Das kleine Buch der
Vektorrechnung

Alexander Roux

Das kleine Buch der

Vektorrechnung

Alexander Roux

Impressum

Druck und Verlag: epubli GmbH, Berlin,
www.epubli.de

Vorwort

Dieser kleine Text ist eine praktisch orientierte Einführung in die Vektorrechnung. Die Vektorrechnung ist eine relativ neue Errungenschaft, die von Hermann Grassmann (1809-1877) als „Extensionslehre“ entwickelt wurde.

Mit ihren effizienten und übersichtlichen Schreibweisen und Rechenmethoden ist sie aus der Raumgeometrie und ihrer Anwendung in Physik und Technik nicht mehr wegzudenken. Außerdem ist die Vektorrechnung die Grundlage für fortgeschrittene Themen wie lineare Algebra, Vektoranalysis, Quantenmechanik und Relativitätstheorie. Der Leser wird für die Mühe beim Erlernen der Vektorrechnung also reichlich belohnt.

Um die *praktische Anwendung* der Vektorrechnung zu erlernen, benötigt man nur folgende Vorkenntnisse:

- Rechenausdrücke und einfachen Gleichungen,
- Koordinatensysteme,
- Sinus und Kosinus.

Bei der *Herleitung* einiger Formeln werden die folgenden Kenntnisse vorausgesetzt:

- Additionsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten,
- Satz des Pythagoras, auch in trigonometrischer Verkleidung: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
- Kosinussatz.

Der Satz des Pythagoras und der Kosinussatz werden *nur* bei der *Herleitung* der Koordinatendarstellung der Vektoroperationen benutzt. Ihre Aussage steckt dann in den Rechenregeln der Vektorrechnung. Auf die ursprünglichen Sätze muss nicht mehr zurückgegriffen werden.

Die Kapitel über Geraden und Ebenen sind leichter zu verstehen, wenn man mit den Geradengleichungen vertraut ist.

Vieles wird im Text an Hand von Beispielen dargelegt. Der Leser sollte sie noch einmal selbständig und unabhängig von der Vorlage bearbeiten. Nur so kann der Stoff wirklich gelernt werden.

Es gibt eine ständig steigende Tendenz in den Schulen des Westens, die Grundideen und logischen Zusammenhänge in der Mathematik durch eine Vielzahl von vermeintlich „praktischen" oder „alltäglichen" Beispielen zu verdunkeln. Der vorliegende Text möchte einen Beitrag dazu leisten, die wesentlichen Gedanken wieder deutlicher erkennbar zu machen.

Dr. A. Roux
Brühl, Oktober 2015

Inhalt

1. Einführung und Überblick

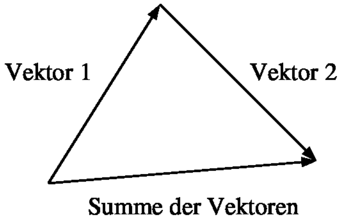
Die Vektorrechnung ist das Werk eines einzelnen Mannes: Hermann Grassmann (1809-1877), Lehrer aus Stettin. Sein im Jahre 1844 erschienenes und immer noch lesenswertes Buch „Die lineale Ausdehnungslehre“ stellt die Vektorrechnung ausführlich dar.

Grassmann betrachtet „Strecken“ mit einer „Richtung“. Das ist genau das, was wir heute unter einem Vektor verstehen und als Pfeil darstellen. Die Bezeichnung „Vektor“ in diesem Sinne ist von William Rowan Hamilton (1805-1865) eingeführt worden. Er hat auch den Gegenbegriff „Skalar“ eingeführt, der in der Vektorrechnung für Zahlen benutzt wird.

Der astronomische Ausdruck „radius vector“ steht bereits 1753 in einem englischen Lexikon. Der Radiusvektor ist hier der Leitstrahl, der Strahl, der die Sonne mit einem Planten verbindet. (Das lateinische Wort „vector“ bedeutet: Träger, Fahrer.)

Viele physikalische Größen sind mit einer Richtung versehen und können als Pfeile (Vektoren) dargestellt werden: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Ortsänderung.

Die eigentliche Stärke der Vektoren ist aber, dass man mit ihnen ***rechnen*** kann und zwar im Wesentlichen nach den ***Regeln***, die auch beim Rechnen mit Zahlen gelten und aus der Algebra vertraut sind. So werden beispielsweise zwei Pfeile addiert, indem man die Pfeile hintereinander setzt:



Dies entspricht der folgenden Reise mit Zwischenstopp:

Reise von Berlin nach Paris + Reise von Paris nach Madrid
= Reise von Berlin nach Madrid.

Wir werden hier folgende Vektoroperationen betrachten:

- Addition von zwei Vektoren,
- Subtraktion von zwei Vektoren,
- Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl („Skalar"),
- inneres Produkt von zwei Vektoren, dessen Ergebnis eine *Zahl* ist, (heute daher meist als „Skalarprodukt" bezeichnet),
- äußeres Produkt von zwei Vektoren, dessen Ergebnis ein *Vektor* ist, (heute daher meist als „Vektorprodukt" bezeichnet).

Das Wort „Produkt" deutet an, dass sich die Operation so harmonisch mit der Addition verträgt wie es bei der Multiplikation von Zahlen der Fall ist (ausmultiplizieren ist möglich).

Das Vektorprodukt weist zwei Besonderheiten auf:

1. Es ist nur im *dreidimensionalen* Raum möglich.
2. Beim *Vertauschen* der Faktoren ändert sich das *Vorzeichen* des Vektorproduktes.

Man kann Vektoren auch durch ihre Koordinaten bezüglich eines Koordinatensystems beschreiben. Die Vektoren werden dann zu Zahlenspalten, den *Spaltenvektoren*. Die Vektoroperationen drücken sich verblüffend einfach in Spaltenvektoren aus, was wir unter anderem mit Hilfe des Satzes des Pythagoras und des Kosinussatzes herleiten werden. Aus den Operationen der Spaltenvektoren kann man leicht die Rechenregeln der Vektoroperationen ablesen, sie entsprechen denen der Zahlen.
Diese Regeln ermöglichen nun die äußerst effiziente Lösung geometrischer Aufgaben. So wird beispielsweise der Kosinussatz überflüssig, er erscheint nun im Gewande der zweiten binomischen Formel.

Der Text besteht aus sechs Kapiteln. Das zweite Kapitel befasst sich mit Vektoren in der Ebene. Alle wesentlichen Aspekte der Vektoren und Vektoroperationen, einschließlich des Skalarproduktes, lassen sich in der Ebene verstehen. Die Übertragung auf den Raum ist dann nicht mehr schwierig und wird im dritten Kapitel dargelegt. Im Raum kommt jedoch noch das Vektorprodukt hinzu, das zunächst etwas sperrig erscheint. Es erweist sich aber als äußerst praktisches und leicht anzuwendendes Werkzeug. Im vierten und fünften Kapitel wird die Vektorrechnung auf Geraden bzw. Ebenen angewendet, Abstände und Schnittgebilde werden bestimmt. Schließlich gibt das sechste und letzte Kapitel einen Einblick in die Benutzung von Vektoren in der Physik.

2. Vektorrechnung in der Ebene

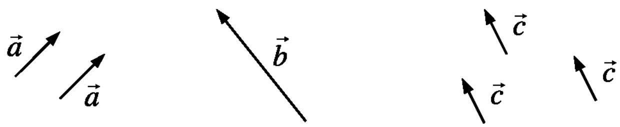
Wir betrachten im Wesentlichen drei Themen:

- Vektoren
- Grundlegende Vektoroperationen
  - Addition
  - Subtraktion
  - Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)
- Skalarprodukt

2.1 Vektoren

Was sind Vektoren?

Vektoren sind anschaulich betrachtet *Pfeile*. Sie sind durch ihre Richtung und Länge festgelegt.



Parallel verschobene Pfeile stellen ***denselben*** Vektor dar, da ihre Richtung und Länge übereinstimmen.

Vektoren werden üblicherweise durch kleine lateinische Buchstaben mit einem darüber stehenden Pfeil (der auch stilisiert sein kann, vor allem handschriftlich) bezeichnet. In Büchern werden Vektoren oft fett und ohne Pfeil gedruckt, theoretische Physiker unterstreichen die Vektoren:

$\vec{a}$	Pfeil
$\vec{a}$	stilisierter Pfeil (Handschrift)
$\boldsymbol{a}$	Fettdruck (Bücher)
$\underline{a}$	unterstrichen (Physiker)

Die Länge eines Vektors

Die *Länge* (oder der *Betrag*) eines Vektors ist die Länge des Pfeils. Sie wird mit Betragsstrichen oder durch Weglassen des Pfeils über dem Buchstaben:

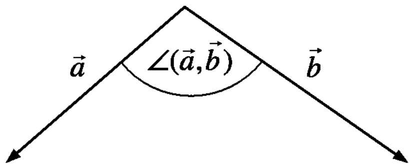
$$|\vec{a}| = a = \text{Länge des Vektors } \vec{a}\,.$$

Anmerkung

Da nun jeder lateinische Buchstabe prinzipiell als Länge eines Vektors (geschrieben als derselbe Buchstabe mit einem Pfeil darüber) vorkommt, wählt man oft ***griechische*** Buchstaben für ***Skalare***.

Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Man verschiebt die zwei Vektoren so, dass sie an einem gemeinsamen Punkt starten. Der dadurch gebildete Winkel im Bereich von 0° bis 180° ist „der Winkel zwischen den beiden Vektoren“:

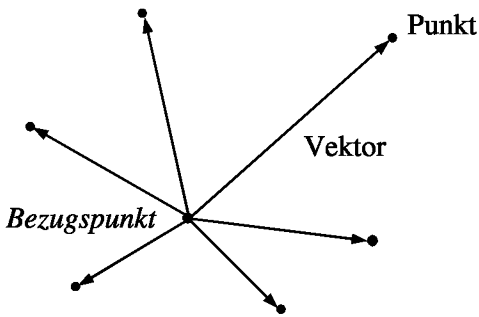


Anwendungen von Vektoren

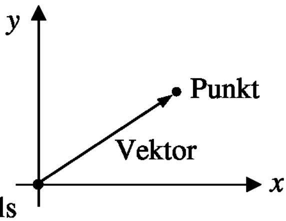
Vektoren haben grundsätzlich zwei Anwendungen:

1.) Die Beschreibung von Größen, die mit einer ***Richtung*** versehen sind. (Z.B. Kraft, Windgeschwindigkeit, Geraden, u. a.)

2.) Die Beschreibung von ***Punkten***. Dabei werden alle Vektoren so verschoben, dass sie in einem festen Bezugspunkt starten. Die Pfeilspitzen grasen dann alle Punkte in der Ebene ab:



Oft ist der Bezugspunkt einfach der Ursprung eines gegebenen Koordinatensystems:



Koordinatenursprung als *Bezugspunkt*

Die verschiedene Benutzung von Vektoren wird gelegentlich auch sprachlich ausgedrückt: Dient ein Vektor zur Darstellung einer Richtung, so spricht man von einem „Richtungsvektor". Soll ein Vektor einen Punkt beschreiben, so nennt man ihn „Ortsvektor".

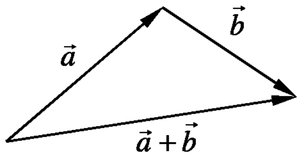
2.2 Vektoroperationen

Wir werden nun die drei grundlegenden Vektoroperationen betrachten:

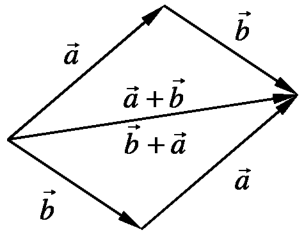
- Addition von Vektoren
- Subtraktion von Vektoren
- Multiplikation mit einem Skalar (Zahl)

<u>Addition von Vektoren</u>

Zur Addition von zwei Vektoren setzt man sie hintereinander (was durch paralleles Verschieben möglich und erlaubt ist). Eine analoge Alltagssituation ist folgende: Ein Flug von Frankfurt nach New York plus ein Flug von New York nach Mexiko-Stadt entspricht einem (natürlich kürzeren) Direktflug von Frankfurt nach Mexiko-Stadt.



Vertauscht man die beiden Summanden, so ändert sich das Ergebnis nicht. Das folgende Parallelogramm beweist diese Aussage:



Subtraktion von Vektoren

Bei Zahlen ist die Subtraktion die Umkehrung der Addition (wegnehmen statt hinzufügen). Zieht man von einer Zahl a erst die Zahl b ab und fügt anschließend wieder die Zahl b hinzu, so bekommt man die Ausgangszahl a:

$$a-b+b = a.$$

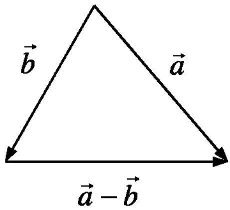
Man kann die Summanden auch vertauscht hinschreiben:

$$b + a - b = a\,.$$

Diese Überlegungen lassen sich auf Vektoren übertragen und geben Auskunft über die Vektordifferenz $\vec{a} - \vec{b}$:

$$\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{a}\,.$$

Die Addition des Vektors $\vec{b}$ und der Vektordifferenz $\vec{a} - \vec{b}$ wird durch Hintereinandersetzen dargestellt und ergibt den Vektor $\vec{a}$:



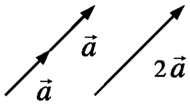
Dieses Bild enthält die praktische Regel zur Subtraktion von Vektoren:

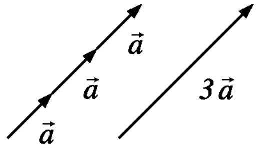
Zur Subtraktion von zwei Vektoren verschiebt man sie so, dass sie an einem gemeinsamen Punkt starten. Dann verbindet man die beiden Pfeilspitzen. Die Pfeilspitze des Differenzvektors liegt beim erstgenannten Vektor.

