmente tenemos:

$$\text{circunferencia} = \pi \cdot \text{diámetro}$$

Usando letras obtenemos la fórmula habitual:



$$C = \pi \cdot d$$

Con frecuencia no es el diámetro el que se da, sino el radio. El radio es la mitad del diámetro. Dicho de otro modo: el diámetro es el doble del radio. Si

$$\text{circunferencia} = \pi \cdot \text{diámetro}$$

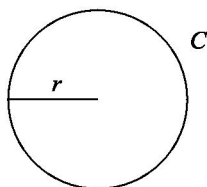
entonces

$$\text{circunferencia} = \pi \cdot 2 \cdot \text{radio}$$

Con letras:

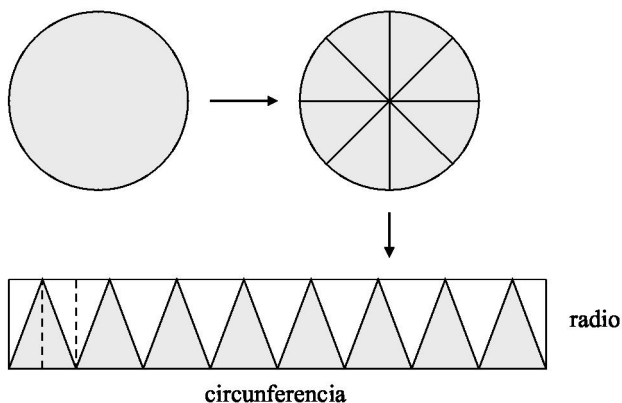
$$c = \pi \cdot 2 \cdot r$$

O en la forma habitual concisa:



$$C = 2\pi r$$

Ahora podemos calcular el área del círculo. Para eso partimos el círculo en “triángulos” (casi triángulos):



El área del círculo es por lo tanto la mitad del área del rectángulo:

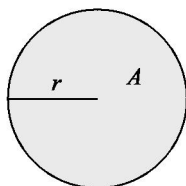
$$\text{área del círculo} = \frac{\text{circunferencia} \cdot \text{radio}}{2}$$

$$\text{área del círculo} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot \text{radio}) \cdot \text{radio}}{2}$$

El dos se cancela y resulta:

$$\text{área del círculo} = \pi \cdot \text{radio} \cdot \text{radio}$$

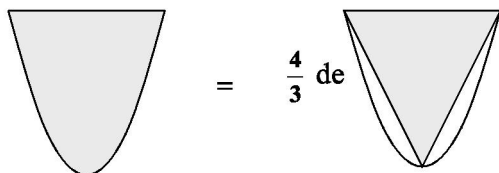
De ello surge la fórmula conocida para calcular el área del círculo:



$$A = \pi r^2$$

El área de un segmento de parábola

Concluimos los ejemplos con la parábola. Arquímedes (287-212 a. C.) fue el primero que pudo calcular el área de un segmento de parábola. Su resultado se lee:

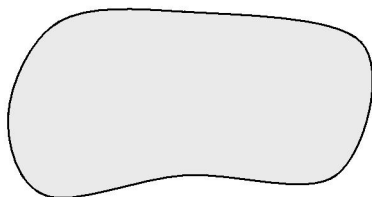


$$\text{área del segmento de la parábola} = \frac{4}{3} \text{ del área del triángulo}$$

El trabajo de Arquímedes sobre la parábola es complicado y extenso, comprende más de 20 páginas de la obra completa de Arquímedes.

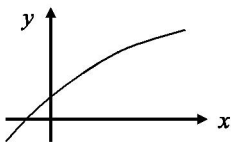
El área de figuras arbitrarias

Ahora consideramos figuras con borde curvilíneo bastante arbitrario:

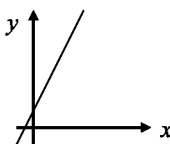
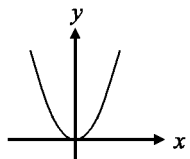
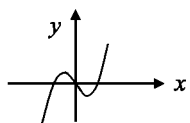
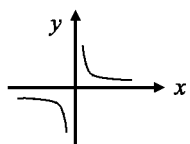


El borde ahora no se puede obtener mediante una construcción geométrica clásica. Apenas el invento de los sistemas de coordenadas (Nicole Oresme, aprox. 1323-1382, René Descartes, 1596-1650, y Pierre de Fermat, 1601-1665) hizo accesible cualquier curva: a cada curva le corresponde una ecuación:

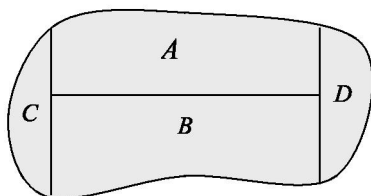
En general

curva	ecuación
	$y = f(x)$ Aquí $f(x)$ simboliza una expresión en x. (Euler, 1707-1783)

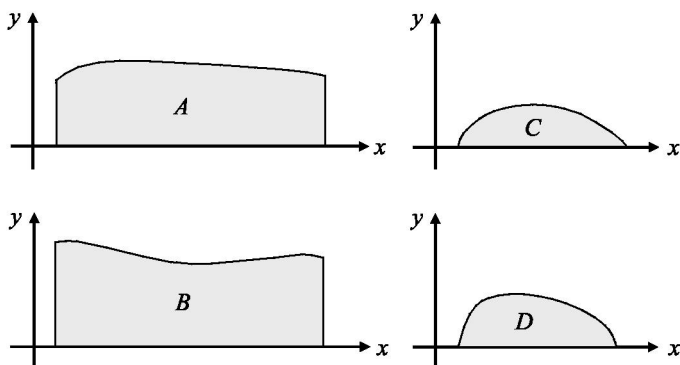
Ejemplos

nombre de la curva	curva	ecuación
recta		$y = 2x + 1$
parábola		$y = x^2$
parábola cúbica		$y = x^3 - x$
hipérbola		$y = \frac{1}{x}$

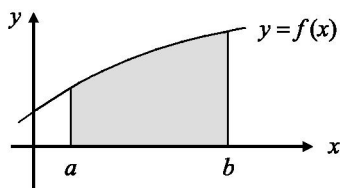
Ahora volvemos con la figura arbitraria de la página anterior. Se puede partir en cuatro partes. Cada una de estas partes puede ser descrita por una ecuación si se escogen sistemas de coordenadas adecuados.



Las partes puestas en sus sistemas de coordenadas son:

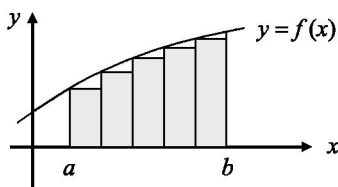


Con esto nuestro problema se reduce a calcular áreas del siguiente tipo:



El área tiene bordes rectilíneos a la izquierda, a la derecha y abajo. Solo arriba esta delimitada por una curva, y esta se puede describir por medio de una ecuación.

Después de haber logrado la descripción de la figura, podemos enfrentar el problema de calcular su área. Para ello la figura se llena de muchos rectángulos delgados. La suma de las áreas de los rectángulos es entonces prácticamente el área buscada:



Observaciones históricas

La idea de abarcar el área mediante rectángulos o triángulos no es nueva y ya se encuentra en los trabajos de Arquímedes (287-212 a. C.) y de Eudoxo (408-355 a. C.) y sus antecesores.

Con el invento de los sistemas de coordenadas por Oresme, estaba disponible una descripción aritmética de curvas arbitrarias y al revés una visualización de relaciones aritméticas.



Nicole Oresme
aprox. 1323-1382

Obispo de Lisieux.

Logros: fundador de las ciencias económicas, las leyes de la caída libre, raíces consideradas como potencias con exponente quebrado (p. ej. $1/2$) y los sistemas de coordenadas.

Cuando Descartes y Fermat (independientemente) volvieron a inventar el sistema de coordenadas, Viète ya había desarrollado el cálculo con letras. Los sistemas de coordenadas podían desarrollar toda su fuerza. Cualquier curva es accesible y a cada curva le corresponde una ecuación.

 René Descartes 1596-1650	 Pierre de Fermat 1601-1665
Jurista y soldado. Logros: sistemas de coordenadas, fundador del racionalismo (filosofía).	Jurista en el parlamento de Toulouse. Logros: sistemas de coordenadas, cálculo diferencial, cálculo de probabilidades (con Pascal); teoría de números, principio de Fermat de la propagación de la luz: la luz toma el camino sobre el cual menos tiempo necesita.

De esta manera, Fermat desarrollo los conceptos básicos del cálculo diferencial en su trabajo *Métodos para determinar máximos y mínimos y tangentes a líneas curvas*. Además, calculó áreas que tienen parábolas elevadas e hipérbolas como borde.

El teorema fundamental del cálculo fue planteado por primera vez por Gregory. Newton y Leibniz extendieron el cálculo diferencial e integral sistemáticamente. Casi todos los términos usados hoy en cálculo diferencial e integral se

remontan a Leibniz, que le daba especial importancia a símbolos matemáticos prácticos.



James Gregory
1638 – 1675



Isaac Newton
1643-1727



Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

La primera definición precisa de la integral viene de Riemann. Por eso también se habla de la “integral de Riemann”. Lebesgue generalizó el concepto de integral llegando a la “integral de Lebesgue”.



Bernhard Riemann
1826-1866



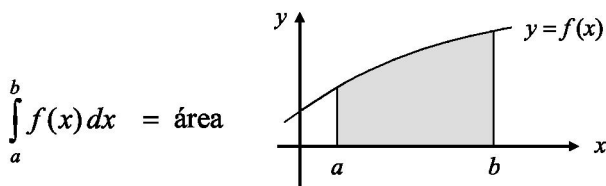
Henri Lebesgue
1875-1941

2. La integral

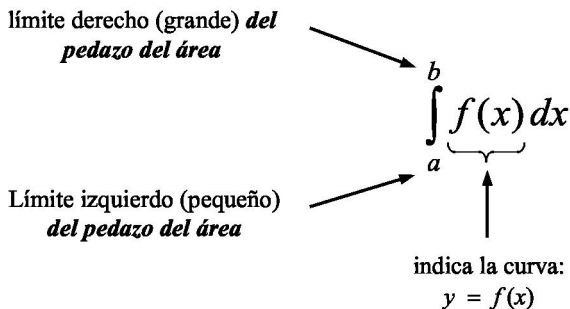
2.1 El signo integral

El signo de integral viene de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Joseph Fourier (1768-1830) completó el signo de integral con los límites de integración. El nombre “integral” fue introducido por Johann Bernoulli (1667-1748) en correspondencia con Leibniz.

