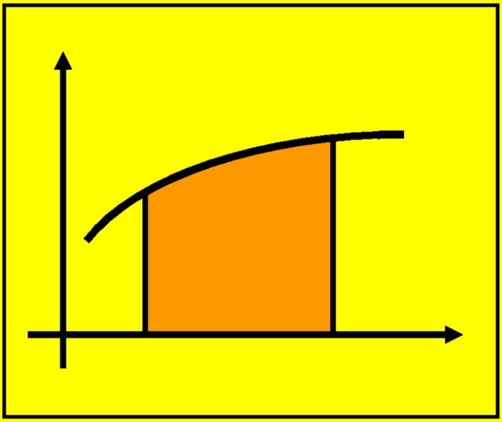
Elementare

Integralrechnung

Alexander Roux



Integralrechnung

Elementare

Integralrechnung

Alexander Roux

Impressum

ISBN 9798878266666

Selbstverlag, Alexander Roux
c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb: Kindle Direct Publishing
Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,
L-1855 Luxemburg

Vorwort

Dieses Buch ist eine behutsame und auf das Wesentliche beschränkte Einführung in die elementare Integralrechnung. Das Hauptaugenmerk liegt auf der Darstellung der anschaulichen Grundgedanken und der Erläuterung der Rechentechniken.
Die historisch erst viel später erfolgten Präzisierungen, wie Riemanns exakte Definition des Integrals, werden nicht behandelt. Sie wären bei einer ersten Annäherung an die Integralrechnung eher kontraproduktiv.

Das Intergral ist die Antwort auf die Frage, wie man den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren berechnen kann. Der Durchbruch bei der Flächenberechnung wurde durch die Erfindung der Koordinatensysteme möglich. Einerseits können beliebige Figuren überhaupt erst beschrieben werden, nämlich durch Gleichungen in Koordinaten, beispielsweise beschreibt $y = 2x-1$ eine Gerade und $y = x^2$ eine Parabel. Andererseits hat sich die Differentialrechnung daraus entwickelt, die der Schlüssel bei der praktischen Flächenberechnung über Intergrale ist. Der berühmte Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass das Integral gewissermaßen eine Umkehrung der Ableitung ist.

Die Lektüre dieses Büchleins erfordert daher Grundkenntnisse der Koordinatensysteme (Geraden und Parabeln) und der Differentialrechnung, insbesondere die Definition der Ableitung und die einfachen Ableitungsregeln. Im Anhang sind einige wichtige Ergebnisse zu diesen Themen zusammengefasst.

Differential- und Integralrechnung sind grundlegend für zahlreiche Gebiete der verschiedensten Wissenschaften.

Das vorliegende Buch ist eine überarbeitete und erweiterte Version von „Das kleine Buch de Integralrechnung“. Um den einführenden Charakter des Haupttextes nicht zu beeinträchtigen, sind die Erweiterungen meist in einen Anhang gestellt worden.

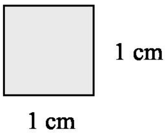
Dr. A. Roux Brühl, Februar 2024

Inhalt

1. Einführung

Der Flächeninhalt eines Rechtecks

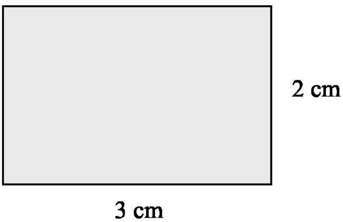
Was ist der Flächeninhalt einer Figur, wie misst man ihn? Zunächst muss man eine Einheit für die Länge wählen, z. B. cm (Zentimeter). Dann kann man als Einheit für den Flächeninhalt ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 cm wählen:



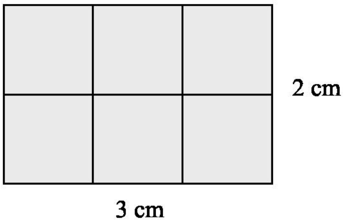
Der Flächeninhalt dieses Quadrates ist 1 cm^2 (ein Quadratzentimeter).