Multiplikation mit einem Skalar (Zahl)

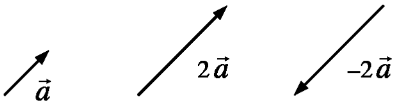
Überträgt man die vom Rechnen mit Zahlen bekannten Vorstellungen und Regeln, so kann man verstehen, wie man einen Vektor mit einer Zahl multipliziert:

$$2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}, \quad 3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}, \quad \text{usw.}$$





Beim Multiplizieren eines Vektors mit einem positiven Skalar (Zahl) wird nur die Länge des Vektors geändert. Ist der Skalar negativ, so kehrt sich die Richtung um:



In der Mathematik stehen die Skalare meist links vor dem Vektor. Physiker und andere Anwender sind pragmatischer und schreiben sie auch rechts, oder in den Nenner eines Bruches, dessen Zähler ein Vektor ist:

$$\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{2}.$$

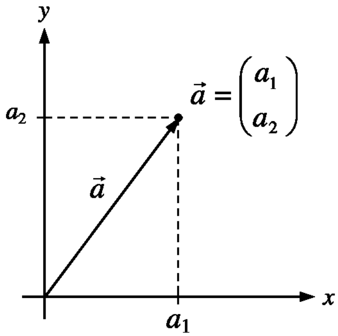
Anmerkungen:

1. Die Umkehrung der Vektorrichtung bei der Multiplikation mit einem negativen Skalar ist in Koordinaten leicht nachzuvollziehen. Sie folgt auch aus der Subtraktion, z.B.: $-2\vec{a} = 2\vec{a} - 4\vec{a}$.

2. Multipliziert man einen Vektor mit Null, so kommt ein Vektor der Länge Null heraus, der ***Nullvektor*** $\vec{0}$. Beim Nullvektor ist der Pfeil praktisch zu einem Punkt geworden, Anfang und Ende des Pfeils stimmen überein.

2.3 Vektoren in Koordinaten

Wir benutzen nun ein Koordinatensystem, um Vektoren durch Zahlen (Koordinaten, Komponenten) zu beschreiben. Dazu verschieben wir die Vektoren so, dass sie im Koordinatenursprung (als Bezugspunkt) starten, Die Pfeilspitzen bestimmen dann Punkte, deren Koordinaten werden als *Koordinaten* (oder *Komponenten*) *der Vektoren* bezeichnet.

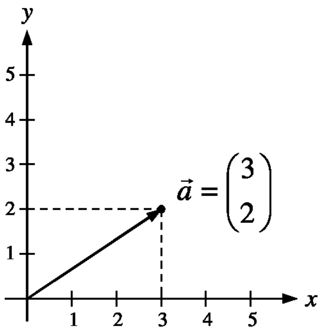


Die Spalte $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wird als *Spaltenvektor* bezeichnet. a_1, a_2 werden als *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors $\vec{a}$ bezeichnet.

Wir betrachten ein konkretes Beispiel. Der Vektor $\vec{a}$ ist gegeben durch den Spaltenvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Im Koordinatensystem sieht der Vektor wie folgt aus:



2.4 Vektoroperationen in Koordinaten

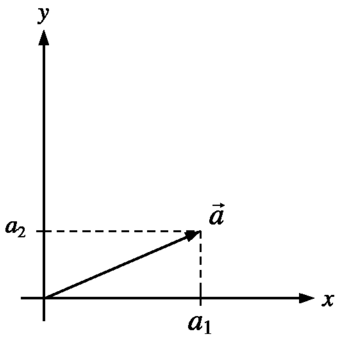
Wie drücken sich die Vektoroperationen aus, wenn die Vektoren als Spaltenvektoren gegeben sind? Die Antworten sind verblüffend einfach, sie sind die einfachsten, die man sich vorstellen kann.

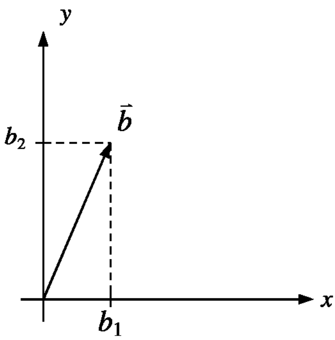
Die Addition von Vektoren in Koordinaten

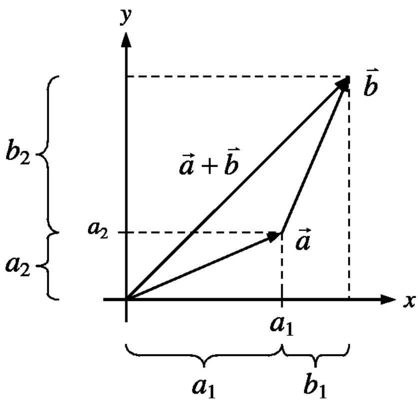
Man addiert zwei Vektoren, indem man ihre Komponenten addiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Die Begründung beruht auf der Definition der Definition der Vektoraddition und kann an den folgenden Bildern abgelesen werden:







<u>**Folgerung: Subtraktion von Vektoren in Koordinaten**</u>

Da die Subtraktion die Umkehrung der Addition ist, gilt:

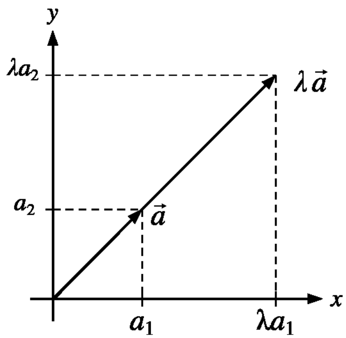
$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Man multipliziert einen Vektor mit einem Skalar, indem man seine Komponenten mit dem Skalar multipliziert:

$$\lambda\vec{a} = \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}.$$

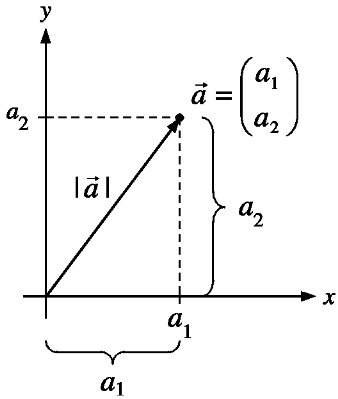
Die Begründung kann an den folgenden Bildern abgelesen werden durch die Anwendung der Strahlensätze oder (praxisbezogener) durch Betrachtung der vorkommenden ähnlichen Dreiecke, die sich um den Faktor λ unterscheiden. Es ist zu beachten, dass $\lambda\vec{a}$ λ-mal länger ist als $\vec{a}$.



Die Länge eines Vektors in Koordinaten

Die Länge eines Vektors ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras. Um die lästige Wurzel zu vermeiden, notieren wir das Quadrat der Länge:

$$|\vec{a}|^2 = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2$$



2.5 Skalarprodukt

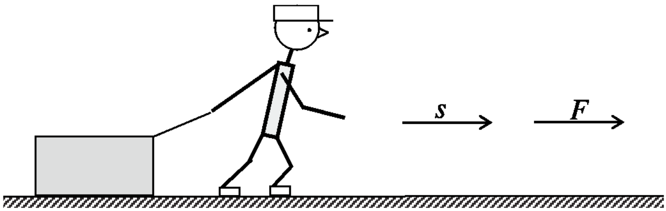
Definition des Skalarproduktes

Die Definition des Skalarproduktes kann man gut am physikalischen Begriff der Arbeit nachvollziehen.

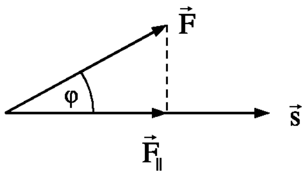
Betrachten wir den abgebildeten Handwerker, der eine Kiste zieht. Er verrichtet dabei Arbeit, die mit der Strecke und der Kraft zunimmt, gemäß der Formel:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft mal Weg}$$
$$W = F \cdot s$$

Bei dieser Formel muss die Kraft parallel zur Bewegungsrichtung sein.



Wenn die Kraft eine andere Richtung als die Bewegung hat, zerlegt man die Kraft in einen senkrechten und einen parallelen Anteil (bezogen auf die Bewegung):



Nun kann die obige Formel für die Arbeit angewendet werden:

$$\text{Arbeit} = \text{paralleler Kraft-Anteil mal Weg}$$

$$W = |\vec{F}_{\|}| \cdot |\vec{s}|$$

$$W = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi \cdot |\vec{s}|$$

$$W = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi \cdot |\vec{s}|$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\angle(\vec{F},\vec{s})$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Im letzten Schritt wurde die Arbeit als „Produkt“ der *Vektoren* $\vec{F}$ und $\vec{s}$ geschrieben.

Also:

$$W = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{s}}_{\text{„Skalarprodukt“}} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\angle(\vec{F},\vec{s})$$

Dies legt die folgende allgemeine Definition des Skalarproduktes von zwei beliebigen Vektoren nahe:

Definition:
Das ***Skalarprodukt*** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a},\vec{b})}$$

Anmerkungen

Wir werden sehen, dass das Skalarprodukt tatsächlich den Namen „Produkt“ verdient, weil man ausmultiplizieren kann. Diese Eigenschaft gehört zu „Harmonie“, die Grassmann so beeindruckte.

Wir betrachten nun zwei interessante und wichtige Sonderfälle:

- Das Skalarprodukt zweier aufeinander *senkrechter* Vektoren
- Das Skalarprodukt *gleicher* Vektoren

Das Skalarprodukt senkrechter Vektoren

Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei aufeinander senkrechte Vektoren (symbolisch $\vec{a} \perp \vec{b}$). Ihr Skalarprodukt ist:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ für senkrechte Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Das Skalarprodukt gleicher Vektoren

Zur Abkürzung kann man das Skalarprodukt von zwei gleichen Vektoren als Quadrat schreiben:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$$

Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{a})\\ &= |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ\\ &= |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot 1\\ &= |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|}$$

Die Länge eines Vektors kann also aus dem Skalarprodukt gewonnen werden.

Das Skalarprodukt in Koordinaten

Das Skalarprodukt drückt sich in Koordinaten verblüffend einfach aus, die entsprechenden Komponenten werden multipliziert und dann addiert man diese Produkte:

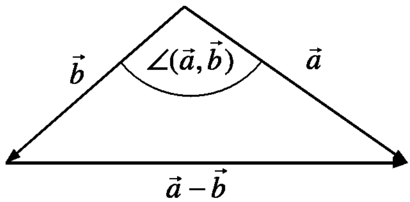
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Überraschenderweise taucht nichts Trigonometrisches mehr auf.

Wir leiten dieses Ergebnis nun her. Wir benutzen dabei den Kosinussatz und die Vektorlänge in Koordinaten.

Herleitung

Der Grundgedanke ist die Anwendung des Kosinussatzes auf das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildete Dreieck.



$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Der Term $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ ist nichts anderes als das Skalarprodukt, also:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Wir lösen nun nach $2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ auf:

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ |\vec{a}-\vec{b}|^2 + 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\ 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

Wir drücken die Vektorlängen in Koordinaten aus:

$$2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right|^2 - \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right|^2$$

$$2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right|^2 - \left|\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}\right|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) \\ -(a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2)$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 \\ - a_2^2 + 2a_2b_2 - b_2^2$$

$$= 2a_1b_1 + 2a_2b_2$$

Also:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$$

Damit ist die Formel für das Skalarprodukt in Koordinaten bewiesen.

Indem man zu Spaltenvektoren übergeht, kann man nun mühelos die Rechenregeln für das Skalarprodukt herleiten. Die Durchführung sei dem Leser als lehrreiche Übungsaufgabe überlassen. Zusammengefasst besagen die Regeln, dass man Vektoren genau so handhaben kann, wie man es bei Buchstaben in der Algebra gewohnt ist.