El signo de integración representa el área sombreada:

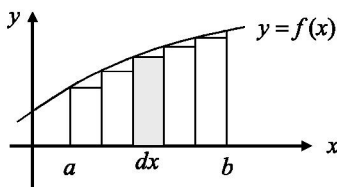


En este signo se encuentran tres informaciones concretas:



Los otros elementos del signo de integración se refieren al modo de calcular la integral a través de la suma de muchas áreas de rectángulos delgados. La base de esos rectángulos es dx y la altura $f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{La suma de todas las áreas } f(x) dx \\ \text{de los rectángulos} \end{array} \right.$$



El signo $\int$ es una “S” estilizada, grande y alargada y significa ‘suma’. La base dx se puede ver como la diferencia de dos valores vecinos del eje x . La “d” en dx entonces significa “diferencia”.

2.2 Ejemplos

Ahora consideramos cinco ejemplos. Con ellos el lector se puede ir acostumbrando a la integral. Además, los ejemplos también enseñan cosas importantes en el camino rumbo al teorema fundamental del cálculo.

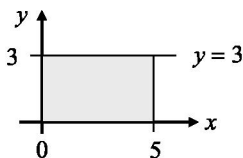
Ejemplo 1

Calcular $\int_0^5 3 dx$.

Solución

La integral no es más que el área de un rectángulo con base 5 y altura 3.

$$\int_0^5 3 dx = \text{área}$$



$$= 5 \cdot 3$$

$$= 15$$

Entonces: $\int_0^5 3 dx = 15$

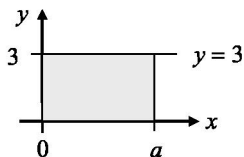
Ejemplo 2

Calcular $\int_0^a 3 dx$.

Solución

La integral no es más que el área de un rectángulo con base a y altura 3.

$$\int_0^a 3 dx = \text{área}$$



$$= a \cdot 3$$

$$= 3a$$

Entonces: $\int_0^a 3 dx = 3a$

Ejemplo 3

Calcular $\int_a^b 3 dx$.

Solución

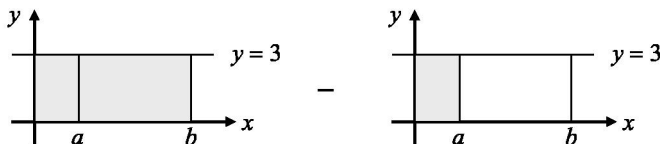
La integral corresponde a la siguiente área:



El área de ese rectángulo con una base $b-a$ y altura 3 es $3(b-a) = 3b-3a$. Entonces:

$$\int_a^b 3 dx = 3b - 3a.$$

La integral también se puede considerar como la diferencia de dos integrales del tipo del ejemplo 2:



Esto nos lleva al siguiente modo de calcular:

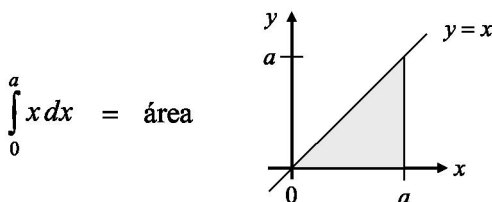
$$\int_a^b 3 dx = \int_0^b 3 dx - \int_0^a 3 dx = 3b - 3a$$

Ejemplo 4

Calcular $\int_0^a x dx$.

Solución

La integral es el área de un triángulo con base a y altura también a .



$$\int_0^a x dx = \text{área}$$

$$= \frac{a \cdot a}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

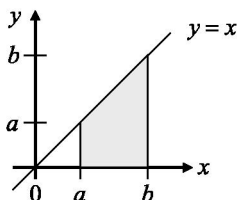
Entonces: $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$

Ejemplo 5

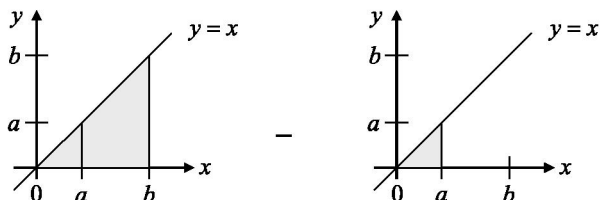
Calcular $\int_a^b x dx$.

Solución

La integral corresponde en este caso al área de un trapecio. No vamos a usar la formula para el área de un trapecio, sino que consideramos el área como diferencia de dos áreas de triángulos y aplicamos el ejemplo 4:



La integral se puede considerar como la diferencia de dos integrales:



Esto lleva al siguiente cálculo:

$$\int_a^b x \, dx = \int_0^b x \, dx - \int_0^a x \, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Entonces: $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

3. El teorema fundamental del cálculo

3.1 Estructura básica

Consideramos los ejemplos 3 y 5 del capítulo anterior:

$\int_a^b 3 dx = 3b - 3a$
$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

En el lado derecho está una diferencia de términos del mismo tipo:

$$\begin{array}{ccc} & 3b & - & 3a \\ & \uparrow & & \uparrow \\ \frac{b^2}{2} & - & \frac{a^2}{2} \end{array}$$

Aquí aparece b . Aquí b es sustituida por a .

Dicho en forma general, la estructura es la siguiente:

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

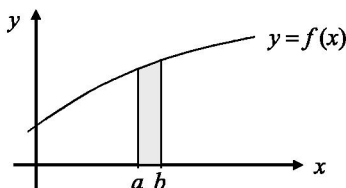
Permanece la pregunta, cuál forma tiene F y cómo puede calcularse.

3.2 Esclareciendo el secreto de F

Consideramos el caso en el que b esta cerca de a :

$$a \approx b$$

El área $\int_a^b f(x) dx$ es entonces muy delgada y prácticamente rectilínea arriba, por eso es un trapecio:



Por lo tanto es:

$$\int_a^b f(x) dx = (\text{promedio de las alturas}) \cdot \text{base}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

Y debido a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

se obtiene

$$F(b) - F(a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a).$$

Dividiendo entre $(b-a)$ resulta:

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Si ahora b esta muy cerca de a ($b \rightarrow a$), entonces en el lado izquierdo resulta la derivada de F en el lugar a , y en el lado derecho se puede sustituir $f(b)$ por $f(a)$:

$$F'(a) = \frac{f(a)+f(a)}{2}.$$

Y por lo tanto

$$F'(a) = f(a)$$

Es decir, F se caracteriza por la propiedad de que su derivada es igual al integrando f . Este resultado se conoce como **teorema fundamental del cálculo**. Él es la clave para calcular integrales.

Teorema fundamental del cálculo

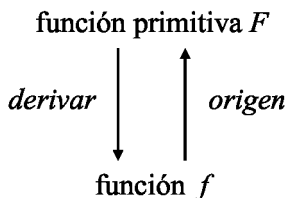
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Donde

$$F'(x) = f(x)$$

(F se llama función *primitiva* de f , es decir, función de *origen*.)

Teniendo en cuenta el término *derivada*, se entiende la expresión *función primitiva* (es decir, *función de origen*):



Calcular una integral consiste sobre todo en encontrar una función primitiva. Por eso, se suele decir que la integración es la inversa de la derivada.

3.3 Ejemplos

Ejemplo 1

Calcular $\int_0^5 3 \, dx$.

Solución

1. Encontrar una función primitiva

$$(\ ?)' = 3$$

$$(3x)' = 3$$

Entonces

$$F(x) = 3x$$

es una función primitiva de $f(x) = 3$.

2. Calcular la integral

$$\begin{aligned}\int_0^5 3 dx &= F(5) - F(0) \\ &= 3 \cdot 5 - 3 \cdot 0 \\ &= 15 - 0 \\ &= 15\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^5 3 dx = 15.$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_1^3 x dx$.

Solución

1. Encontrar una función primitiva

$$(\quad)' = x$$

Sabemos que

$$(x^2)' = 2x$$

Para que al derivar no salga $2x$, sino x , dividimos x^2 entre 2. Entonces es:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

Por eso

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

es una función primitiva de $f(x) = x$.

2. Calcular la integral

$$\begin{aligned}\int_1^3 x \, dx &= F(3) - F(1) \\ &= \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{2} = 4\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_1^3 x \, dx = 4.$$

Ejemplo 3

Calcular $\int_0^1 x^2 \, dx$.

Solución

1. Encontrar una función primitiva

$$(\quad)' = x^2$$

Sabemos que

$$(x^3)' = 3x^2$$

Para que al derivar no resulte $3x^2$, sino x^2 , dividimos x^3 entre 3. Entonces tenemos

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Por eso

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

es una función primitiva de $f(x) = x^2$.

2. Calcular la integral

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \, dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{0}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 4

Calcular $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$.

Solución

1. Encontrar una función primitiva

$$(\quad)' = -x^2 + 4x - 3$$

Se puede considerar cada sumando por separado y proceder como en los ejemplos anteriores (factores constantes se conservan):

$$\left(-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right)' = -x^2 + 4x - 3.$$

Por eso

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

es una función primitiva de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

2. Calcular la integral

$$\begin{aligned} \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx &= F(3) - F(1) \\ &= -\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) \\ &= -9 + 18 - 9 - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0 - \left(-\frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \frac{4}{3}.$$

Observación

Calcular el área de las parábolas en los dos últimos ejemplos 3 y 4 nos llevó un poco más que una página. *La cuadratura de la parábola* de Arquímedes consta de aproximadamente veinte páginas.

Para nosotros, los ejemplos que siguen no son mucho más difíciles, aunque seguramente estén más allá del alcance de los métodos de Arquímedes.

Ejemplo 5

Calcular $\int_0^1 (x - x^3) dx$.

Solución

1. Encontrar una función primitiva

$$\begin{aligned} (?)' &= x - x^3 \\ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)' &= x - x^3 \end{aligned}$$

Por eso

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

es una función primitiva de $f(x) = x - x^3$.

2. Calcular la integral

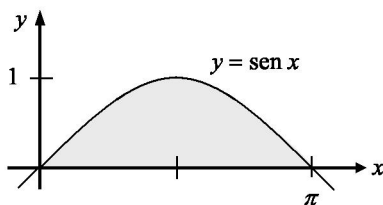
$$\begin{aligned}\int_0^1 (x - x^3) dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - (0 - 0) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 6

Calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$.



Solución

1. Encontrar una función primitiva

$$(\quad)' = \operatorname{sen} x$$

Sabemos que: $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$. Para que al derivar obten-
gamos $\operatorname{sen} x$ (en vez de $-\operatorname{sen} x$), tomamos $-\cos x$:

$$(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$$

Por eso

$$F(x) = -\cos x$$

es una función primitiva de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

2. Calcular la integral

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx &= F(\pi) - F(0) \\ &= -\cos \pi - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) - (-1) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 2.$$

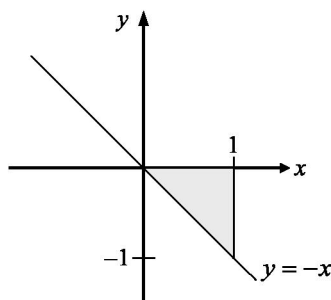
Observación

Sorprendente, el resultado es entero y bonito, considerando que $\pi = 3,14159\dots$ es un número difícil, y que el seno es un concepto complicado.