Regeln für das Skalarprodukt

1. Faktoren sind *vertauschbar*:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

2. *Ausmultpliziern* ist möglich (daher „Skalar**produkt**"):

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

3. *Skalare* sind im Produkt frei *beweglich* (Klammern sind hier also nicht nötig):

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Anmerkungen

Bei obiger Herleitung wurde der Kosinussatz in die Gestalt

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 - 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

gebracht. Die Längenquadrate können als Skalarprodukte geschrieben werden:

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Dies ist nun nichts weiter als die vektorielle Version der zweiten *binomischen Formel.* Sie ersetzt den *Kosinussatz.*

Die strategische Bedeutung des Skalarproduktes

Die Berechnung von Längen und Winkeln ist eine der Hauptaufgaben der praktischen Geometrie. Längen und Winkel können durch das Skalarprodukt ausgedrückt (und berechnet) werden:

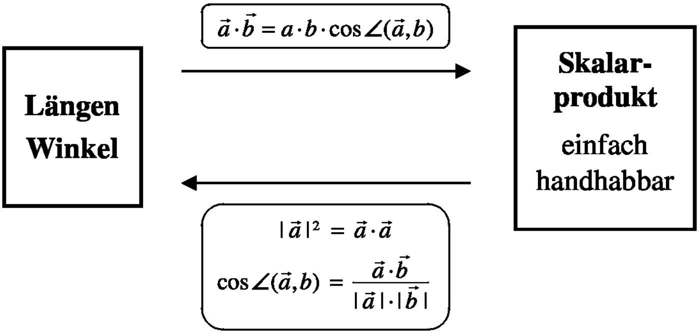
Länge: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$

Winkel: $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Die Formel für den Winkel ist nichts anderes als die umgestellte Definitionsgleichung des Skalarproduktes.

Mit dem Skalarprodukt (zusammen mit den anderen Vektoroperationen) kann man nun genauso effizient rechnen wie in der üblichen Algebra.

Das nachstehende Schaubild fasst das Gesagte zusammen:



Die Einfachheit und Effizienz des Skalarproduktes werden wir nun an mehreren Beispielen zeigen.

Beispiele 1

Berechne Skalarprodukte der Spaltenvektoren:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 3+8 = 11$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 = -2+2 = 0$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) = 15 - 15 = 0$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5$

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25$

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = xy + y \cdot (-x) = xy - xy = 0$

Beispiel 2

Berechne die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$|\vec{a}|^2 = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Also:

$$|\vec{a}| = \sqrt{25} = 5$$

Beispiel 3

Berechne den Winkel φ zwischen den beiden Vekotren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Ansatz: Definition des Skalarproduktes:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\cos\varphi$$

$$1\cdot 3+1\cdot 4 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{25}\cdot\cos\varphi$$

$$7 = \sqrt{2}\cdot 5$$

$$\cos\varphi = \frac{7}{5\cdot\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi \approx 0{,}98994949$$

$$\varphi \approx 8{,}13°$$

Die folgenden zwei Beispiele würde man elementar anhand einer Zeichnung und durch Trigonometrie am schiefwinkligen Dreieck lösen. Wir benutzen aber das Skalarprodukt.

Beispiel 4

Gegeben: Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ mit $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 45°$.

Gesucht: Länge des Summenvektors $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$.

Lösung:

Ansatz: Drücke die Länge durch das Skalarprodukt aus. Rechne dann wie in der Algebra üblich.

$$
\begin{aligned}
c^2 &= |\vec{a}+\vec{b}|^2 \\
&= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
&= 3^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3^2 \\
&= 18 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}
\end{aligned}
$$

Benutze nun die Definition des Skalarproduktes:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= 18 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} \\
&= 18 + 2\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 45^\circ \\
&\approx 18 + 2\cdot 3\cdot 3\cdot 0{,}70710678 \\
&\approx 30{,}72792204 \\
c &\approx 5{,}543
\end{aligned}
$$

Beispiel 5

Gegeben: Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ mit $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ und $|\vec{a}+\vec{b}|=6$.

Gesucht: Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Lösung:

1. Berechne das Skalarprodukt $\vec{a}\bullet\vec{b}$:

Ansatz: Drücke die Länge von $\vec{a}+\vec{b}$ durch das Skalarprodukt aus:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

Da diese Länge 6 beträgt haben wir nun:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 6^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = 36$$

$$a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2 = 36$$

$$3^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4^2 = 36$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} + 25 = 36$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = 11$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5,5$$

2. Berechne den Winkel $\varphi = \angle(\vec{a},\vec{b})$:

Ansatz: Definition des Skalarproduktes:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$5,5 = 3\cdot 4\cdot\cos\varphi$$

$$5,5 = 12\cdot\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{5,5}{12} = 0,458333...$$

$$\varphi \approx 62,72°$$

Aufgaben

1. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne a, b, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ und den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

2. Berechne den Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Berechne jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $a=2,\ b=3$ und $\angle(\vec{a},\vec{b})=40°$

b) $a=3,\ b=4$ und $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$

c) $a=5,\ b=7$ und $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$

d) $a=3,\ b=5$ und $\angle(\vec{a},\vec{b})=110°$

4. Berechne jeweils den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $a=3,\ b=2$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

b) $a=2,\ b=4$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}=7$

c) $a=3,\ b=5$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$

5. Berechne zuerst das Skalarprodukt und dann den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $a=4,\ b=2$ und $|\vec{a}+\vec{b}|=5$

b) $a=4,\ b=3$ und $|\vec{a}+\vec{b}|=4$

c) $a=2,\ b=3$ und $|\vec{a}-\vec{b}|=4$

d) $a = 1$, $b = 4$ und $|3\vec{a} - \vec{b}| = 6$

6. Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechne jeweils a, b, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\angle(\vec{a}, \vec{b})$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

7. Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt 40°, ferner ist $a = 2$ und $b = 3$. Berechne $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$, $\angle(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a})$.

8. Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $a = 3$, $b = 4$ und $|\vec{a} - \vec{b}| = 6$. Berechne $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, $\angle(\vec{a}, \vec{a} - \vec{b})$.

9. Zwei Vektoren haben die Beträge 4 und 6, ihre Summe hat den Betrag 9. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

10. Der Winkel zwischen zwei Vektoren beträgt 30°, der Differenzvektor hat die Länge 6. Einer der Vektoren hat die Länge 4 . Wie lang ist der andere Vektor?

11. Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 83 \\ -25 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 25 \\ 83 \end{pmatrix}$

12. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander. Berechne x.

13. Zwei Vektoren haben die Längen 5 und 3, ihre Summe hat die Länge 4. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

14. Zwei Vektoren haben die Längen 6 und 9, ihre Differenz hat die Länge 13. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

15. Zwei Vektoren haben die Längen 7 und 6, ihre Summe hat die Länge 12. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

16. Der Winkel zwischen zwei Vektoren der Längen 4 und 5 beträgt 50°. Wie lang ist der Summenvektor?

17. Der Winkel zwischen zwei Vektoren der Längen 3 und 6 beträgt 70°. Wie lang ist der Differenzvektor?

18. Der Winkel zwischen zwei Vektoren ist 60°, der Differenzvektor hat die Länge 8 . Einer der Vektoren hat die Länge 5. Wie lang ist der andere Vektor?

19. Der Winkel zwischen zwei Vektoren ist 40°, die Vektorsumme hat die Länge 6. Einer der Vektoren hat die Länge 4. Wie lang ist der andere Vektor?

20. Berechne den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

21. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ x \end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander. Berechne x.

22. Finde mindestens drei Vektoren, die senkrecht auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ stehen.

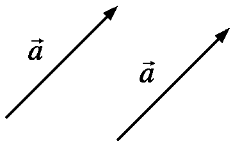
23. Der Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}$ beträgt 45°. Berechne x.

24. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zerlege $\vec{a}$ in einen zu $\vec{b}$ parallelen Vektor $\lambda\vec{b}$ und einen zu $\vec{b}$ senkrechten Vektor $\vec{a}_\perp$, also: $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \vec{a}_\perp$. Berechne λ, dann $\lambda\vec{b}$ und schließlich $\vec{a}_\perp$. (Tipp: Multiplikation der Gleichung mit $\vec{b}$.)

3. Vektorrechnung im Raum

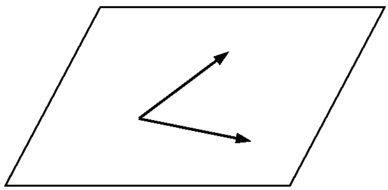
3.1 Vektoren im Raum

Auch Vektoren im Raum sind Pfeile. Parallel verschobene Pfeile stellen denselben Vektor dar:



Alles, was über Vektoren in der Ebene gesagt wurde, lässt sich auf Vektoren im Raum übertragen.

Selbst der etwas schwieriger erscheinende Fall des Winkels zwischen zwei Vektoren erweist sich als bekannt. Um den Winkel zu bestimmen, muss man die Vektoren so verschieben, dass sie in einem gemeinsamen Punkt beginnen. Dann liegen sie bereits automatisch in einer Ebene:



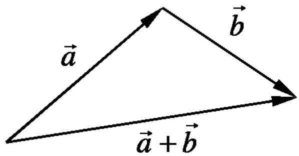
3.2 Vektoroperationen im Raum

Wir werden nun die aus der Ebene bekannten Operationen betrachten; sie lassen sich mühelos auch im Raume durchführen:

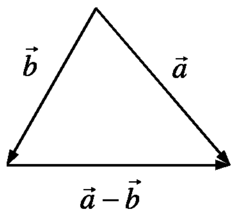
- Addition von Vektoren
- Subtraktion von Vektoren
- Multiplikation mit einem Skalar
- Skalarprodukt

Das *Vektorprodukt*, das nur im Raum möglich ist, wird später betrachtet.

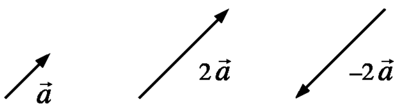
Addition von Vektoren:



Subtraktion von Vektoren:



Multiplikation mit einem Skalar

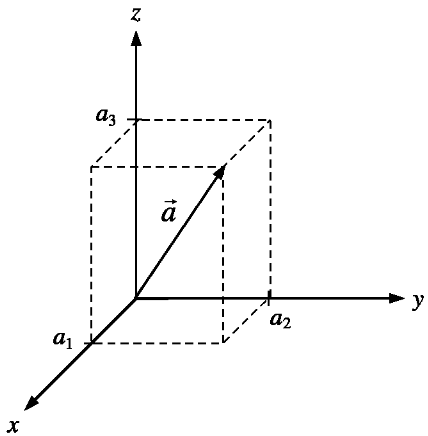


Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

3.3 Vektoren in Koordinaten

Wir benutzen ein ***drei***dimensionales Koordinatensystem mit den Achsen x, y und z. Alles andere ist wie in der Ebene. Die Vektoren werden so verschoben, dass sie im Koordinatenursprung (als Bezugspunkt) starten; die Koordinaten der Pfeilspitzen sind dann die *Koordinaten* (oder *Komponenten*) der *Vektoren*.



Der Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ hat nun *drei* Komponenten.

3.4 Vektoroperationen in Koordinaten

Auch bei der Koordinatendarstellung der Vektoroperationen ändert sich wenig beim Übergang von der Ebene zum Raum. Nur die Anzahl der Koordinaten erhöht sich von zwei auf drei Koordinaten.

Addition:

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion:

$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalar:

$$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors:

$$|\vec{a}|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Anmerkungen

1. Wir haben ein sogenanntes rechtshändiges (oder positiv orientiertes) Koordinatensystem gewählt. Bei der rechten Hand zeigen der gespreizte Daumen, Zeige- und Mittelfinger die Richtung der x-, y- und z-Achse an. Eine andere Beschreibung ist folgende: Wenn die Koordinatenachsen auf den Zuschauer zeigen, so sind die x-, y- und z-Achse gegen den Uhrzeigersinn angeordnet.

2. Die Formel für die Länge ergibt sich aus der zweimaligen Anwendung des Satzes von Pythagoras. Es handelt sich um die Berechnung der Raumdiagonale eines Quaders.

3.5 Vektorprodukt

<u>Die Herkunft des Vektorproduktes</u>

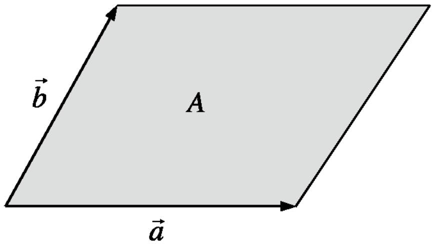
Grassmanns Ansatz beim Vektorprodukt war, die Formel für die Rechtecksfläche,

Fläche $=$ Länge mal Breite

oder

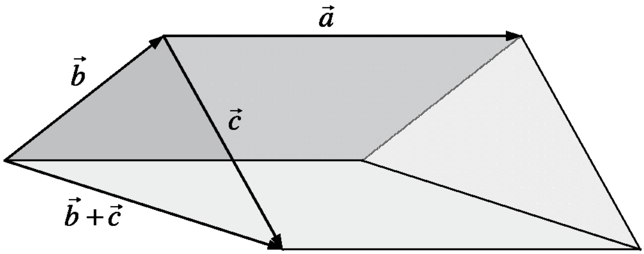
$A = ab,$

auf Parallelogramme zu übertragen. Diese Fläche hängt nicht nur von den Seitenlängen *a* und *b*, sondern auch von der *Richtung* der Seiten. Die Zahlen *a* und *b* ersetzt er daher durch *Vektoren*.



Die Fläche ist im Wesentlichen $= \vec{a}$ mal $\vec{b}$.

Das Vektorprodukt soll ein Produkt sein (man soll ausmultiplizieren können). An dem Beispiel in der folgenden Skizze sieht man, dass das Produkt nicht direkt die Fläche des Parallelogramms sein kann. Denn hier gilt offenbar $\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} \;>\; \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.



Die Fläche des hinteren Teils des Daches wäre $\vec{a}\times\vec{b}$, die Fläche des vorderen Dachteils $\vec{a}\times\vec{c}$ und die Fläche des Bodens $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.