Ahora sigue un ejemplo donde la curva corre *por debajo* del eje x . Los valores $y = f(x)$ son por lo tanto negativos. Así se puede entender que los productos $f(x)dx$ son negativos y entonces también su suma. En este caso la integral da un área *negativa* entre la curva y el eje x .

Ejemplo 7

Calcular $\int_0^1 (-x) dx$.



Solución

1. Encontrar una función primitiva

$$(\quad)' = -x$$

$$\left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -x$$

Por eso

$$F(x) = -\frac{x^2}{2}$$

es una función primitiva de $f(x) = -x$.

2. Calcular la integral

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-x) dx &= F(1) - F(0) \\ &= -\frac{1^2}{2} - \left(-\frac{0^2}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + 0 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^1 (-x) dx = -\frac{1}{2}.$$

Como se esperaba, eso es el área negativa del triángulo sombreado.

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales de dos maneras: utilizando geometría elemental y el teorema fundamental del cálculo:

$$\text{a) } \int_0^3 (3x+2) dx \quad \text{b) } \int_1^4 (2x-1) dx \quad \text{c) } \int_0^a (3x+2) dx$$

2. Calcular las siguientes integrales mediante el teorema fundamental del cálculo:

$$\text{a) } \int_0^5 (1+x) dx \quad \text{b) } \int_0^a (1+x) dx \quad \text{c) } \int_{-1}^0 x dx$$

$$\text{d) } \int_{-1}^1 x dx \quad \text{e) } \int_{-1}^1 x^2 dx \quad \text{f) } \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$\text{g) } \int_0^1 (x^5 + 4x^2 + 1) dx \quad \text{h) } \int_0^{2\pi} \sen x dx \quad \text{i) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$$

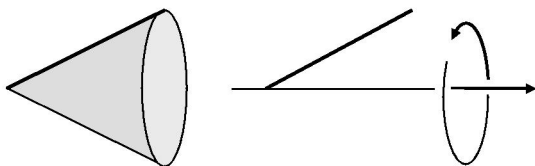
$$\text{j) } \int_0^1 e^x dx \quad \text{k) } \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{l) } \int_1^2 \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} dx$$

$$\text{m) } \int_2^5 (2x-1) dx \quad \text{n) } \int_0^b (8x+5) dx$$

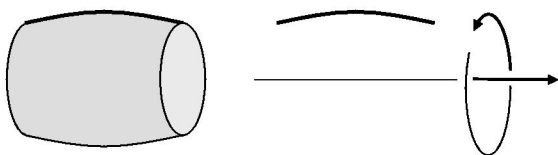
4. Aplicación: cuerpos de rotación

Algunos cuerpos como el cono, el barril y la esfera son cuerpos obtenidos al girar una curva alrededor de un eje.

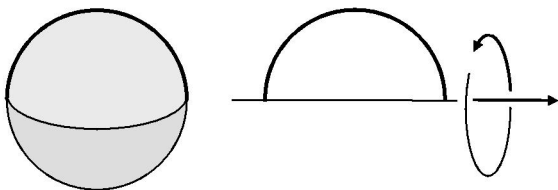
Un cono surge girando una línea recta por 360° :



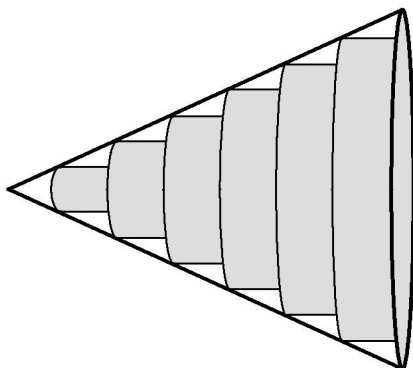
Un barril surge girando un pedazo de una parábola por 360° :



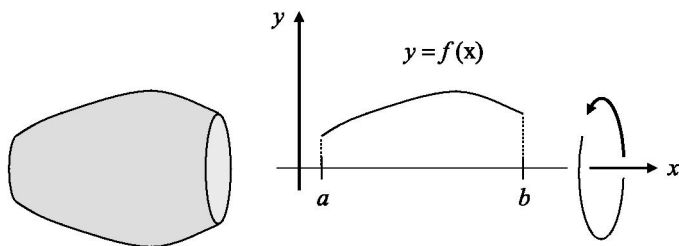
Una esfera surge girando la mitad de una circunferencia por 360° :



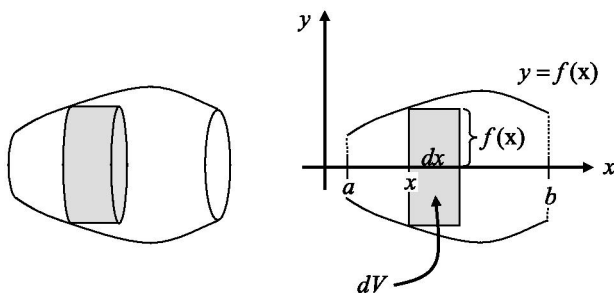
El volumen de los cuerpos obtenidos al girar una línea se pueden calcular mediante nuestras integrales. La idea básica es descomponer el cuerpo en muchos *cilindros* delgados.



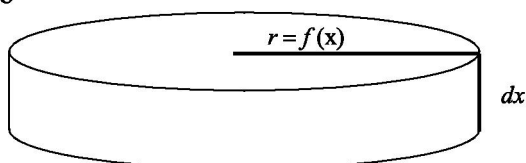
Consideramos una curva general y la giramos alrededor del eje x :



Descomponemos el cuerpo en muchos cilindros planos y consideramos el cilindro en la ubicación x :



Aquí, dV denomina el pequeño volumen del cilindro delgado



Calculamos dV :

$$dV = \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$dV = \pi \cdot r^2 \cdot dx$$

$$dV = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

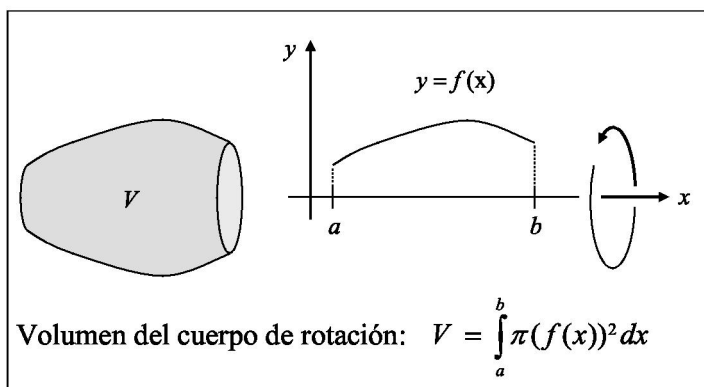
El volumen total del cuerpo es la suma de los volúmenes dV de todos los cilindros planos:

$$V = \text{suma de todos los } dV$$

$$V = \text{suma de todos los } \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Resumimos:

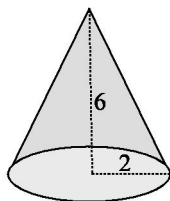


Como ejemplos calculamos el volumen del cono, del barril y de la esfera.

Ejemplo 1: el cono

Tenemos: un cono con altura $h = 6$ cm y radio $r = 2$ cm.

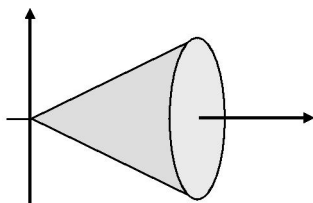
Buscamos: volumen V .



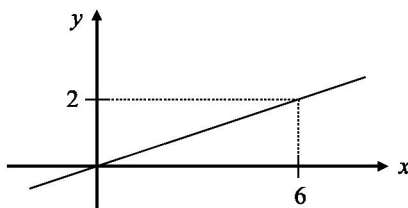
Solución:

1. El cono como cuerpo de rotación

Ponemos el cono en el sistema de coordenadas de la forma siguiente:



La recta a girar es entonces:



La ecuación general de la recta es:

$$y = mx + n$$

La recta pasa por el origen (0; 0) y el punto (6; 2). Es decir, tenemos dos puntos y buscamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

Ya que la recta pasa por el origen, para $x = 0$ también tenemos $y = 0$. Esto sustituido en la ecuación de la recta da:

$$y = mx + n$$

$$0 = m \cdot 0 + n$$

$$0 = 0 + n$$

$$n = 0$$

Por lo tanto la ecuación de la recta se reduce a:

$$y = mx$$

La recta pasa por el punto con las coordenadas $x = 6$ e $y = 2$. Esto sustituido en la ecuación de la recta da:

$$y = mx$$

$$2 = m \cdot 6$$

$$m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333\dots$$

La ecuación concreta de la recta entonces es:

$$y = \frac{1}{3}x$$

Para obtener el cono deseado, hay que considerar la recta en la región entre $x = 0$ y $x = 6$.

2. El volumen del cono como integral

Con

$$f(x) = \frac{1}{3}x,$$
$$a = 0 \quad y \quad b = 6$$

obtenemos de

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

concretamente

$$V = \int_0^6 \pi \left(\frac{1}{3}x\right)^2 dx$$

$$V = \int_0^6 \frac{\pi}{9} x^2 dx$$

3. Calcular la integral

Función primitiva:

$$(\quad)' = \frac{\pi}{9} x^2$$

$$\left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\right)' = \frac{\pi}{9} x^2$$

Por eso

$$F(x) = \frac{\pi}{27} x^3$$

es una función primitiva de $g(x) = \frac{\pi}{9} x^2$.

Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^6 \frac{\pi}{9} x^2 dx &= F(6) - F(0) \\&= \frac{\pi}{27} 6^3 - \frac{\pi}{27} 0^3 \\&= \frac{\pi}{27} 6^3 \\&= 25,1327412...\end{aligned}$$

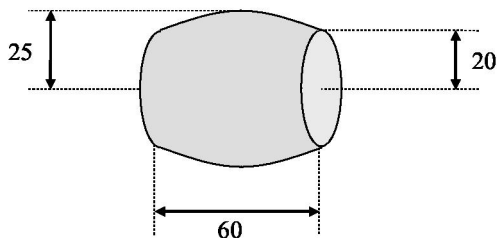
Ya que nuestra unidad de longitud es cm, nuestra unidad de volumen es cm^3 . El cono tiene entonces un Volumen de:

$$V \approx 25,1327 \text{ cm}^3.$$

Ejemplo 2: el barril

Tenemos: un barril con radio pequeño $r = 20$ cm, radio grande $R = 25$ cm y altura $h = 60$ cm.

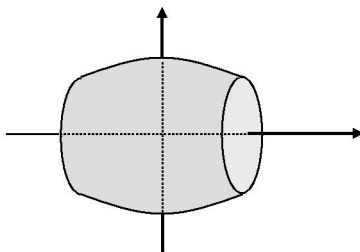
Buscamos: el volumen V .



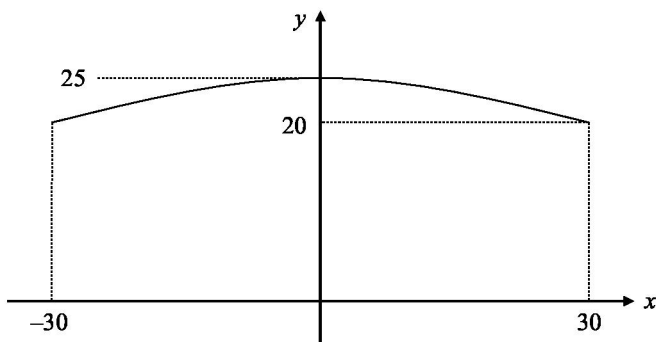
Solución:

1. El barril como cuerpo de rotación

Ponemos el barril de la siguiente manera en el sistema de coordenadas:



Usamos el enfoque de Johannes Kepler (1571-1630), que dice que un barril surge de una parábola que se gira. Para barriles no muy curvos esto es una aproximación muy buena.



El vértice de la parábola se encuentra en el eje y , en concreto en el lugar $y = 25$. La ecuación de la parábola por lo tanto tiene la forma:

$$y = cx^2 + 25$$

Ahora hay que calcular c .

La parábola pasa por el punto con las coordenadas $x = 30$, $y = 20$. Esto sustituido en la ecuación de la parábola y despejada c , nos da:

$$y = cx^2 + 25$$

$$20 = c \cdot 30^2 + 25$$

$$20 = 900c + 25$$

$$-5 = 900c$$

$$c = -\frac{5}{900} = -\frac{1}{180} = -0,00555\dots$$

La ecuación concreta de la parábola es por lo tanto:

$$y = -\frac{1}{180}x^2 + 25$$

La parábola se tiene que considerar en la región entre -30 y 30 para obtener el barril deseado al girar.

2. El volumen del barril como integral

Sustituimos

$$f(x) = -\frac{1}{180}x^2 + 25,$$

$$a = -30, \quad b = 30$$

en

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Y desarrollamos el cuadrado:

$$V = \int_{-30}^{30} \pi \cdot \left(-\frac{1}{180}x^2 + 25\right)^2 dx$$

$$V = \int_{-30}^{30} \pi \cdot \left(\frac{1}{32.400}x^4 - \frac{5}{18}x^2 + 625\right) dx$$

3. Calcular la Integral

Función primitiva:

Derivando confirmamos que

$$F(x) = \pi \cdot \left(\frac{1}{162.000} x^5 - \frac{5}{54} x^3 + 625x \right)$$

es una función primitiva de

$$g(x) = \pi \cdot \left(\frac{1}{32.400} x^4 - \frac{5}{18} x^2 + 625 \right).$$

Integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-30}^{30} \pi \cdot \left(\frac{1}{32.000} x^4 - \frac{5}{18} x^2 + 625 \right) dx \\ &= F(30) - F(-30) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{1}{162.000} 30^5 - \frac{5}{54} 30^3 + 625 \cdot 30 \right) \\ &\quad - \pi \cdot \left(\frac{1}{162.000} (-30)^5 - \frac{5}{54} (-30)^3 + 625(-30) \right) \\ &= \pi \cdot 32.800 \end{aligned}$$

Calculando con $\pi \approx 3,14159$, se obtiene:

$$V \approx 103\,044$$

Ya que nuestra unidad de longitud es cm, nuestra unidad de volumen es cm³. Por lo tanto el barril tiene un volumen aproximado de:

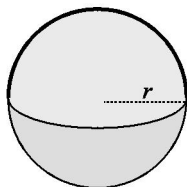
$$103\,044 \text{ cm}^3 = 103,044 \text{ Litros.}$$

Como último ejemplo de un cuerpo de rotación consideramos la esfera. Tomamos una esfera ***general*** con un radio arbitrario r . Entonces el resultado no será un número concreto, sino una fórmula general.

Ejemplo 3: la esfera

Tenemos: una esfera con radio r .

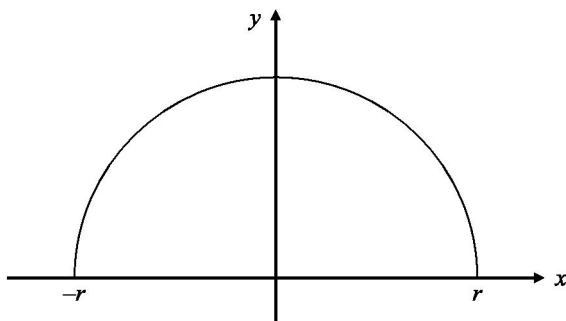
Buscamos: el volumen V .



Solución:

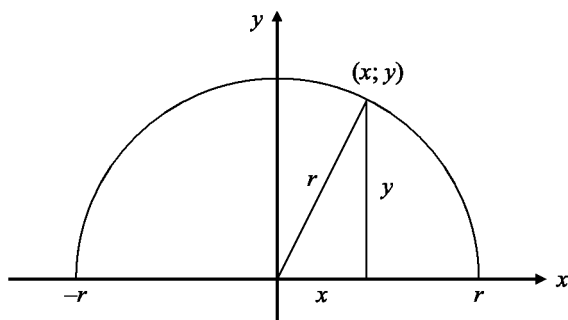
1. La esfera como cuerpo de rotación

Colocamos el centro de la esfera en el origen del sistema de coordenadas. La curva a girar entonces es la mitad superior de la circunferencia cuyo centro está en el origen del sistema de coordenadas:



Los puntos $(x; y)$, que se encuentran en la circunferencia tienen la distancia r del origen del sistema de coordenadas. En el dibujo las coordenadas x e y son los catetos y el radio r es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras nos da:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Despejamos y en la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y obtenemos:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

En la parte superior de la circunferencia, y siempre tiene valores ≥ 0 , por eso se descarta la raíz negativa y queda:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Nuestra curva se encuentra en la región entre $x = -r$ y $x = r$.

2. El volumen de la esfera como integral

Sustituimos

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$a = -r, \quad b = r$$

en

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

y calculamos el cuadrado:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= \int_{-r}^r \pi \cdot (r^2 - x^2) dx \end{aligned}$$

3. Calcular la integral

Función primitiva:

Derivando se confirma, que

$$F(x) = \pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)$$

es una función primitiva de

$$g(x) = \pi \cdot (r^2 - x^2).$$

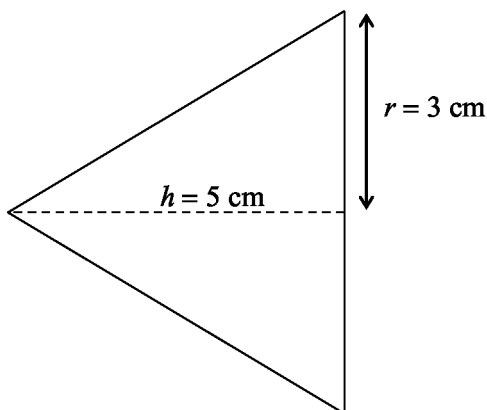
Integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi \cdot (r^2 - x^2) dx \\ &= F(r) - F(-r) \\ &= \pi \cdot \left(r^2 r - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \cdot \left(r^2 (-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \\ &= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \cdot \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \\ &= \pi \cdot \frac{2r^3}{3} + \pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \end{aligned}$$

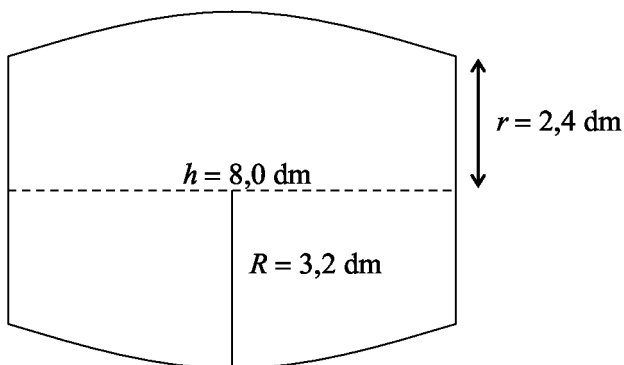
Entonces el volumen de la esfera es: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

Ejercicios

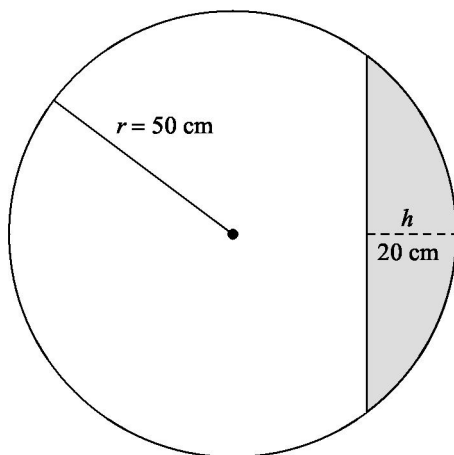
1. Calcular el volumen del siguiente cono:



2. Calcular el volumen del siguiente barril:



3. Calcular el volumen del segmento de la esfera (sombreado):



5. Reglas y técnicas de integración

Con ayuda del teorema fundamental hemos resuelto muchas integrales. En los casos considerados fue relativamente fácil encontrar la función primitiva. En casos más complicados se intenta reducir las integrales a integrales sencillas (según el lema clásico, *divide y vencerás*). Para ello se necesitan las reglas de integración. Esta estrategia se usa seguido, y, por ejemplo, también es el motivo de plantear las reglas de derivación.

Consideramos las siguiente reglas:

1. Reglas elementales de integración
 - * Reglas sobre los límites de integración
 - * Regla de la suma
 - * Regla del factor
2. Integración por partes
3. Regla de sustitución

Estas reglas de integración contemplan los siguientes tres aspectos:

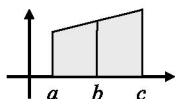
- * Límites de integración
- * Operaciones básicas
- * Reemplazo de una expresión por una letra (una nueva variable)

5.1 Reglas elementales de integración

Consideramos una regla sobre límites de integración, la regla de la suma y la regla del factor. Las reglas serán planteadas, después explicadas y aplicadas en ejemplos.

(1) Reglas sobre los límites de integración

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



(2) La regla de la suma

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

(3) La regla del factor

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Explicación de la regla (1)

La igualdad se puede ver inmediatamente en el dibujo. Una situación parecida se encuentra en un viaje con escala:

viaje de Berlín a París + viaje de París a Madrid = viaje de Berlín a Madrid.