Da die gesamte Dachfläche offenbar größer als die Bodenfläche ist, kann die Beziehung

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

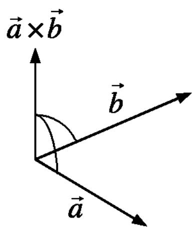
nicht zutreffen. Das Vektorprodukt kann nicht einfach der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms sein.

Man ist gezwungen, die Richtung (Neigung) der Parallelogramme einzubeziehen. Die einfachste Art, diese Neigung zu Beschreiben, ist ein zum Parallelogramm senkrechter Vektor; dieser steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. So gelangt man zu folgender Definition des Vektorprodukts:

Definition des Vektorproduktes

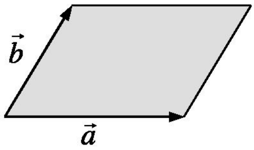
Das *Vektorprodukt* $\vec{a}\times\vec{b}$ ist der Vektor, der durch folgende drei Bedingungen eindeutig bestimmt ist:

1. $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$:

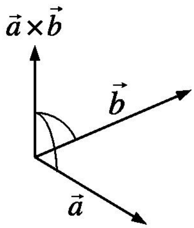


2. Die Länge von $\vec{a}\times\vec{b}$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelgramms:

$$|\,\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$$



3. Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden (in dieser Reihenfolge!) ein rechtshändiges System:



Das Vektorprodukt in Koordinaten

Obwohl die Definition des Vektorprodukts kompliziert ist, stellt sich heraus, dass seine Koordinatendarstellung verblüffend einfach ist, sie enthält nur Multiplikationen und Subtraktionen von Koordinaten. Die Herleitung wird allerdings etwas mühsam sein.

Zunächts formulieren wir das Vektorprodukt in Koordinaten, dann erläutern wir die Struktur und die praktische Umsetzung. Schließlich leiten wir die Formel her.

Das Vektorprodukt in Koordinaten lautet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Diese auf den ersten Blick recht komplizierte Formel hat eine ***einfache Struktur***, die einprägsam und gut anwendbar ist. Dier Formel selber muss man daher nicht auswendig lernen.

1.
Soll die **erste** Komponente berechnet werden, so deckt man die **ersten** Komponenten der Faktoren zu:

$$\begin{pmatrix} * \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Die verbleibenden Zahlen werden über Kreuz multipliziert und abgezogen, nach dem Motto „Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“, anschaulich dargestellt:

$$\diagdown \; - \; \diagup$$

Also konkret: $a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2$

2.
Soll die **letzte** Komponente berechnet werden, so deckt man die **letzten** Komponenten der Faktoren zu:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ ? \end{pmatrix}$$

Die verbleibenden Zahlen werden über Kreuz multipliziert und abgezogen, nach dem Motto „Hauptdiagonale minus Nebendiagonale", anschaulich dargestellt:

$$\diagdown \; - \; \diagup$$

Also konkret: $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

3.
Soll die **mittlere** Komponente berechnet werden, so deckt man die **mittleren** Komponenten der Faktoren zu:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ * \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ * \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ ? \\ * \end{pmatrix}$$

Die verbleibenden Zahlen werden über Kreuz multipliziert und abgezogen, aber **umgehrt**, nach dem Motto „Nebendiagonale minus Hauptdiagonale", anschaulich dargestellt:

$$\diagup \; - \; \diagdown$$

Also konkret: $a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3$

Mit diesen Einsichten kann man Vektorprodukte schnell und effizient berechnen. Wie gesagt, muss die Formel nicht auswendig gelernt werden; man kann sie trotzdem aus dem Kopf hinschreiben, wenn man die Struktur verstanden hat.

Herleitung der Vektorprodukt-Formel in Koordinaten

Wir bezeichnen die gesuchten Komponenten des Vektorproduktes mit x_1, x_2 und x_3. Also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Wir benutzen nacheinender die drei Bedingungen aus der Definition des Vektorproduktes.

1. Der Vektor $\vec{x}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Dann sind die entsprechenden Skalarprodukte Null:

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{x} \cdot \vec{b} = 0\,.$$

In Koordinaten lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 &= 0 \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit **drei** Unbekannten. Eine Unbekannte, zum Beispiel x_3, können wir als frei wählbar betrachten und die Unbekannten x_1 und x_2 berechnen. Das elementare Additionsverfahren liefert dann für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 a_1 + x_2 a_2 &= -x_3 a_3 \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 &= -x_3 b_3 \end{aligned}$$

die Lösung

$$x_1 = \frac{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} x_3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} x_3 .$$

Also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} x_3 \\ \dfrac{a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Da x_3 frei wählbar ist, trifft dies auch für

$$\lambda = \frac{x_3}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$$

zu. Damit erhalten wir als Ergebnis:

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix},$$

wobei der Skalar λ noch nicht festgelegt ist.

Nun werden wir λ bis auf das Vorzeichen berechnen.

2. Die Länge von $\vec{x}$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

a) Wir leiten eine vektorielle Formel für die Fläche A des Parallelogramms her:

$$A = a \cdot Höhe$$

$$A = a \cdot b \cdot \sin\varphi \qquad |\, \varphi = \angle(\vec{a},\vec{b}),\ \text{quadrieren}$$

$$A^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot (\sin\varphi)^2 \qquad |\, (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$$

$$A^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - \cos\varphi)^2 \qquad |\, \text{ausmultiplizieren}$$

$$A^2 = a^2 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^2 \cdot (\cos\varphi)^2 \qquad |\, \text{umformen}$$

$$A^2 = a^2 \cdot b^2 - (a \cdot b \cdot \cos\varphi)^2 \qquad |\, \text{Def. Skalarprodukt}$$

$$A^2 = a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

b) Länge von $\vec{x}$ muss die Fläche A sein. Also:

$$x = A$$

$$x^2 = A^2$$

$$\left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right|^2 = a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\left|\lambda \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}\right|^2 = a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Wie ziehen der Faktor λ vor und erhalten:

$$\lambda^2 \left| \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \right|^2 = a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Die linke Seite ist ohne den Faktor λ^2:

$$\left| \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2$$

Die rechte Seite ist:

$$a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 =$$

$$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) \cdot (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2) - (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)^2$$

Wenn man alle Klammern ausmutlipliziert, erkennt man, dass beide Seiten übreinstimmen. Also muss $\lambda^2 = 1$ sein. Für λ kommen nur die Werte 1 und -1 in Frage. Daher ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

3. Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein rechtshändiges System

Um das richtige Vorzeichen herauszubekommen, betrachten wir möglichst einfache Beispielvektoren (parallel zur x- bzw. y-Achse):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das von ihnen aufgespannte Parallelogramm ist ein Quadrat mit Seiten der Länge 1, die Fläche ist also 1.

Der Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (weil die Skalarprodukte offenbar Null sind), hat die Länge 1 und $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden ein rechtshändiges System. Somit ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Andererseits ergibt die Anwendung der allgemeinen Formel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix},$$

dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Vorzeichen muss also positiv sein, die richtige Formel ist daher:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}.$$

Die Herleitung ist damit beendet.

Indem man zu Spaltenvektoren übergeht, kann man nun mühelos die Rechenregeln für das Vektorprodukt herleiten. Die Durchführung sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Zusammengefasst besagen die Regeln, dass man mit dem Vektoren weitgehend wie mit dem Produkt von Zahlen umgehen kann. Allerdings gibt es dabei zwei wichtige Ausnahmen:

1. Wenn man die Faktoren des Vektorproduktes ***vertauscht***, so ändert sich das ***Vorzeichen***:
   $$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\,.$$

2. Bei zweifachen Vektorprodukten hängt das Ergebnis von der Klammerung ab. ***Klammern*** dürfen also ***nicht weggelassen*** werden. Im allgemeinen ist leider
   $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\,.$$

Einfache Regeln für das Vektorprodukt

1. Faktorentausch mit *Vorzeichenwechsel*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. *Ausmultpliziern* ist möglich (daher „Vektor**<u>produkt</u>**"):

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

3. *Skalare* sind im Produkt frei *beweglich* (Klammern sind hier also nicht nötig):

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\times\vec{b}$$

Wir betrachten nun Beispiele zum Vektorprodukt.

Beispiele 1

Berechne die Vektorprodukte der Spaltenvektoren:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 2-3\cdot 2\\3\cdot 1-1\cdot 2\\1\cdot 2-2\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 3-3\cdot 2\\3\cdot 1-1\cdot 3\\1\cdot 2-2\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}\times\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\cdot a_3-a_3\cdot a_2\\a_3\cdot a_1-a_1\cdot a_3\\a_1\cdot a_2-a_2\cdot a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

d) $|\vec{a}\times\vec{a}| = a\cdot a\cdot\sin\angle(\vec{a},\vec{a}) = a\cdot a\cdot\sin 0° = 0$

Ein Vektor der Länge 0 ist der Nullvektor, also ist:

$$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$$

Beispiel 2

Berechne die Fläche A des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, wobei:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Fläche des Parallelogramms ist die Länge des Vektorproduktes:

$$A = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-9)^2 + 1^2 + 13^2} = \sqrt{251}.$$

Also: $A = \sqrt{251} \approx 15{,}84$.

Beispiel 3

Gesucht ist ein Vektor $\vec{c}$, der auf folgenden zwei Vektoren senkrecht steht:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Das Vektorprodukt steht senkrecht auf beiden Faktoren. Es ist also eine mögliche Lösung:

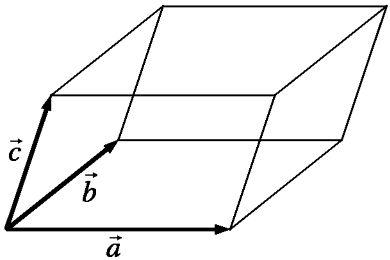
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 - 3\cdot 4 \\ 3\cdot 2 - 5\cdot 7 \\ 5\cdot 4 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -29 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Also: $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -29 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Beispiel 4

Gesucht ist das Volumen V des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds, wobei:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Lösung:

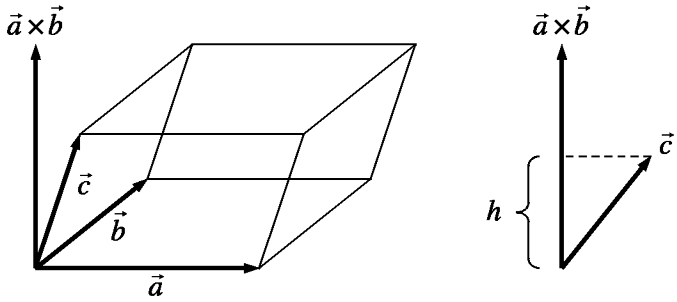
1. Allgemeine Formel für das Volumen

Für Quader, Prismen, Zylinder und Parallelepipede gilt:

Volumen = Grundfläche mal Höhe.

2. Die Höhe des Parallelepipeds

Die Höhe steht senkrecht auf der Grundfläche und damit auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, genau wie das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$. Die Höhe h ist daher die Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{a}\times\vec{b}$:



Für die Höhe gilt also:

$$h = |\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}).$$

3. Das allgemeine Volumen des Parallelepipeds

Die Grundfläche G ist das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm, also $G = |\vec{a}\times\vec{b}|$. Daher ist das Volumen:

$$\begin{aligned} V &= G\cdot h \\ &= |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}) \\ &= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \end{aligned}$$

Um auch Winkelverhältnisse zu berücksichtigen, bei denen der Kosinus (und daher das Skalarprodukt) negativ ist, müssen der Betragsstriche hinzugefügt werden:

$$V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

4. Das konkrete Volumen des Parallelepipeds

Man muss nur noch die konkreten Vektoren in die hergeleitete Formel einsetzen:

$$
\begin{aligned}
V &= |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,| \\
&= \left|\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix}-9\\1\\13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\right| \\
&= |-18+6+39| = 27
\end{aligned}
$$

Das Parallelepiped hat also ein Volumen von 27.

Anmerkung

Der Ausdruck $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ wird **Spatprodukt** genannt. Das männliche Substantiv „Spat“ bedeutet dabei einfach „Parallelepiped“.

Aufgaben

1. Berechne das Vektorprodukt von je zwei der folgenden Vektoren:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

2. Seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$. Berechne $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ und $\vec{b}\cdot\vec{c}$.

3. Berechne die Fläche des von $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

4. Gegeben: Drei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds (Spats) und die Winkel $\angle(\vec{a},\vec{b})$, $\angle(\vec{a},\vec{c})$, $\angle(\vec{b},\vec{c})$.