Explicación de la regla (2)

Si se quieren sumar todos los números que están en dos columnas, entonces se pueden sumar por renglón o por columna. Esa es la idea básica de la demostración de la siguiente justificación de la regla de la suma.

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \text{suma de todos los } [f(x) + g(x)] dx \\ &= \text{suma de todos los } f(x) dx + g(x) dx \\ &= \text{suma de todos los } f(x) dx + \\ &\quad \text{suma de todos los } g(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

Explicación de la regla (3)

La regla del factor corresponde a la habitual factorización:

$$\begin{aligned}\int_a^b c f(x) dx &= \text{suma de todos los } c \cdot f(x) dx \\ &= c \cdot \text{suma de todos los } f(x) dx \\ &= c \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Ahora vemos un ejemplo para cada una de las tres reglas.

Ejemplo 1 (límites de integración)

$$\int_0^2 (x-1) dx$$

Solución 1:

$F(x) = 0,5x^2 - x$ es una función primitiva de $x-1$.

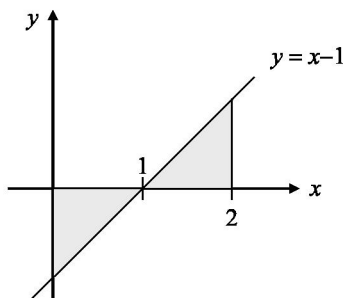
Entonces:

$$\int_0^2 (x-1) dx = F(2) - F(0) = 0,5 \cdot 2^2 - 2 - 0 = 0.$$

Asombrosamente, la integral es cero:

$$\int_0^2 (x-1) dx = 0$$

Solución 2:



En el área de 0 a 1 la recta está abajo del eje x , y en la región de 1 a 2 está arriba. Por eso la integral comprende un área negativa y un área positiva, las cuales, en el caso dado, hasta se cancelan y resultan cero.

$F(x) = 0,5x^2 - x$ es una función primitiva de $x-1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x-1) dx &= \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\&= F(1) - F(0) + F(2) - F(1) \\&= 0,5 \cdot 1 - 1 - 0 + 0,5 \cdot 4 - 4 - (0,5 \cdot 1 - 1) \\&= -0,5 + 0,5 \\&= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 2 (regla de la suma)

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx$$

Solución:

Según la regla de la suma tenemos:

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx.$$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ es una función primitiva de x^2 ,

$G(x) = \frac{x^2}{2}$ es una función primitiva de x .

Por lo tanto:

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \frac{5}{6}$$

Modo de escribir

En el ejemplo anterior la integral fue reducida a *dos* integrales. Al calcularlas hay que considerar dos funciones primitivas. Para poder escribir las funciones primitiva directamente (sin letras como F y G) resultó ser eficaz la siguiente forma de escribir que se ha impuesto ampliamente:

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

Aquí la función primitiva esta escrita explícitamente sin introducir un nombre (como la letra F).

Generalmente:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 3 (regla del factor)

$$\int_0^1 5x^2 dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^1 5x^2 dx &= 5 \cdot \int_0^1 x^2 dx \\ &= 5 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^1 5x^2 dx = \frac{5}{3}$$

5.2 Integración por partes

La integración por partes es una fórmula que se basa en la regla del producto del cálculo diferencial. El nombre *integración por partes* surgió porque de un producto primero sólo se integra un factor, es decir, se forma la función primitiva del factor.

Primero deducimos la fórmula de la integración por partes y luego consideramos tres ejemplos típicos. Estos ejemplos cubren esencialmente todos los casos que aparecen en la práctica.

La deducción de la integración por partes

La regla del producto dice que se deriva un producto derivando cada factor por separado y sumando los productos que resulten:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Tomamos la integral en ambos lados:

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Según el teorema fundamental la integral en la izquierda es:

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b ,$$

pues $f(x) \cdot g(x)$ es una función primitiva de $(f(x) \cdot g(x))'$.

Entonces se obtiene:

$$[f(x) \cdot g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Despejando la primera integral, llegamos a la regla de integración por partes.

Integración por partes

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Explicación de la integración por partes

En la integración por partes se considera la integral de un producto de dos factores.

$$\int_a^b \underbrace{f'(x)}_{\text{función primitiva}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{derivar}} dx = \underbrace{[f(x) \cdot g(x)]_a^b}_{\text{función primitiva}} - \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{derivar}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivar}} dx$$

Primero se busca una función primitiva de uno de los factores. (De ahí viene el término “integración por partes”.) El nuevo producto es evaluado en los lugares a y b , y se forma la diferencia.

En el segundo paso se deriva el otro factor del nuevo producto que no se había cambiado. De este producto se toma la integral.

Ejemplo 1 (deshacerse de un factor derivándolo)

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx$$

Solución:

Si se deriva el factor x , se reduce a 1. Por lo tanto es recomendable integrar el segundo factor. Una función primitiva para e^x es la misma e^x . Entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^x dx &= [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot e^x dx \\&= [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx \\&= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 e^x dx \\&= e - [e^x]_0^1 \\&= e - (e^1 - e^0) \\&= e - (e - 1) = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = 1$$

Ejemplo 2 (generar un producto a través del factor 1)

$$\int_1^2 \ln x \, dx$$

Solución:

(Observaciones preliminares: a primera vista, la integración por partes no parece ser aplicable porque en la integral no hay producto. Pero se puede escribir

$$\ln x = 1 \cdot \ln x$$

y entonces obtenemos un producto. Integramos el factor 1.)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x \, dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx \\&= [x \cdot \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot (\ln x)' \, dx \\&= 2 \cdot \ln 2 - 0 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\&= \ln 2^2 - \int_1^2 1 \, dx \\&= \ln 4 - [x]_1^2 \\&= \ln 4 - (2-1) \\&= \ln 4 - 1 \\&\approx 0,38629\end{aligned}$$

Entonces: $\int_1^2 \ln x \, dx \approx 0,38629$

Ejemplo 3 (obtener una ecuación para la integral)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin x \, dx \\ &= \left[(-\cos x) \cdot \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot (\sin x)' \, dx \\ &= \left[-\cos x \cdot \sin x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= 0 + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx .$$

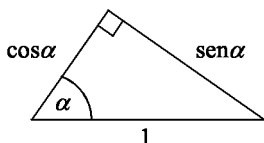
Este resultado primero es muy decepcionante porque

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

realmente no es más sencilla que la integral original.
Consideramos la relación

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 ,$$

que no es otra cosa que el teorema de Pitágoras con disfraz trigonométrico:



Despejamos $\cos^2 x$ en la relación $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x,$$

Sustituimos este resultado:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (1 - \text{sen}^2 x) \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx - \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx$$

La integral buscada ahora se puede considerar como **incógnita** en esta **ecuación**. Despejamos la incógnita:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx - \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx$$

$$2 \cdot \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [x]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} (\pi - 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \approx 1,57080$$

5.3 La regla de sustitución

Sustituciones para simplificar

En las matemáticas a menudo se dan sustituciones (reemplazos). Por ejemplo, la expresión

$$(2x+1)e^{2x+1} \operatorname{sen}(2x+1)$$

se ve desagradable, pero con la abreviación (sustitución, reemplazo):

$$z = 2x+1$$

se reduce a:

$$ze^z \operatorname{sen} z .$$

Sustitución en integrales

En una integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

hacemos la sustitución $x = g(t)$. Eso afectará:

- al integrando $f(x)$,
- la pequeña diferencia dx ,
- los límites de integración a, b .

El integrando

Sustituimos: $f(x) \rightarrow f(g(t))$

La pequeña diferencia

Por definición de la derivada (= pendiente de la tangente
 $\approx$ pendiente de la secante = cociente de diferencias):

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

Entonces

$$dx = g'(t) dt$$

Sustituimos

$$dx \rightarrow g'(t) dt$$

Los límites de integración

La variable x corre de a hasta b . Elegimos t_a y t_b tales que

$$a = g(t_a)$$

$$b = g(t_b)$$

Entonces t corre en la región de t_a hasta t_b . Por lo tanto reemplazamos:

$$a \rightarrow t_a$$

$$b \rightarrow t_b$$

Todos los reemplazos realizados se resumen en la *regla de sustitución* para integrales:

Regla de sustitución

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Para la aplicación práctica no se necesita saber de memoria esta fórmula. Solamente hay que sustituir el integrando $f(x)$, la dx y los límites de integración por separado, como se mostró arriba.

Básicamente hay dos formas de aplicar la sustitución:

A

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{integral dada}} = \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt}_{\text{resulta ser una integral más sencilla}}$$

B

$$\underbrace{\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt}_{\text{integral dada, el integrando es un producto de la forma: (expresión en } g) \cdot g'} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{integral más fácil}}$$

Estas aplicaciones serán presentadas ahora en varios ejemplos.

Ejemplo 1 (tipo A)

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Solución:

Observaciones previas:

De la ya mencionada relación $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ sale $\cos t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 t}$. En la región considerada entre 0 y $\pi/6$, el coseno es positivo, por lo cual se descarta el signo negativo y así: $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$.

Esta fórmula sugiere la sustitución $x = \sin t$, porque la raíz $\sqrt{1 - x^2}$ puede ser simplificada con ella.

Sustitución:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t, \text{ así } dx = \cos t \, dt$$

$$\text{Si } x = 0 = \sin 0, \text{ entonces } t_a = 0.$$

$$\text{Si } x = 0,5 = \sin \frac{\pi}{6}, \text{ entonces } t_b = \frac{\pi}{6}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos t} \cos t \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/6} 1 \, dt \\ &= [t]_0^{\pi/6} = \pi/6 - 0 = \pi/6 \end{aligned}$$

Entonces: $\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi/6$

Ejemplo 2 (tipo A)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Solución:

Sustitución:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t, \text{ así } dx = \cos t \, dt$$

$$\text{Si } x = 0 = \sin 0, \text{ entonces } t_a = 0.$$

$$\text{Si } x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}, \text{ entonces } t_b = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$$

Calculamos $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dx$ mediante la integración por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= [\cos t \cdot \sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin t) \cdot \sin t \, dt \\&= 0 + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt \\&= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \, dt \\&= \int_0^{\pi/2} 1 \, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt\end{aligned}$$

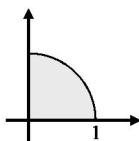
Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= \frac{\pi}{2} \\\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

En conclusión:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

La integral calculada es la cuarta parte del área del círculo con radio 1:



Ejemplo 3 (tipo A)

$$\int_0^1 e^{3x+2} dx$$

Solución:

Sustitución:

$$3x + 2 = t$$

$$\frac{dt}{dx} = (3x + 2)' = 3, \text{ por tanto } dx = \frac{1}{3} dt$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces } t = 3 \cdot 0 + 2 = 2.$$

$$\text{Si } x = 1, \text{ entonces } t = 3 \cdot 1 + 2 = 5.$$

Sustituido:

$$\int_0^1 e^{3x+2} dx = \int_2^5 e^t \frac{1}{3} dt = \left[\frac{1}{3} e^t \right]_2^5 = \frac{1}{3} e^5 - \frac{1}{3} e^2 \approx 47,01$$