5. Gegeben: Drei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

a) Berechne : $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ und $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

b) Berechne: $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

4. Anwendung: Geraden

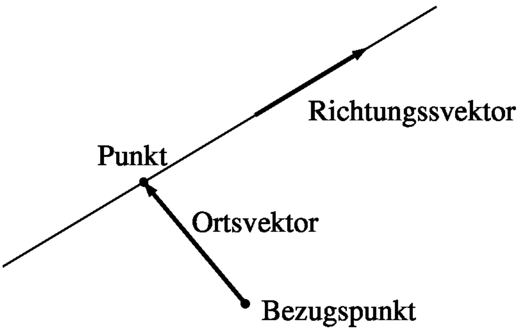
Wir werden folgende Themen betrachten:

- Vektorielle Beschreibung einer Geraden
- Schnittpunkte von Geraden
- Abstände von Geraden

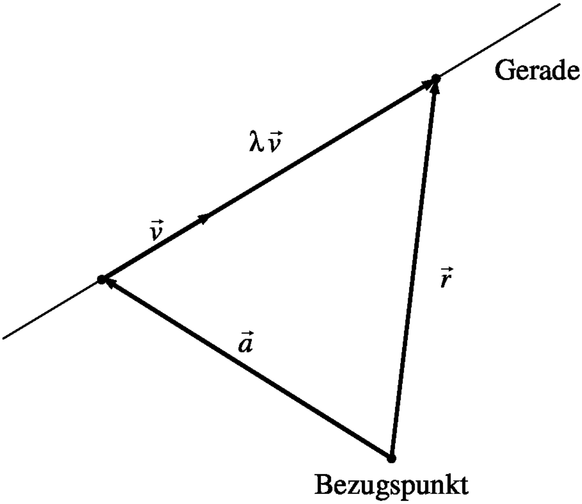
4.1 Vektorielle Beschreibung einer Geraden

Eine Gerade (in der Ebene oder im Raum) ist eindeutig durch ihre Richtung und einen festen Punkt bestimmt.

Die Richtung kann durch einen Vektor gegeben sein; die Länge des Vektors spielt dabei keine Rolle.
Der feste Punkt auf der Geraden kann ebenfalls durch einen Vektor („Ortsvektor“) dargestellt werden, wenn man einen Bezugspunkt festgelegt hat, von dem die Ortsvektoren ausgehen. Bei vorliegendem Koordinatensystem ist der Koordinatenursprung der Bezugspunkt.



Ist ein Richtungsvektor $\vec{v}$ gegeben und ein fester Punkt als Ortsvektor $\vec{a}$, so kann ***jeder Punkt*** $\vec{r}$ der Geraden mit ihrer Hilfe dargestellt werden. Der Orstvektor $\vec{r}$ wird auch als Radiusvektor bezeichnet.



$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$$

beliebiger Punkt auf der Geraden

Richtungsvektor

fester Punkt auf der Geraden

Wenn λ alle reellen Zahlen durchläuft, erfasst $\vec{r}$ alle Punkte der Geraden. Man sagt „λ ist ein freier Paramater“.

Wir betrachten nun Beispiele.

Beispiel 1

Gegeben: Punkte (in der Ebene): $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

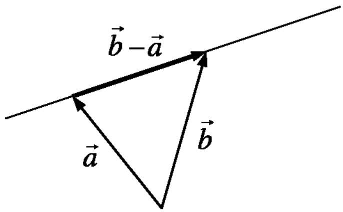
Gesucht: Eine Vektorielle Darstellung der Geraden, die durch die zwei Punkt geht.

Lösung:

Wir benötigen einen festen Punkt auf der Geraden und einen Richtungsvektor.

Fester Punkt: Wähle $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Richtungsvektor: $\vec{v}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$



Die konkreten Vektoren eingesetzt in

$$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{v},$$

ergibt die vektorielle Darstellung der Geraden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung

Es gibt ***unendliche viele*** mögliche ***vektorielle Darstellungen*** für eine Gerade. Man kann die Länge des Richtungsvektors verändern und man kann einen beliebigen anderen festen Punkt auf der Gerade wählen. Diese Freiheit kann man nutzen, um eine gegebene vektorielle Darstellung zu ***vereinfachen***. Zum Beispiel können wir bei der vektoriellen Darstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 103 \\ 105 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

den Richtungsvektor durch Multiplikation mit $\frac{1}{4}$ („Division durch 4") verkürzen auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit Hilfe der neuen Darstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 103 \\ 105 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

können wir mühelos einen „kleineren" festen Punkt auf der Gerade berechnen, indem man beispielsweise $\lambda = -100$ einsetzt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 103 \\ 105 \end{pmatrix} + (-100) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mit diesem Punkt lautet die vektorielle Darstellung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2
Gegeben: Geradengleichung (in der Ebene): $y = 2x+1$.
Gesucht: Eine Vektorielle Darstellung der Geraden.

Lösung:

In der Geradengleichung sind x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Geraden. Sie sind also die Koordinaten unseres Radiusvektors $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Setze nun $y = 2x+1$ ein und forme im Hinblick auf die vektorielle Darstellung um (trenne Terme, die x enthalten, ab; x spielt die Rolle von λ):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schreiben wir das übliche λ an Stelle des x, so erhalten wir die vektorielle Darstellung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3
Gegeben: Gerade in vektorieller Darstellung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht: Geradengleichung.

Lösung:

In der Geradengleichung sind x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Geraden. Sie sind also die Koordinaten unseres Radiusvektors $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dies eingesetzt in die gegebene vektorielle Darstellung der Geraden liefert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Um den Parameter λ loszuwerden, multiplizieren wir (im Sinne des Skalarproduktes) die Gleichung mit einem Vektor, der senkrecht zum Richtungsvektor ist.

Einen solchen zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor kann man gewinnen, indem die Komponenten vertauscht und eine davon mit einem Minus (Vorzeichenwechsel) versieht: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Denn: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$. Die beiden Vektoren stehen also senkrecht aufeinander.

Wir kehren nun wieder zur Geraden zurück und multiplizieren die vektorielle Dartsellung mit dem gefundenen senkrechten Vektor zum Richtungsvektor:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x \cdot (-2) + y \cdot 1 &= 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + \lambda \cdot 0 \\ -2x + y &= 1 + 0 \\ -2x + y &= 1 \\ y &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Die gesuchte Geradengleichung ist also: $y = 2x + 1$.

Anmerkung

Ein elementarer aber meist umständlicherer Lösungsweg wäre folgender: Man schreibt die vektorielle Dartsellung komponentweise hin, eliminiert λ aus dem sich ergebenden Gleichungssystem und löst nach y auf:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

In Komponenten geschrieben:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 1+2\lambda \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung setzen wir $\lambda = x$ ein:

$$\begin{aligned} y &= 1+2x \\ y &= 2x+1 \end{aligned}$$

4.2 Schnittpunkte von Geraden

Beispiel
Gegeben: Zwei Gerade in vektorieller Darstellung:

$$\text{Gerade 1:} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Gerade 2:} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht: Schnittpunkt $\vec{s}$ der Geraden.

Lösung:

Da $\vec{s}$ auf Gerade 1 liegt, ist $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da $\vec{s}$ auf Gerade 2 liegt, ist $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Man kann nicht erwarten, dass der Parameter des Punktes $\vec{s}$ auf der Geraden 2 denselben Parameter wie auf Gerade 1 hat. Daher muss der Buchstabe μ genommen werden (und nicht noch einmal λ).

Wir setzen nun beide Ergebnisse für $\vec{s}$ gleich:

$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

Wir möchten nun $\vec{s}$ als Mitglied der Gerade 1 berechnen. Dazu müssen wir λ berechnen, also μ eliminieren. Wir multiplizieren die Gleichung (im Sinne des Skalarproduktes) mit dem zu $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ senkrechten Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, damit μ verschwindet:

$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}-1+\lambda\cdot 2 &= -3+\mu\cdot 0\\ -1+2\lambda &= -3\\ 2\lambda &= -2\\ \lambda &= -1\end{aligned}$$

Also ist:

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist daher: $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.3 Abstände

Wir betrachten ein Beispiel für die Berechnung des Abstandes eines *Punktes* von einer Geraden. Die Methode kann direkt auf den Abstand zwischen zwei *parallelen Geraden* angewendet werden. Man muss nur einen Punkt aus einer der Geraden auswählen.

Die Berechnung des Abstandes windschiefer Geraden im Raum lässt sich besonders elegant und anschaulich mithilfe von Ebenen berechnen. Dies wird im nächsten Kapitel behandelt.

Beispiel 1
Gegeben: Eine Gerade g und ein Punkt P im Raum:

$$\text{Gerade } g: \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

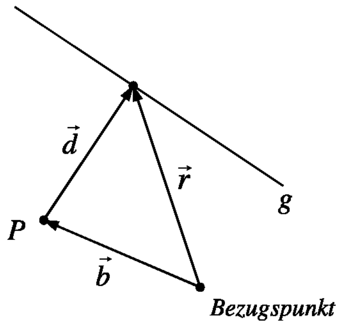
$$\text{Punkt } P: \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Gesucht: Abstand d zwischen P und g.

Lösung:

Betrachte den Punkt $\vec{r}$ auf der Geraden mit dem *kleinsten* Abstand zu $\vec{b}$.

Die Verbindungsstrecke zwischen $\vec{r}$ und P steht *senkrecht* auf der Geraden.



Der Vektor der Verbindungsstrecke ist:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{r} - \vec{b} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Er steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden, ihr Skalarprodukt $\vec{d} \cdot \vec{v} = 0$ ist also Null:

$$\vec{d} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2 - 85 - 3 + \lambda(4 + 25 + 1) = 0$$

$$-90 + 30\lambda = 0$$

$$30\lambda = 90$$

$$\lambda = 3$$

Nun können wir den Vektor der Verbindungsstrecke konkret berechnen:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daher: $d = |\vec{d}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25+4+0} = \sqrt{29}$

Der Abstand zwischen dem Punkt *P* und der Geraden *g* ist:

$$d = \sqrt{29} \approx 5{,}385 .$$

Anmerkung

In Kapitel 5.3 wird der Abstand zwischen Punkt und Gerade mit Hilfe eines Parallelogramms berechnet und so die Formel

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

für den Abstand *d* zwischen dem Punkt $\vec{b}$ und der Geraden mit der vektoriellen Darstellung $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{v}$ gewonnen.

Aufgaben

1. Finde die Geradengleichung:

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Finde die Geradengleichung und eine vektorielle Darstellung der Geraden g_1 und g_2:

a) g_1 geht durch die Punkte $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

b) g_2 geht durch die Punkte $\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3. Finde eine vektorielle Darstellung der beiden Geraden g_1 und g_2:

a) g_1 geht durch die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) g_2 geht durch die Punkte $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. Finde den Schnittpunkt der Geraden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Finde den Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

6. Die Gerade g geht durch $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ und schneidet die Gerade h: $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ senkrecht. Bestimme eine vektorielle Darstellung von g.

7. Finde den Abstand d zwischen der Geraden g und dem Punkt $\vec{P}$:

$$g\text{:}\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{P}=\begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}.$$

8. Finde den Abstand d zwischen den zwei Geraden:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

5. Anwendung: Ebenen

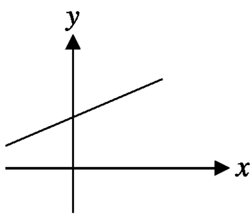
Wir werden folgende Themen betrachten:

- Vektorielle Beschreibung einer Ebene
- Schnittpunkte von Ebenen
- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

5.1 Vektorielle Beschreibung einer Ebene

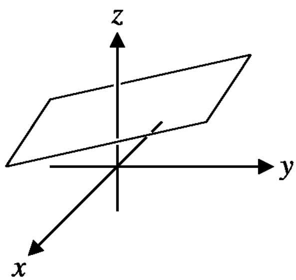
Wir betrachten zunächst die klassische Beschreibung von Gerade und Ebenen durch eine Gleichung:

<table>
<tr>
<th>Gerade
in der Ebene</th>
<th>Ebene
im Raum</th>
</tr>
<tr>
<td>



Geradengleichung
$y = ax + b$

</td>
<td>



Ebenengleichung
$z = ax + by + c$

</td>
</tr>
</table>

Eine Gerade in der Ebene kann elementar durch eine *Geradengleichung* wie

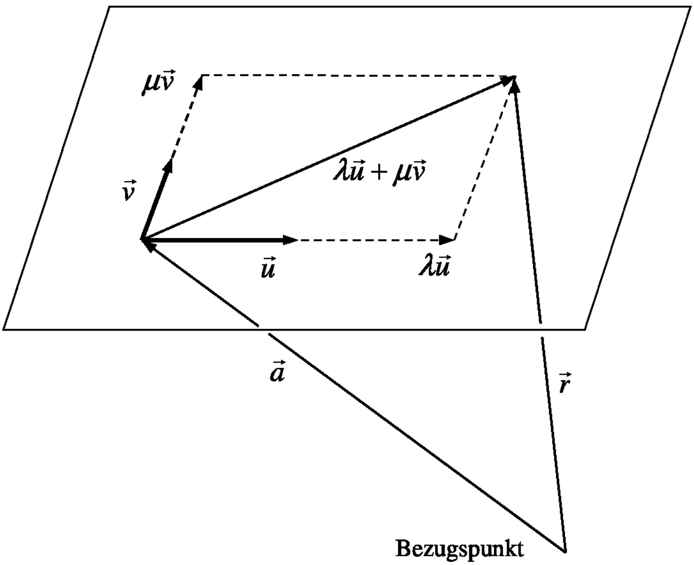
$$y = 2x+1$$

beschrieben werden. Sie gibt an, in welcher Höhe y sich die Gerade an der Links-rechts-Position x befindet.
Auch eine Ebene im Raum kann durch eine Gleichung wie

$$z = 2x+3y+1$$

beschrieben werden. Sie gibt an, in welcher Höhe z sich die Ebene an der durch x und y bestimmten Position befindet.

Eine Gerade ist eindeutig durch einen Richtungsvektor und einen festen Punkt bestimmt. Bei einer Ebene ist es ähnlich: Sie ist durch ***zwei*** Richtungsvektoren und einen festen Punkt bestimmt. Sind zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gegeben und ein fester Punkt als Ortsvektor $\vec{a}$, so kann ***jeder Punkt*** $\vec{r}$ der Ebene damit dargestellt werden.



$$\vec{r} \quad = \quad \vec{a} \quad + \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

beliebiger Punkt
auf der Ebene

Richtungsvektoren

fester Punkt
auf der Ebene

Wenn die Parameter λ und μ alle reellen Zahlen durchlaufen, dann durchläuft

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

alle Punkte der Ebene.

Wir betrachten nun Beispiele. Die Methoden sind dieselben, die bei den Geraden angewandt wurden. Der einzige Unterschied ist der, dass wir nun ***zwei*** Richtungsvektoren haben.

Beispiel 1
Gegeben: Drei Punkte im Raum:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht:

a) Eine Vektorielle Darstellung der Ebene, die durch die drei Punkte geht.
b) Die Ebenengleichung

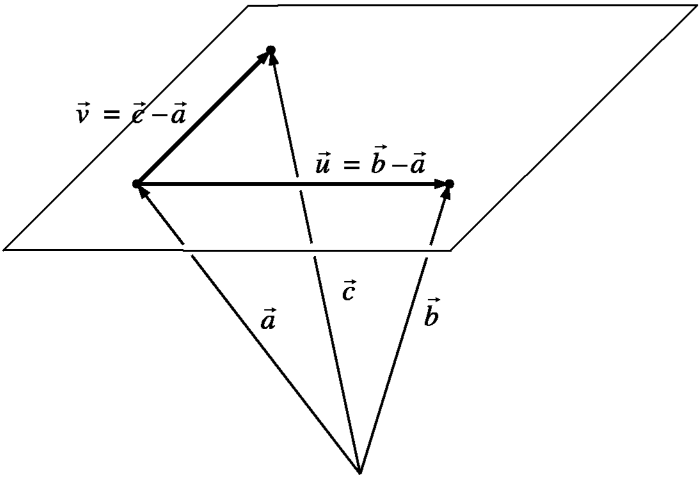
Lösung:

a) Eine Vektorielle Darstellung der Ebene

Wir benötigen einen festen Punkt auf der Geraden und zwei Richtungsvektoren.

Fester Punkt: Wähle $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Richtungsvektoren:



Das Bild zeigt, dass man die Differenzen der Ortsvektoren als Richtungsvektoren wählen kann:

$$\vec{u} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die konkreten Vektoren eingesetzt in

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},$$

liefert die vektorielle Darstellung der Ebene:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Ebenengleichung

Eliminiere die Parameter λ und μ aus der vektoriellen Darstellung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu multiplizieren wir (im Sinne des Skalarproduktes) mit einem Vektor, der auf beiden Richtungsvektoren senkrecht steht, nämlich dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Also:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x+y+z &= 1+0+0\\ x+y+z &= 1\\ z &= 1-x-y\end{aligned}$$

Die Ebenengleichung ist daher: $z = -x-y+1$.

Beispiel 2
Gegeben: Ebene *E* mit der Gleichung: $z = 2x+3y+5$.
Gesucht: Eine Vektorielle Darstellung der Ebene.

Lösung 1:

In der Ebenengleichung sind x, y und z die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Ebene. Sie sind also die Koordinaten unseres Radiusvektors $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun $z = 2x+3y+5$ ein und formen im Hinblick auf die vektorielle Darstellung um. Wir zerlegen den Vektor in Vektoren, die nur x, nur y bzw. weder x noch y enthalten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+3y+5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nun spielen x, y die Rolle der Parameter. Wir schreiben λ, μ statt x, y und erhalten die vektorielle Darstellung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2:

Wir berechnen drei Punkte auf der Ebene, indem wir für x und y jeweils drei Werte wählen und in die Ebenengleichung $z = 2x + 3y + 5$ einsetzen:

Punkt 1: $x = 0,\ y = 0$, also: $z = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5 = 5$.

Punkt 2: $x = 1,\ y = 1$, also: $z = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 = 10$.

Punkt 3: $x = 0,\ y = 2$, also: $z = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 5 = 11$.

Aus den entsprechenden drei Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

kann man nun wie in Beispiel 1 eine vektorielle Darstellung der Ebene gewinnen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

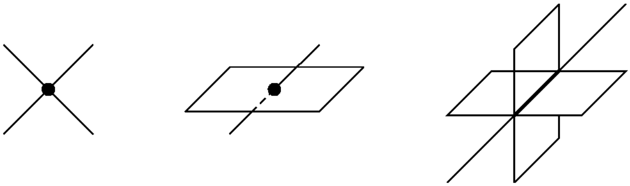
Diese vektorielle Darstellung unterscheidet sich von der obigen. Beide sind richtig, es gibt unendliche viele vektorielle Darstellungen einer Ebene.

5.2 Schnittgebilde

Wir betrachten die Schnitte von

- Gerade und Gerade

- Gerade und Ebene
- Ebene und Ebene



Beispiel 1
Gegeben: Zwei sich schneidende Geraden in vektorieller Darstellung:

$$\text{Gerade 1:}\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Gerade 2:}\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht: Schnittpunkt $\vec{s}$ der Geraden.

Lösung:

Da $\vec{s}$ auf Gerade 1 liegt, ist $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Da $\vec{s}$ auf Gerade 2 liegt, ist $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir setzen nun beide Ergebnisse für $\vec{s}$ gleich:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir möchten nun $\vec{s}$ als Mitglied der Gerade 1 berechnen. Dazu müssen wir λ berechnen, also μ eliminieren. Wir multiplizieren die Gleichung (im Sinne des Skalarproduktes) mit einem zu $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor wie $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, damit μ verschwindet. (Man kann senkrechte Vektoren finden, indem man eine Komponente 0 setzt, die beiden anderen vertauscht und bei einer der beiden das Vorzeichen ändert.)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 + 3\lambda = 5 + 0$$

$$2 + 3\lambda = 5$$

$$3\lambda = 3$$
$$\lambda = 1$$

Den berechneten Wert von λ können wir nun in die vektorielle Darstellung von Gerade 1 einsetzen und erhalten so den gesuchten Schnittpunkt:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist somit: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Anmerkung 1

Das Schneiden zweier Geraden in der Ebene (s. 4.2) lässt sich als Sonderfall auffassen. Die x-y-Ebene kann als Teil des Raumes (mit z-Koordinate 0) aufgefasst werden. Zum Beispiel wird aus $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dann der eingebettete Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Anmerkung 2

Wenn sich die zwei Geraden mit den vektoriellen Darstellungen $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ schneiden, etwa in dem Punkt $\vec{s}$, so ist: $\vec{s} = \vec{a} + \lambda\vec{u} = \vec{b} + \mu\vec{v}$. Multipliziert man nun die Gleichung mit dem Vektorprodukt der Richtungsvektoren, so bleibt:

$$\vec{a}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{b}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$$

oder anders gesagt: $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=0$

Dies ist ein Kriterium dafür, dass sich die Geraden tatsächlich schneiden.

Beispiel 2
Gegeben: Eine Gerade *g* und eine Ebene *E* in vektorieller Darstellung:

$$g:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$E:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Gesucht: Schnittpunkt $\vec{s}$ der Geraden mit der Ebene.

Lösung:

Wir Verfahren grundsätzlich wie bei der Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden.

Da $\vec{s}$ auf der Geraden liegt, ist $\vec{s}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$.

Nun liegt $\vec{s}$ auch in der betrachteten Ebene also ist

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun beide Ergebnisse für $\vec{s}$ gleich:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir möchten nun $\vec{s}$ als Mitglied der Gerade berechnen. Dazu müssen wir λ berechnen, also α, β eliminieren. Dazu multiplizieren wir die Gleichung (im Sinne des Skalarproduktes) mit einem zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor wie $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$, damit α und β verschwinden:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0$$

$$\begin{aligned} -84+78\lambda &= -6 \\ 78\lambda &= 78 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

Wir setzen $\lambda = 1$ in die vektorielle Darstellung von g ein:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist also: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Beispiel 3
Gegeben: Zwei Ebenen in vektorieller Darstellung:

$$\text{Ebene 1: } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene 2: } \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Schnittgerade g der beiden Ebenen (in vektorieller Darstellung).

Lösung:

Die Punkte $\vec{r}$ der Schnittgeraden liegen in beiden Ebenen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir setzen nun beide Ergebnisse für $\vec{r}$ gleich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir möchten nun $\vec{r}$ als Mitglied der Ebene 1 berechnen. Dazu müssen wir λ und μ berechnen, also α und β eliminieren. Wir multiplizieren die Gleichung (im Sinne des Skalarproduktes) mit einem zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor wie $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, damit α und β verschwinden:

Die *linke Seite* der Gleichnung

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\7\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}$$

geht über in:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-18\\1\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-18\\1\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-18\\1\\-4\end{pmatrix}$$
$$= -23-45\lambda-45\mu,$$

die *rechte Seite* wird zu:

$$\begin{pmatrix}5\\5\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-18\\1\\-4\end{pmatrix}+\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 = -113.$$

Wir setzen beide Ergebnisse gleich und erhalten:

$$\begin{aligned}-23-45\lambda-45\mu &= -113\\ -45\lambda-45\mu &= -90\\ \lambda+\mu &= 2\\ \mu &= 2-\lambda\end{aligned}$$

Bei den Punkten der Schnittgeraden unterliegen die Ebenen-Parameter also der Zusatzbedingung $\lambda+\mu = 2$. Den Parameter $\mu = 2-\lambda$ kann man durch $2-\lambda$ ersetzen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + (2-\lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

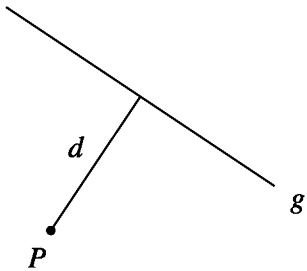
$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eine vektorielle Darstellung der Schnittgerade ist also:

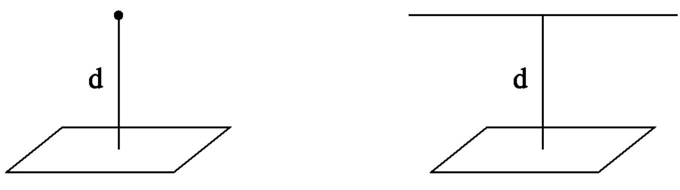
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5.3 Abstände

Wenn sich geometrische Objekte nicht schneiden, kann man die Frage nach dem kleinsten Abstand zwischen ihnen stellen. Das Beispiel des Abstandes eines *Punktes* von einer *Geraden* wurde bereits im vorigen Kapitel behandelt. Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt und der Geraden steht senkrecht auf der Geraden:



Dies gilt *allgemein*, die ***kürzeste*** Verbindungsstrecke zwischen zwei geometrischen Objekten steht ***senkrecht*** auf ***jedem*** der Objekte, zum Beispiel:

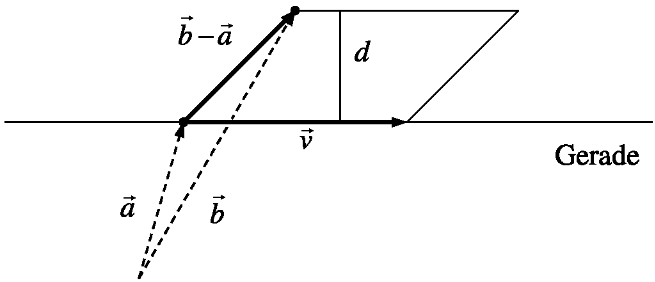


Es gibt noch eine andere Methode zur Abstandsbestimmung. Zunächst lassen sich alle Fälle zurückführen auf die Abstandsbestimmung zwischen

- Punkt und Gerade,

- Punkt und Ebene.