Resultado:

$$\int_0^1 e^{3x+2} dx \approx 47,01$$

Ejemplo 4 (tipo B)

$$\int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} \, dx$$

Solución:

La derivada de la expresión dentro de la raíz es el factor que se encuentra delante de la raíz: $(1+x^2)' = 2x$.

$$\int_0^1 \underbrace{2x}_{\text{Derivada}} \underbrace{\sqrt{1+x^2}} \, dx$$

Por lo tanto se ofrece la siguiente sustitución:

$$z = 1+x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = (1+x^2)' = 2x, \text{ por lo tanto } dz = 2x \, dx$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces } z = 1+0^2 = 1.$$

$$\text{Si } x = 1, \text{ entonces } z = 1+1^2 = 2.$$

Sustituido:

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int_1^2 \sqrt{z} \, dz \\ &= \int_1^2 z^{0,5} \, dz \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{z^{0.5+1}}{0,5+1} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{z^{3/2}}{3/2} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2}{3} \sqrt{z^3} \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{8} - \frac{2}{3}$$

$$\approx 1,219$$

Entonces:

$$\int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx \approx 1,219$$

Ejemplo 5 (tipo B)

$$\int_0^{\pi/2} \sen^2 x \cos x dx$$

Solución:

La derivada de seno es coseno:

$$\int_0^{\pi/2} (\sen x)^2 \cos x dx$$


derivada

Por lo tanto se ofrece la siguiente sustitución:

$$z = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{dz}{dx} = (\operatorname{sen} x)' = \cos x, \text{ por lo tanto } dz = \cos x \, dx$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces } z = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{2}, \text{ entonces } z = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1.$$

Sustituido:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx &= \int_0^1 z^2 \, dz \\ &= \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}$$

Otra demostración de la regla de sustitución

Ahora consideramos otro desarrollo de la regla de sustitución. Se basa en el teorema fundamental.

Sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$. Entonces el teorema fundamental dice:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Calculamos también la integral

$$\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad (\text{donde } a = g(t_a) \text{ y } b = g(t_b))$$

mediante el teorema fundamental. Para ello tenemos que encontrar una función primitiva $f(g(t)) \cdot g'(t)$. Usando la regla de la cadena ahora obtenemos:

$$(F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Por eso $F(g(t))$ es una función primitiva $f(g(t)) \cdot g'(t)$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt &= F(g(t_b)) - F(g(t_a)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Las integrales

$$\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x) dx$$

por lo tanto son iguales (las dos son $F(b) - F(a)$).

Con eso la regla de sustitución queda demostrada.

Ejercicios

Reglas elementales de integración

1. Calcule las siguiente integrales:

a) $\int_0^2 (2x^4 + 3x^7 - 2x) dx$

b) $\int_1^4 \left(3x + \frac{2}{x^2} \right) dx$

c) $\int_{-1}^0 (x + 5e^x) dx$

d) $\int_{-1}^1 (2\operatorname{sen} x + 4\cos x) dx$

e) $\int_0^{\pi} (0,5e^x + 3\operatorname{sen} x) dx$

f) $\int_0^a (x^2 - 2\operatorname{sen} x) dx$

Integración por partes

1. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx$

c) $\int_0^{0,5} \operatorname{arcsen} x dx$

d) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x dx$

2. Calcule las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^a x \cos x \, dx \quad \text{b) } \int_0^a x^2 \cos x \, dx \quad \text{c) } \int_0^a e^x \cos x \, dx$$

$$\text{d) } \int_0^a \cos^3 x \, dx \quad \text{e) } \int_0^a \cos^4 x \, dx \quad \text{f) } \int_1^a \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$$\text{g) } \int_1^a x \ln x \, dx \quad \text{h) } \int_1^a x^n \ln x \, dx$$

Sustitución

1. Calcule las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^1 (x+1)^{10} \, dx \quad \text{b) } \int_0^1 (2x+3)^{10} \, dx$$

$$\text{c) } \int_0^1 \cos(3x+1) \, dx \quad \text{d) } \int_0^1 e^{5x+2} \, dx$$

$$\text{e) } \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos x \, dx \quad \text{f) } \int_1^2 \frac{3x^2}{1+x^3} \, dx$$

$$\text{g) } \int_0^1 x\sqrt{x+1} \, dx \quad \text{h) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sen x}{\cos x + \sen x} \, dx$$

6. Integrales indefinidas

6.1 Definición de la integral indefinida

El teorema fundamental dice que calcular una integral consiste esencialmente en encontrar una función primitiva.

La **integral indefinida** es un símbolo que representa una función primitiva y se escribe como integral sin límites de integración:

$$\int f(x) dx = \text{función primitiva } f(x)$$

La integral indefinida es un símbolo práctico para calcular funciones primitivas, que nos ahorra apuntar los desagradables límites de integración.

Lamentablemente no existe más que una función primitiva para una función dada. Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, entonces se le puede sumar cualquier constante C . Y se obtendrá otra función primitiva $f(x)$:

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

La integral indefinida

$$\int f(x) dx$$

representa una función primitiva ***arbitraria*** del integrando $f(x)$. Por eso se escribe:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Aquí $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, y C una constante, que se llama *constante de integración*.

6.2 Reglas para integrales indefinidas

Las integrales indefinidas cumplen reglas parecidas a las reglas de las integrales definidas. Por eso las integrales se calculan de la misma manera en ambos casos.

Reglas de integración

1. La regla de la suma

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2. La regla del factor

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

3. La integración por partes

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

4. La regla de sustitución

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \begin{array}{l} \text{(aquí } x = g(t) \\ dx = g'(t) dt) \end{array}$$

La demostración de las reglas 1, 2 y 3

Comprobamos, si el lado derecho es de hecho una función primitiva del integrando en la integral de la izquierda. Ejecutamos esto de manera ejemplar con la regla del factor:

$$(c \int f(x) dx)' = c (\int f(x) dx)' = c f(x)$$

Es decir, $c \int f(x) dx$ es una función primitiva de $c f(x)$.

Demostración de la regla de sustitución

Sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$. Entonces el lado izquierdo de la regla de sustitución se convierte en:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Tomando en cuenta el lado derecho ($\int f(g(t))g'(t) dt$, que sólo tiene que ver con la variable t), expresamos x por medio de t . Para ello sustituimos $x = g(t)$:

$$\int f(x) dx = F(g(t)) + C$$

Ahora tenemos que demostrar, que:

$$F(g(t)) + C = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

Por lo tanto, tenemos que verificar que $F(g(t)) + C$ es una función primitiva del integrando $f(g(t))g'(t)$.

Para ello derivamos utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}(F(g(t)) + C)' &= (F(g(t)))' + 0 \\ &= F'(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= f(g(t)) \cdot g'(t)\end{aligned}$$

Con eso queda demostrada la regla de sustitución.

6.3 Ejemplos para las reglas de integración

Ejemplo 1 (regla de la suma)

$$\int (x^2 + x) dx$$

Solución:

Según la regla de la suma tenemos:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x) dx &= \int x^2 dx + \int x dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 + \frac{x^2}{2} + C_2 \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \quad (C = C_1 + C_2)\end{aligned}$$

Entonces

$$\int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

Nota sobre las constantes de integración:

Para evitar una inundación confusa por tantas constantes de integración, se acostumbra usar sólo una constante de integración, la cual se escribe hasta el final (después de resolver la última integral). La integral del ejemplo 1 entonces se puede calcular como sigue:

$$\int (x^2 + x) dx = \int x^2 dx + \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

Ejemplo 2 (regla del factor)

$$\int 5x^2 dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int 5x^2 dx &= 5 \int x^2 dx \\ &= 5 \cdot \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{5}{3} x^3 + C\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int 5x^2 dx = \frac{5}{3} x^3 + C$$

Ejemplo 3 (integración por partes)

$$\int x \cdot e^x dx$$

Solución:

Si se deriva el factor x , se reduce a 1. Por lo tanto es recomendable integrar el segundo factor. Una función primitiva de e^x es la misma e^x . Así:

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x dx \\ &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= x \cdot e^x - \int e^x dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + C \\ &= (x-1) \cdot e^x + C\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\int x \cdot e^x dx = (x-1) \cdot e^x + C$

Ejemplo 4 (integración por partes)

$$\int \ln x dx$$

Solución:

Notas preliminares:

A primera vista aquí no parece aplicable la integración por partes, porque la integral no contiene ningún producto. Sin embargo cualquier término se puede considerar un producto con el factor 1. En particular, se puede escribir:

$$\ln x = 1 \cdot \ln x$$

El factor 1 puede ser integrado fácilmente: x es una función primitiva.

Ahora:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln x - x + C \\ &= x \cdot (\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

Entonces: $\int \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$

Ejemplo 5 (integración por partes)

$$\int \sen^2 x \, dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \sen^2 x \, dx &= \int \sen x \cdot \sen x \, dx \\ &= (-\cos x) \cdot \sen x - \int (-\cos x) \cdot (\sen x)' \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sen x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sen x + \int \cos^2 x \, dx\end{aligned}$$

Entonces

$$\int \sen^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sen x + \int \cos^2 x \, dx$$

Despejamos $\cos^2 x$ en la relación $\sen^2 x + \cos^2 x = 1$, que no es otra cosa que el teorema de Pitágoras con disfraz trigonométrico. Sustituimos el resultado

$$\cos^2 x = 1 - \sen^2 x$$

en la integral a la derecha de la ecuación:

$$\begin{aligned}\int \sen^2 x \, dx &= -\cos x \cdot \sen x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sen x + \int (1 - \sen^2 x) \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sen x + \int 1 \, dx - \int \sen^2 x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sen x + x - \int \sen^2 x \, dx\end{aligned}$$

Obtenemos la ecuación

$$\int \sen^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sen x + x - \int \sen^2 x \, dx$$

La integral buscada puede ser vista como incógnita en esta ecuación. Despejamos la integral:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx \\ 2 \cdot \int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \cdot \sin x + x \\ \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C\end{aligned}$$

Entonces, el resultado es:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

Ejemplo 6 (sustitución)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Solución:

Sustitución:

$$\begin{aligned}x &= \sin t \\ \frac{dx}{dt} &= (\sin t)' = \cos t, \text{ por lo tanto} \\ dx &= \cos t \, dt\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, dt$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{\cos t} \cos t \, dt \\ &= \int 1 \, dt \\ &= t + C \end{aligned}$$

Se tiene que volver a expresar t mediante x . Ya que $x = \operatorname{sen} t$, obtenemos $t = \operatorname{arcsen} x$. Así:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = t + C = \operatorname{arcsen} x + C$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