Im ersten Fall wird ein ***Parallelgramm*** betrachtet, dessen Fläche durch das Vektorprodukt oder direkt durch die Multiplikation der Grundseite mit der Höhe ausdrückbar ist. Die Höhe ist dabei der Abstand des Punktes von der Geraden. Man gewinnt so eine einfache Formel für den Abstand. Für den Punkt $\vec{b}$ und die Gerade $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$ ergibt sich:



Die Fläche des Parallelogramms ist also (auf zweierlei Weise dargestellt):

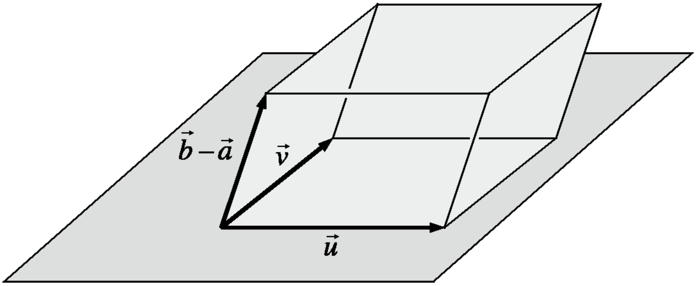
$$|\vec{v}| \cdot d = |(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{v}|.$$

Wir lösen nach d auf und erhalten die Abstandsformel:

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

Im zweiten Fall kann man völlig analog verfahren und ein ***Parallelepiped*** betrachtet, dessen Volumen durch das ***Spat-***

produkt oder direkt durch die Multiplikation der Grundfläche mit der der Höhe beschreibbar ist. Da die Höhe der Abstand des Punktes von der Ebene ist, bekommt man eine Formel für den Abstand. Für den Punkt $\vec{b}$ und die Ebene $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ergibt sich das folgende Bild:



Das Volumen des Parallelepipeds ist:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| \cdot d = |(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{u} \times v)|,$$

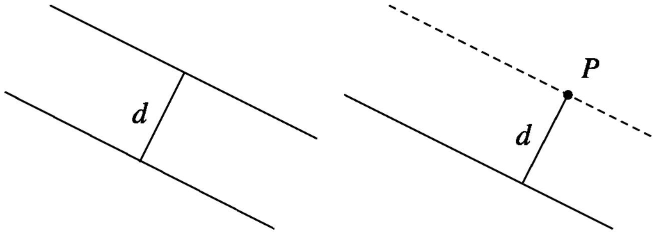
woraus nachstehende Abstandsformel folgt:

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{u} \times v)|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}.$$

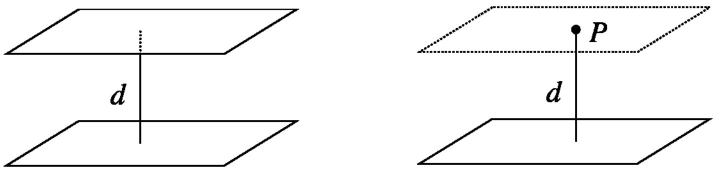
Wir führen nun die übrigen Fälle auf die zwei soeben betrachteten zurück.

Abstand paralleler Geraden
Man wählt einen beliebigen Punkt auf der einen Geraden aus und berechnet den Abstand zwischen dem Punkt der

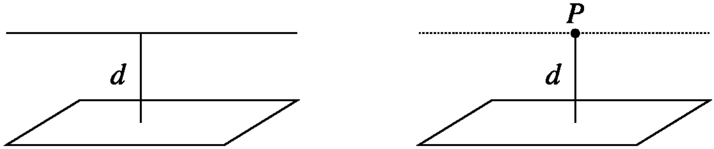
anderen Geraden:



Abstand paralleler Ebenen
Man wählt einen beliebigen Punkt auf der einen Ebenen aus und berechnet den Abstand zwischen dem Punkt der anderen Ebene:

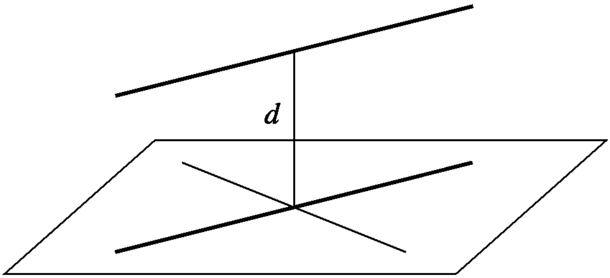


Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade
Man wählt einen beliebigen Punkt auf der Gerade aus und berechnet den Abstand zwischen dem Punkt der Ebene:



Abstand windschiefer Geraden

Kopiere eine der Geraden und verschiebe sie parallel so, dass sie die andere Gerade schneidet. Die sich schneidenden Geraden spannen eine Ebene auf. Die Ausgangsgerade verläuft parallel zu dieser Ebene. Dieser Fall ist soeben gelöst worden.



Als Richtungsvektoren der erzeugten Ebene können die Richtungsvektoren der Geraden genommen werden.

Damit sind alle Fälle auf die Abstände zwischen Punkt und Gerade sowie Punkt und Ebene zurückgeführt. Man benötigt als nur zwei Formeln für den Abstand:

<table>
<tr><th colspan="2">Abstände 1</th></tr>
<tr><td>Punkt und Gerade
Punkt: $\vec{b}$
Gerade: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$</td><td>Parallele Geraden
Gerade 1: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$
Gerade 2: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d = \left| \frac{(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{v}}{|\vec{v}|} \right|$</td></tr>
</table>

Abstände 2	
Punkt und Ebene Punkt: $\vec{b}$ Ebene: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$	**Parallele Ebenen** Ebene 1: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ Ebene 2: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
Gerade und Ebene Gerade: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{w}$ Ebene: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$	**Windschiefe Geraden** Gerade 1: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ Gerade 2: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$
$d = \dfrac{\lvert(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$	

Zur Veranschaulichung werden wir nun den Abstand eines konkreten Punktes von einer konkreten Ebene mit Hilfe der beiden oben erläuterten Methoden (Formel und senkrechte Verbindungsstrecke) berechnen.

Beispiel

Gegeben: Eine Ebene *E* und ein Punkt *P*:

$$\text{Punkt } P\text{:}\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene } E\text{:}\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Abstand *d* zwischen *P* und *E*.

Lösung 1

Wir setzen die gegebenen Vektoren in die Abstandsformel

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{u} \times v)|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

ein und erhalten:

$$d = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

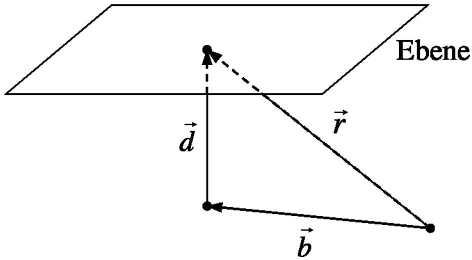
$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|126 + 132 - 24|}{\sqrt{81 + 144 + 9}} = \frac{234}{\sqrt{234}} \approx 15{,}297$$

Der Abstand beträgt also $d \approx 15{,}297$.

Lösung 2

Die Verbindungsvektor (Differenzvektor) zwischen $\vec{r}$ und

$\vec{b}$ steht senkrecht auf der Ebene, also senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren der Ebene:



Der Vektor der Verbindungsstrecke ist:

$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{d}$ steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren der Ebene, ihr Skalarprodukt ist also Null. Dies wird uns die Berechnung von λ und μ ermöglichen.

Das Skalarprodukt von $\vec{d}$ mit dem ersten Richtungsvektor ist 0:

$$\left[\begin{pmatrix}-14\\-11\\-8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}-14+\lambda+2\mu\\-11+\lambda-\mu\\-8+7\lambda+2\mu\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}=0$$

$$-81+51\lambda+15\mu=0$$

Das Skalarprodukt mit dem zweiten Richtungsvektor ist 0:

$$\left[\begin{pmatrix}-14\\-11\\-8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}-14+\lambda+2\mu\\-11+\lambda-\mu\\-8+7\lambda+2\mu\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=0$$

$$-33+15\lambda+9\mu=0$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$51\lambda+15\mu=81$$
$$15\lambda+9\mu=33$$

Mit der Lösung

$$\lambda=1$$
$$\mu=2$$

Damit können wir nun $\vec{d}$ und dann d berechnen:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daher:

$$d = |\vec{d}\,| = \left\| \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{81+144+9} = \sqrt{234} \approx 15,297$$

Der Abstand beträgt also $d \approx 15,297$.

Lösung 3

Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Richtungsvektoren der Ebene sind, dann steht die Gerade

$$\vec{r} = \vec{b} + \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$$

Senkrecht auf der Ebene und enthält den Punkt $\vec{b}$. Der Schnittpunkt $\vec{s}$ der Gerade mit der Ebene ist dann der Punkt auf der Ebene mit der kürzesten Entfernung zu $\vec{b}$. Daher ist der gesuchte Abstand die Länge des Distanzvektors $\vec{d} = \vec{s} - \vec{b}$.

Das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ ist:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun den Schnittpunkt $\vec{s}$:

$$\begin{pmatrix}15\\10\\9\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Vereinfache die Gleichung zunächst:

$$\begin{pmatrix}15\\10\\9\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\-11\\-8\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Mulitpliziere die Gleichung nun mit $\vec{u}\times\vec{v}$, damit α und β wegfallen:

$$\lambda\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\-11\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}+0+0$$

$$234\lambda = 234$$

$$\lambda = 1$$

Der Schnittunkt ist also:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix}15\\10\\9\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\\9\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}9\\12\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\22\\6\end{pmatrix}$$

Distanzvektor und Abstand sind daher:

$$\vec{d} = \vec{s} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{d}| = \left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{81+144+9} = \sqrt{234} \approx 15{,}297$$

Der Abstand des Punktes zur Ebene ist also $d \approx 15{,}297$.

Aufgaben

1. Finde die Ebenengleichung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Finde eine vektorielle Darstellung:
a) $x + y = 1$ (Gerade in der Ebene)
b) $x + y + z = 1$ (Ebene im Raum)

3. Finde jeweils eine vektorielle Darstellung der Ebene:
a) Die Ebene enthält die Punkte: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) Die Ebene enthält den Punkt $\vec{a}$ und steht senkrecht auf dem Vektor $\vec{v}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Eine Ebene schneidet die Achsen bei $x = 2$, $y = 3$ und $z = 1$. Bestimme die Ebene (vektorielle Darstellung und Ebenengleichung).

5. Eine Ebene schneidet die z-Achse $z = -3$, die Schnittgerade mit der x-y-Ebene ist $y = -x + 1$. Bestimme die Ebene (vektorielle Darstellung und Ebenengleichung).

6. Eine Gerade liegt in der Ebene $z = x - 2y + 3$ und schneidet die x-y-Ebene im Punkt (1|2). Außerdem steht sie

senkrecht auf $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Finde eine vektorielle Darstellung der Gerade.

7. Finde den Schnittpunkt der Ebene E und der Gerade g:

$$E:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad g:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

8. Finde die Schnittgerade der beiden Ebenen:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}.$$

9. Finde die Schnittgerade der beiden Ebenen:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

10. Finde den Abstand des Punktes von der Ebene:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

11. Finde den Abstand zwischen den (parallelen) Ebenen:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

12. Finde den Abstand zwischen Ebene und Gerade:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

6. Vektoren in der Physik

Das Skalarprodukt hatten wir am physikalische Begriff der ***Arbeit*** eingeführt. Die auf den einfachsten Fall paralleler Kraft und Bewegung bezogene Formel „Arbeit gleich Kraft mal Weg“ lässt sich auf den Fall beliebiger Richtungen verallgemeinern, wenn im Sinne des Skalarproduktes multipliziert wird und Kraft und Weg als Vektoren aufgefasst werden:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Wir werden nun noch zwei weitere vektorielle Anwendungen in der Physik betrachten:

- Das Newtonsche Gravitationsgesetz
- Das zweite Keplersche Gesetz und der Drehimpuls

6.1 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

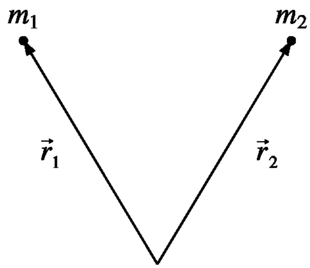
In der klassischen (skalaren) Form besagt Newtons Gravitationsgesetz, dass sich zwei (punktförmige) Massen m_1 und m_2, die einen Abstand r voneinander haben, gegenseitig anziehen mit einer Kraft vom Betrag:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

(Mit der Gravitationskonstanten: $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2}$.)

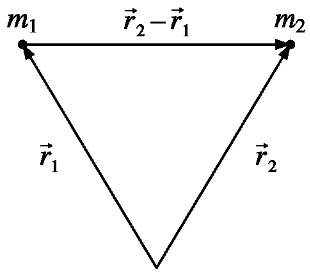
Nun beschreiben wir die Situation vollständig, einschließlich der ***Richtung*** der Kraft und der Position der beiden Massen.

Die *Position* der beiden Massen kann durch Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ dargestellt werden:



Der *Abstand* r zwischen den beiden Massen ist dann die Länge des Differenzvektors:

$$r = |\, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \,|$$



Der Differenzvektor hat dieselbe Richtung wie die Anziehungskraft $\vec{F}_1$, die auf die Masse m_1 wirkt. Damit er diese

Kraft tatsächlich darstellt, muss die Länge des Differenzvektors von r auf $G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ gebracht werden. Wir machen dies in zwei Schritten:

1. Schritt: Einheitsvektor erzeugen (Länge 1):

Multipliziere den Vektor mit dem Kehrwert seiner Länge:

$$\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

was man einfach auch als

$$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

schreibt.