Ejemplo 7 (sustitución)

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Solución:

Sustitución:

$$x = \operatorname{sen} t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\operatorname{sen} t)' = \cos t, \text{ por lo tanto}$$

$$dx = \cos t \, dt$$

Entonces:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt$$

Calculamos $\int \cos^2 t \, dt$ mediante integración por partes (vea el ejemplo 5):

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \operatorname{sen} t \cdot \cos t - \int \operatorname{sen} t \cdot (-\operatorname{sen} t) \, dt \\&= \operatorname{sen} t \cdot \cos t + \int \operatorname{sen}^2 t \, dt \\&= \operatorname{sen} t \cdot \cos t + \int (1 - \cos^2 t) \, dt \\&= \operatorname{sen} t \cdot \cos t + \int 1 \, dt - \int \cos^2 t \, dt \\&= \operatorname{sen} t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt\end{aligned}$$

Entonces

$$\int \cos^2 t \, dt = \operatorname{sen} t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt.$$

Despejando la integral, obtenemos:

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t \cdot \cos t + t) + C$$

Entonces

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t \cdot \cos t + t) + C$$

Ahora nuevamente se tiene que expresar t mediante x . Como $x = \operatorname{sen} t$, entonces $t = \arcsen x$. Por lo tanto:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t \cdot \cos t + t) + C$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} + t) + C \\ &= \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcsen} x) + C \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcsen} x) + C$$

Ejemplo 8 (sustitución)

$$\int e^{3x+2} \, dx$$

Solución:

Sustitución:

$$3x + 2 = t$$

$$\frac{dt}{dx} = (3x + 2)' = 3, \text{ entonces } dx = \frac{1}{3} dt$$

Sustituido:

$$\int e^{3x+2} \, dx = \int e^t \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C$$

Expresamos t nuevamente por x , $t = 3x + 2$:

$$\begin{aligned} \int e^{3x+2} \, dx &= \frac{1}{3} e^t + C \\ &= \frac{1}{3} e^{3x+2} + C \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } \int e^{3x+2} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x+2} + C$$

Ejemplo 9 (sustitución)

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx = ?$$

Solución:

La expresión en la raíz tiene como derivada el factor delante de la raíz: $(1+x^2)' = 2x$.

$$\int \underbrace{2x}_{\text{Derivada}} \underbrace{\sqrt{1+x^2}} \, dx$$

Por eso se ofrece la siguiente sustitución:

$$z = 1 + x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = (1+x^2)' = 2x, \text{ entonces } dz = 2x \, dx$$

Sustituido:

$$\begin{aligned} \int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx &= \int \sqrt{1+x^2} \, 2x \, dx \\ &= \int \sqrt{z} \, dz \\ &= \int z^{0,5} \, dz \\ &= \frac{z^{0,5+1}}{0,5+1} + C \\ &= \frac{z^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{z^3} + C \end{aligned}$$

Expresamos z otra vez mediante x , $z = 1 + x^2$:

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2} dx &= \frac{2}{3}\sqrt{z^3} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C\end{aligned}$$

Entonces: $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$

Ejemplo 10 (sustitución)

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

Solución:

La derivada de seno es coseno:

$$\int \underbrace{(\sin x)^2}_{\text{derivada}} \underbrace{\cos x}_{\text{derivada}} dx$$

Por eso se ofrece la siguiente sustitución:

$$z = \sin x$$

$$\frac{dz}{dx} = (\sin x)' = \cos x, \text{ entonces } dz = \cos x dx$$

Sustituido:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos x dx &= \int z^2 dz \\ &= \frac{z^3}{3} + C\end{aligned}$$

Expresamos z otra vez por medio de x , es decir, ponemos $z = \operatorname{sen} x$:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

Esta es la integral que buscábamos.

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int (x^3 + 5x^2 - 3x) dx$

b) $\int \left(2x + \frac{3}{x^2} \right) dx$

c) $\int (x + 4e^x) dx$

d) $\int (2 \operatorname{sen} x + 4 \cos x) dx$

e) $\int (3 \operatorname{sen} x + 2e^x) dx$

f) $\int (x^2 - 2 \operatorname{sen} x) dx$

2. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

b) $\int \operatorname{arcsen} x dx$

c) $\int \cos^2 x dx$

d) $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x \cos x dx$

b) $\int x^2 \cos x dx$

c) $\int e^x \cos x dx$

d) $\int \cos^3 x dx$

e) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

f) $\int x \ln x dx$

4. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int (2x + 3)^{10} dx$

b) $\int \cos(3x + 1) dx$

c) $\int e^{5x+2} dx$

d) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx$

e) $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$

f) $\int x\sqrt{x+1} dx$

5. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

c) $\int \frac{1}{1-x} dx$

Soluciones

El teorema fundamental

1. a) 19,5 b) 12 c) $1,5a^2 + 2a$

2.

a) 17,5 b) $0,5a^2 + a$ c) -0,5 d) 0

e) $\frac{2}{3}$ f) 0 g) 2,5 h) 0

i) 2 j) $e - 1 = 1,718...$ k) 0,75 l) 2

m) 18 n) $4b^2 + 5b$

Cuerpos de rotación

1. 47,1238898... cm³

2. ca. 217,683 dm³

3. ca. 54,454 dm³

Reglas elementales de integración

1. a) 104,8 b) 24 c) 2,6606... d) 6,7317...

e) 17,0703... f) $\frac{a^3}{3} + 2 \cos a - 2$

Integración por partes

1. a) π b) $\pi^2 - 4$ c) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 = 0,1278\dots$

d) $\frac{\pi}{2} = 1,5707\dots$ e) 0

2.

a) $a \sin a + \cos a - 1$

b) $(a^2 - 2) \sin a + 2a \cos a$

c) $0,5(\sin a + \cos a)e^a - 0,5$

d) $\frac{1}{3}(2 + \cos^2 a) \sin a$

e) $\frac{1}{4} \cos^3 a \sin a + \frac{3}{8}(a + \sin a \cos a)$

f) $\frac{1}{2}(\ln a)^2$

g) $\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$

h) $\frac{a^{n+1}}{n+1} \ln a - \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Sustitución

1.

a) 186,090909...

b) 2.211.408,090909...

c) -0,5327578267...

d) 217,8488204659...

e) 0

f) 1,504077396776...

g) 0,643790283299...

h) 0

Integrales indefinidas

1.

a) $\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$

b) $x^2 - \frac{3}{x} + C$

c) $\frac{x^2}{2} + 4e^x + C$

d) $-2 \cos x + 4 \operatorname{sen} x + C$

e) $-3 \cos x + 2e^x + C$

f) $\frac{x^3}{3} + 2 \cos x + C$

2.

a) $(2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + C$

b) $x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + C$

c) $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + C$

d) $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$

3.

a) $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

b) $2x \cos x + (x^2 - 2) \operatorname{sen} x + C$

c) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)e^x + C$

d) $\frac{1}{3}(2 + \cos^2 x) \operatorname{sen} x + C$

e) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

f) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

4.

a) $\frac{(2x+3)^{11}}{22} + C$

b) $\frac{1}{3} \sin(3x+1) + C$

c) $\frac{1}{5} e^{5x+2} + C$

d) $\frac{1}{5} \sin^5 x + C$

e) $\ln(1+x^2) + C$

f) $\left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1) \right) \sqrt{x+1} + C$

5.

a) $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

b) $\arcsen \frac{x}{a} + C$

c) $-\ln(1-x) + C$

Nota

Resultados que no son números enteros generalmente se han *redondeado* o escrito con puntos suspensivos (...).

.

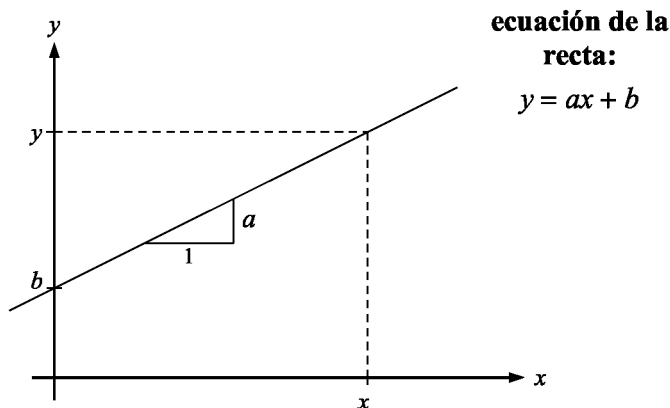
Anexo 1

Rectas y parábolas Resumen

I. Rectas

1. La ecuación de una recta

La ecuación de una recta nos da la coordenada y (altura) de cualquier punto si conocemos su posición x .



Los números a (coeficiente de x) y b (constante sin x) tienen el siguiente significado geométrico:

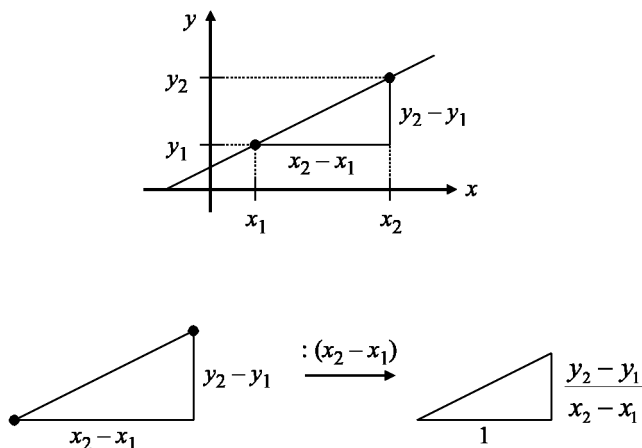
$a =$ **pendiente** de la recta

(1 paso a la derecha y a pasos hacia arriba, o hacia abajo, si a es negativa.)

$b =$ intersección de la recta con el eje y .