2. Schritt: Multipliziere den Einheitsvektor mit der gewünschten Länge $G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$:

$$\vec{F}_1 = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}.$$

Setze $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ ein:

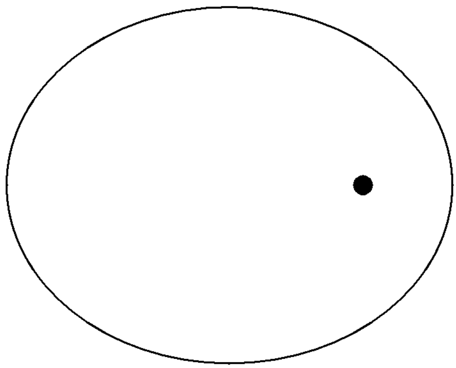
$$\boxed{\vec{F}_1 = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

6.2 Das zweite Keplersche Gesetz und der Drehimpuls

Nach Nikolaus Kopernikus (1473-1543) bewegen sich die Planeten auf Kreisbahnen um die Erde (mit konstanter Geschwindigkeit).

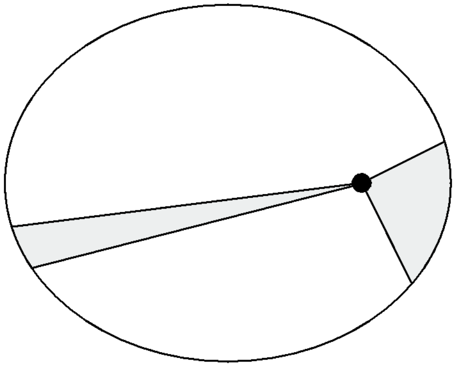
Genauere Messungen durch Tycho Brahe (1546-1601) zeigten jedoch kleine Abweichungen von den Kreisbahnen. Sein Mitarbeiter Johannes Kepler (1571-1630) hat sieben Jahren vergeblich nach möglichen Störquellen (andere Himmelskörper) gesucht und dann die Kreise durch ***Ellipsen*** ersetzt, die mit den Messungen nun exakt übereinstimmten. Das erste Keplersche Gesetz präzisiert die Aussage und lautet:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne liegt.



Die Planeten haben nun keinen festen Abstand mehr zur Sonne und ihre Geschwindigkeit ändert sich ständig. Ist ein Planet weit von der Sonne entfernt, so bewegt er sich langsamer, ist er näher an der Sonne, so ist er schneller. Kepler hat auch in dieser komplizierten Situation eine Gesetzmäßigkeit entdeckt, das zweite Keplersche Gesetz:

2. Der Strahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.



Damit hatte Kepler für jeden Planeten die Form der Bahn und den zeitlichen Ablauf der Bewegung durch Gesetze vollständig beschrieben. Anschließend verbrachte er viele Jahre auf der Suche nach Beziehungen zwischen den verschiedenen Planetenbahnen. Wieder wurde er fündig und entdeckte das dritte Keplersche Gesetz:

3. Der Quotient aus der dritten Potenz der großen Halbachse der Bahnellipse und dem Quadrat der Umlaufzeit ist für alle Planeten gleich.

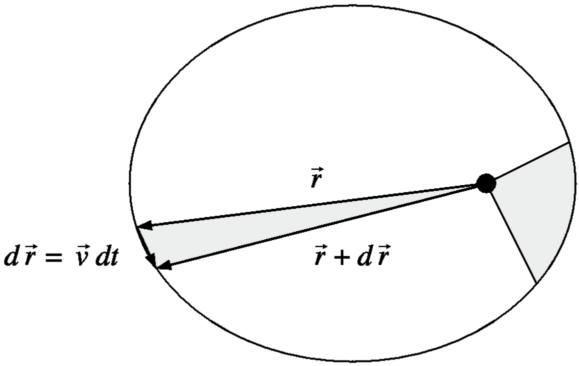
Aus heutiger Sicht wissen wir, dass dieser Quotient von der Sonnenmasse bestimmt ist und daher für alle Planeten, die sich um diese Sonne bewegen, gleich sein muss.

Das Gesetz gilt auch für den Mond und die künstlichen Satelliten, die sich um die Erde bewegen. Hier hängt der Quotient von der Erdmasse ab.

Aus den Bahndaten eines Mondes (z. B. Titan) kann in diesem Sinne die Masse eines Planeten (z. B. Saturn) berechnet werden.

Wir formulieren das zweite Keplersche Gesetz nun mithilfe der Vektorrechnung. Als Bezugspunkt der Orstvektoren $\vec{r}$ wählen wir die Sonne. Die „gleichen Zeiten" stellen wir uns klein vor und bezeichnen Sie mit *dt*. Die Geschwindigkeit bezeichnen wir mit $\vec{v}$. Von der Position $\vec{r}$ ausgehend wird der Planet nach Ablauf der Zeit *dt* nun die Position $\vec{r} + d\vec{r}$ haben. Der Differenzvektor $d\vec{r}$ entspricht der zurückgelegten Strecke und die Geschwindigkeit (mit Richtung) ist

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{oder} \quad d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$



Die überstrichene Fläche ist die Hälfte der Fläche des Parallelogramms, das sich aus dem Vektorprodukt

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{v}\,dt$$

ergibt. Da die Bahn auf einer Ebene liegt, ändert sich die Richtung des Vektorprodukts nicht, es steht senkrecht auf der Bahnebene.

Also ist der gesamte Vektor

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

konstant, er ändert sich nicht beim Bahndurchlauf.

Ist m die Masse des Planeten, so ist

$\vec{p} = m\vec{v}$ der ***Impuls*** des Planeten

und

$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$ der ***Drehimpuls*** des Planeten.

Das zweite Keplersche Gesetz sagt aus, dass der Drehimpuls eines Planeten konstant ist. Es ist ein Sonderfall des Drehimpulserhaltungsatzes.

Lösungen

Lösungen zu Kapitel 1: Vektorrechnung in der Ebene

1. $a = b \approx 3{,}16$, $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

   $2\vec{a}+5\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 53{,}13°$
2. 90°
3. a) $\vec{a}\cdot\vec{b} \approx 4{,}596$ b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$ c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

   d) $\vec{a}\cdot\vec{b} \approx -5{,}130$
4. a) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 48{,}190°$ b) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 28{,}955°$

   c) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 109{,}471°$
5. a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2{,}5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 71{,}790°$ b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -4{,}5$,

   $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 112{,}024°$ c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1{,}5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 104{,}478°$

   d) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1{,}8333\ldots$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 117{,}280°$
6. a) $a = 10$, $b = 10$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$

   b) $a \approx 2{,}236$, $b = 5$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 10$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 26{,}565°$
7. $|\vec{a}+\vec{b}| \approx 4{,}711$, $|\vec{a}-\vec{b}| \approx 1{,}951$, $\angle(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}) \approx 24{,}163°$,

   $\angle(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}) \approx 98{,}789°$
8. $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 117{,}280°$, $\angle(\vec{a},\vec{a}-\vec{b}) \approx 36{,}336°$
9. ca. 52,831°
10. ca. 9,121
11. Alle Winkel: 90°
12. $x = -1{,}5$
13. ca. 126,870°

14. ca. 118,782°
15. ca. 45,382°
16. ca. 8,168
17. ca. 5,717
18. ca. 9,227
19. ca. 2,357
20. a) $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$ b) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 36,870°$ c) $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 180°$
21. $x = -8$
22. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$
23. $x = 1$
24. $\lambda = -2$, dann $\lambda\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Kapitel 2: Vektorrechnung im Raum

1.

$$\vec{a}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},..\vec{a}\times\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix},..\vec{b}\times\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{c}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{c}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},..\vec{c}\times\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{d}\times\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\ \vec{d}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix},\ \vec{d}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},..\vec{d}\times\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

2. $\vec{c}=\begin{pmatrix}-7\\5\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$
3. ca. 5,916
4. Volumen: 6, $\angle(\vec{a},\vec{b})\approx 19{,}446°$, $\angle(\vec{a},\vec{c})\approx 74{,}49°$, $\angle(\vec{b},\vec{c})\approx 68{,}199°$
5. a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{pmatrix}-17\\4\\3\end{pmatrix}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

   b) $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\begin{pmatrix}-17\\4\\3\end{pmatrix}$

Lösungen zu Kapitel 3: Geraden

1. a) $y=2x-1$ b) $y=0{,}75+0{,}25$
2. a) $y=2x-1$ b) $y=-3x+5$
3. a) z.B. $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}$ b) z.B. $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\3\\-6\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, Winkel: ca. 70,893°

6. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

7. $d \approx 2{,}236$

8. $d \approx 1{,}732$

Lösungen zu Kapitel 4: Ebenen

1. $z = x + y - 1$

2. a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. a) z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $z = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1$

5. z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\quad z = 3x + 3y - 3$

6. z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ oder

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. $d = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$

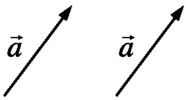
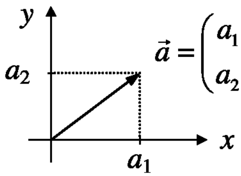
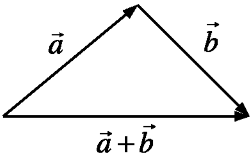
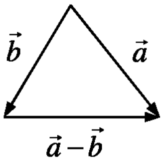
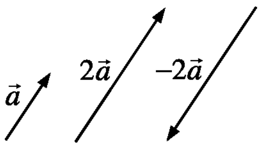
11. $d = 3\sqrt{2} \approx 4{,}243$

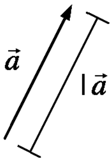
12. $d = \sqrt{35} \approx 5{,}916$

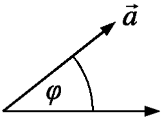
Anhang:

Zusammenfassung der Vektorrechnung

Vektorrechnung in der Ebene

Definition	in Koordinaten
Vektoren	
	 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
Addition	
	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$
Subtraktion	
	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$
Multiplikation mit einem Skalar	
	$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

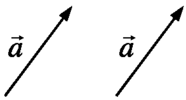
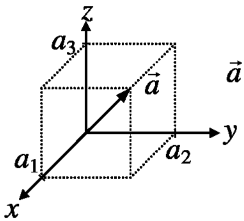
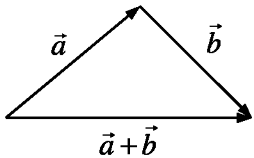
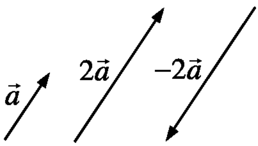
Länge	
 $\vec{a}$ $\lvert\vec{a}\rvert = a$	$\left\lvert\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$

Skalarprodukt	
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi$  $\vec{a}$ φ $\vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$

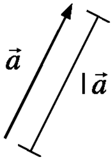
Einige Rechenregeln für das Skalarprodukt

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
3. $\vec{a}\cdot\lambda\vec{b} = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$
4. $\lvert\vec{a}\rvert^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2$
5. $\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Vektorrechnung im Raum

Definition	in Koordinaten
Vektoren	
	 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Addition	
	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$
Multiplikation mit einem Skalar	
	$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

Länge

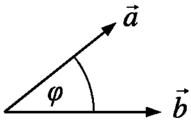


$|\vec{a}| = a$

$$\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$

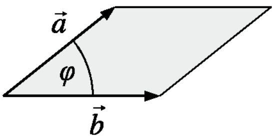


$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

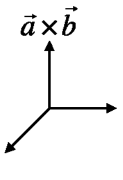
Vektorprodukt

1 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$

2 $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$



3 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ rechtshändig



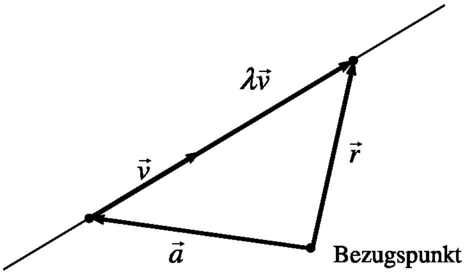
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Über Kreuz multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} * \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

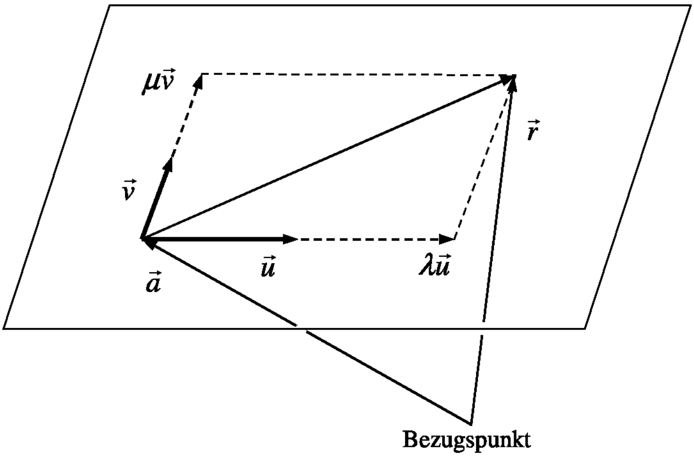
Geraden

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$$



Ebenen

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$



Abstände 1	
Punkt und Gerade Punkt: $\vec{b}$ Gerade: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$	**Parallele Geraden** Gerade 1: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$ Gerade 2: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$
$d = \frac{\lvert(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert}$	

Abstände 2	
Punkt und Ebene Punkt: $\vec{b}$ Ebene: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$	**Parallele Ebenen** Ebene 1: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ Ebene 2: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
Gerade und Ebene Gerade: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{w}$ Ebene: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$	**Windschiefe Geraden** Gerade 1: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ Gerade 2: $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$
$d = \frac{\lvert(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$	