2. La pendiente calculada de dos puntos dados

Con dos puntos dados se puede formar un triángulo que contiene información sobre la pendiente de la recta. Una simple división hace que la base del triángulo tenga la longitud 1. Entonces la altura del triángulo es la pendiente de la recta:



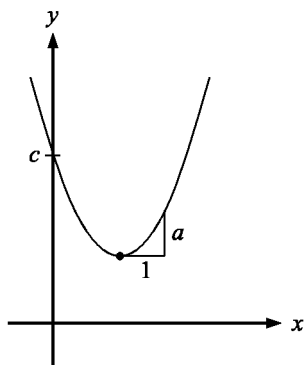
Por lo tanto, la pendiente a de la recta es

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

II. Parábolas

Forma general de la ecuación de una parábola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

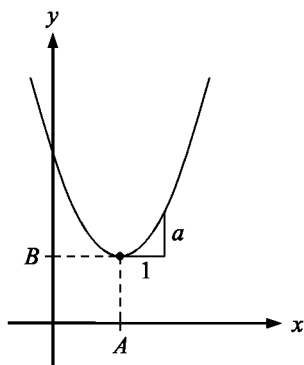


completar el
cuadrado

desarrollar el
cuadrado

La ecuación de una parábola si se conoce su vértice:

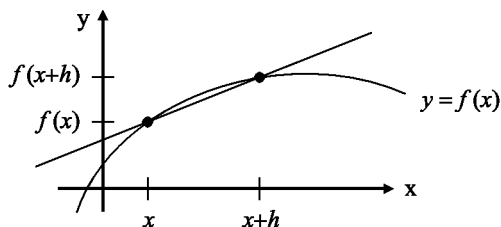
$$y = a(x - A)^2 + B$$



Anexo 2

Cálculo diferencial Resumen

I. Concepto de derivada



$f'(x)$ = pendiente de la tangente de f en el punto x
= valor límite de las pendientes de las secantes

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

II. Calcular la derivada

Derivadas básicas

$$(c)' = 0$$

$$(ax+b)' = a$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

Reglas de derivación

Regla de la suma

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Regla del factor

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Regla del producto

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Regla del cociente

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Regla de la cadena

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Otras derivadas importantes

Partiendo de las derivadas básicas, se pueden calcular otras derivas importantes mediante las reglas de derivación:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

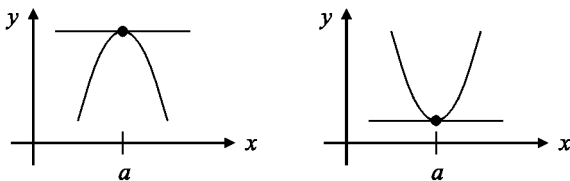
$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

III. Aplicaciones

Máximos y mínimos locales



1. Si f tiene un máximo a o mínimo local en a , entonces:

$$f'(a) = 0.$$

2. Si

$$f'(a) = 0 \quad \text{y} \quad f''(a) < 0,$$

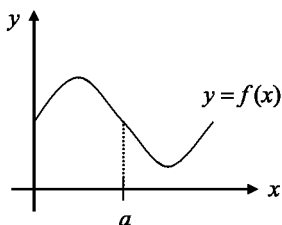
entonces f tiene un máximo local en a .

3. Si

$$f'(a) = 0 \quad \text{y} \quad f''(a) > 0,$$

entonces f tiene un mínimo local en a .

Punto de inflexión (cambio de curvatura)

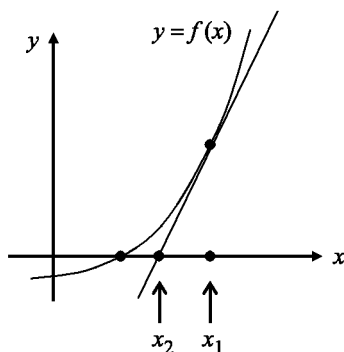


Si $f''(a)=0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a .

El método de Newton

A partir de un valor aproximado x_1 de una solución de la ecuación $f(x)=0$, resulta el siguiente valor mejorado x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



Series***Serie geométrica***

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

Serie de la arcotangente

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Serie del logaritmo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

Serie exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \text{ arbitraria})$$

Serie del seno

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \text{ arbitraria})$$

Serie del coseno

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \text{ arbitraria})$$

Serie de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

La fórmula mágica de Euler

Las series sólo contienen las cuatro operaciones básicas. Por lo tanto, también se pueden aplicar para números complejos (que se explican en el anexo 3). Tomando números complejos en la función exponencial, Leonhard Euler dio con la famosa *fórmula mágica*:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la *unidad imaginaria*, que es un número más allá de los números reales y satisface la ecuación $i^2 = -1$.

La fórmula mágica vincula la función exponencial con coseno y seno, funciones que a primera vista no parecen estar relacionadas.

La fórmula mágica permite reducir muchas relaciones trigonométricas a simples reglas de potencias.

Desarrollo de la formula mágica

Las potencias de i son:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, \text{ etc.}$$

Vemos que para exponente pares (es decir, de la forma $2n$), las potencias son ± 1 , y para exponentes impares (es decir, de la forma $2n + 1$), las potencias son alternando $\pm i$. (En ambos casos los signos se alternan.) De hecho,

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n = \pm 1$$

$$i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n \cdot i = \pm i$$

Ahora calculamos e^{ix} :

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\
 &= 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \dots \\
 &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \right) \\
 &= \cos x + i \operatorname{sen} x
 \end{aligned}$$

Es decir, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

El caso de que $x = \pi$ (180°) es llamativo y famoso por relacionar cinco constantes matemáticas importantes:

$$\begin{aligned}
 e^{i\pi} &= \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \\
 &= -1 + 0 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Anexo 3

Números complejos

Números complejos

Algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución, por ejemplo, la ecuación sencilla

$$x^2 = -1.$$

Ninguno de los números comunes (*reales*) podría ser una solución, ya que multiplicándolo por sí mismo siempre daría un número positivo o cero.

Ampliamos nuestro concepto de número, agregándole un número nuevo i que sea una solución de la ecuación planteada arriba, es decir:

$$i^2 = -1.$$

Ese número i es conocido como la *unidad imaginaria*. Se puede interpretar i como la raíz de -1 :

$$i = \sqrt{-1}.$$

Hablando geométricamente, pasamos de la *recta numérica* a un *plano*. La unidad imaginaria corresponde a un punto ubicado en el plano, pero fuera de la recta numérica.

Ejecutando las cuatro operaciones básicas con números reales y la unidad imaginaria i , resultan expresiones de la forma:

$$a + bi,$$

por ejemplo, $2 + 3i$, $-4 + 5i$, $1,5 + 3,8i$, etc.

Estas magnitudes compuestas de números reales y de la unidad imaginaria se llaman *números complejos*.

En el ámbito de esos números complejos se puede sacar la raíz de un número negativo, por ejemplo:

$$\sqrt{-9} = 3i, \text{ porque } (3i)^2 = 9i^2 = -9.$$

Si se incluyen los números complejos, la fórmula de

solución de ecuaciones cuadráticas siempre da soluciones.
Así, la ecuación

$$x^2 + 4x + 5 = 0,$$

considerada en el capítulo 4, ahora tiene las soluciones:

$$x_1 = -2 + i \quad \text{y} \quad x_2 = -2 - i.$$

Porque

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | \text{ sustituir } p = 4, q = 5$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \quad | \text{ calcular}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

Las operaciones básicas con números complejos

Los números complejos se tratan como si fueran expresiones con números y letras. Solamente hay que tomar en cuenta que, además, se tiene $i^2 = -1$.

Consideramos ejemplos de operaciones básicas con números complejos:

Adición

$$(2 + 3i) + (5 + 9i) = 7 + 12i$$

Sustracción

$$(2 + 9i) - (6 + 3i) = -4 + 6i$$

Multiplicación

$$\begin{aligned}
 (2+3i) \cdot (5+4i) &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4i + 3i \cdot 5 + 3i \cdot 4i \\
 &= 10 + 8i + 15i + 12i^2 \quad | i^2 = -1 \\
 &= 10 + 23i - 12 \\
 &= -2 + 23i
 \end{aligned}$$

División

$$\begin{aligned}
 \frac{3+7i}{1+2i} &= \frac{(3+7i) \cdot (1-2i)}{(1+2i) \cdot (1-2i)} \quad | \text{ suma por diferencia} \\
 &= \frac{17+i}{1-4i^2} \quad | i^2 = -1 \\
 &= \frac{17+i}{1+4} \\
 &= \frac{17+i}{5} \\
 &= \frac{17}{5} + \frac{1}{5}i
 \end{aligned}$$

Aquí se utilizó el truco común para deshacerse de la i en el denominador $1+2i$: el numerador y el denominador se multiplican por $1-2i$. Entonces se aplica la regla general de que, el producto de una suma y la diferencia correspondiente es la diferencia de los **cuadrados**:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

Los cuadrados hacen desaparecer la unidad imaginaria i , resultando un número real. En nuestro caso, obtenemos el siguiente nuevo denominador:

$$\begin{aligned}(1+2i) \cdot (1-2i) &= 1^2 - (2i)^2 \\ &= 1 - 4i^2 \\ &= 1 - 4 \cdot (-1) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

Sobre la historia de los números complejos

Rafael Bombelli (1526 – 1572), en su libro *Algebra*, fue el primero en plantear los números complejos e incluirlos como soluciones de ecuaciones.

El adjetivo en “número *imaginario*” fue introducido por René Descartes (1596 – 1650) en su famoso tratado *La Géométrie*.

La expresión *número complejo* fue ideada por Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).

La denominación *i* para la *unidad imaginaria* se debe a Leonhard Euler (1708 – 1783).

Aplicaciones de los números complejos

A fines del siglo XIX, el ingeniero electricista Charles Steinmetz (1865 – 1923) introdujo resistencias complejas en circuitos de corriente alterna, logrando una gran simplificación de los cálculos pertinentes.

La mecánica cuántica desarrollada en los años 1920 utiliza números complejos. En una inscripción en la tumba de Erwin Schrödinger (1878 – 1961) está escrita la famosa *ecuación de Schrödinger*:

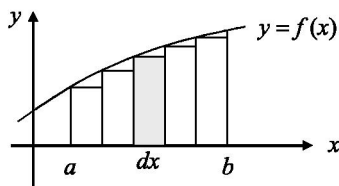
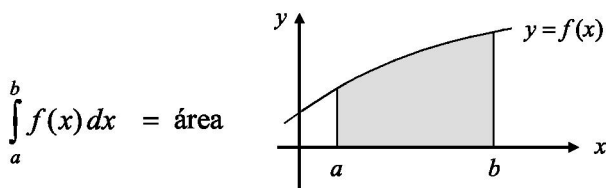
$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi .$$

Ella empieza con la unidad imaginaria i .

Anexo 4

Cálculo integral Resumen

I. El concepto de la integral



$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \text{La suma de todas las áreas } f(x) dx \\ \text{de los rectángulos} \end{cases}$$

II. El teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Aquí es:

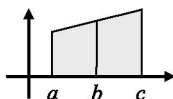
$$F'(x) = f(x)$$

(F se llama función primitiva de f .)

III. Reglas de integración

1. Reglas sobre límites de integración

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



2. Regla de la suma

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

3. Regla del factor

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

4. Integración por partes

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

5. Regla de sustitución

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

(donde $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$, $a = g(t_a)$, $b = g(t_b)$)

IV. Integrales indefinidas

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

F es una función primitiva de f :

$$F'(x) = f(x)$$

C es una constante (*constante de integración*).

V. Reglas para integrales indefinidas

1. Regla de la suma

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2. Regla del factor

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

3. Integración por partes

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

4. Regla de sustitución

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{donde } x = g(t) \\ dx = g'(t) dt \end{array} \right)$$