Um den Flächeninhalt einer gegebenen Figur zu bestimmen, muss man prüfen, wie oft dieses kleine Quadrat hineinpasst.

Beispielsweise passen in das Rechteck



genau 6 Quadrate, wie man aus der folgenden Skizze leicht ablesen kann:



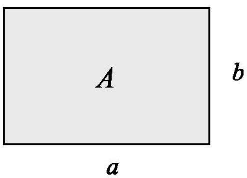
(2 Etagen mit jeweils 3 Quadraten: 2 mal 3 = 6.)

Daraus ergibt sich die bekannte Formel:

Fläche eines Rechtecks = Länge mal Breite

Wenn man nun (wie erstmals François Viète, 1540–1603) *Buchstaben* für *alle* Größen schreibt, nimmt die Formel die uns geläufige Gestalt an:

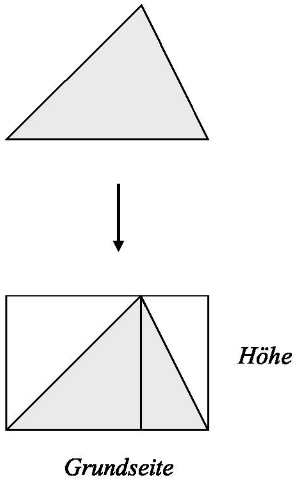
9



„Fläche“ heißt auf Englisch und Lateinisch „area“. Daher steht ein großes „*A*“ für die Fläche.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Der Flächeninhalt eines Dreiecks lässt sich auf den Flächeninhalt eines Rechtecks zurückführen. An den beiden Teilrechtecken wird besonders deutlich, dass die Dreiecksfläche halb so groß ist wie die Rechtecksfläche:



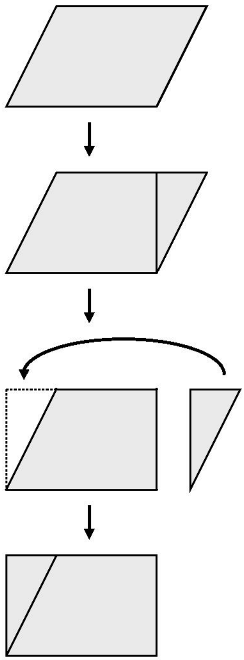
Also:

$$\text{Fläche des Dreiecks} = \text{halbe Rechtecksfläche}$$

$$\text{Fläche des Dreiecks} = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms

Auch der Flächeninhalt eines Parallelogramms lässt sich auf den Flächeninhalt eines Rechtecks zurückführen:

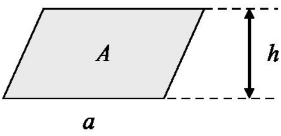


Also:

Fläche des Parallelogramms = Rechtecksfläche
Fläche des Parallelogramms = Grundseite · Höhe

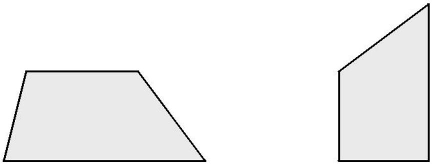
In Buchstaben:

$$A = a \cdot h$$

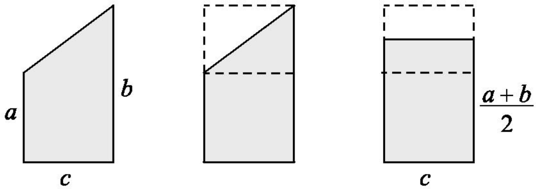


Der Flächeninhalt eines Trapezes

Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten:



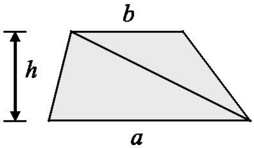
Für das rechte Trapez zeigen die folgenden Bilder, wie man seine Fläche berechnen kann:



Die Fläche A des Trapezes ist so groß wie die eines *Rechtecks* mit gleicher Breite c und dessen Länge der Mittelwert der Längen der beiden parallelen Trapezseiten a und b ist:

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot c$$

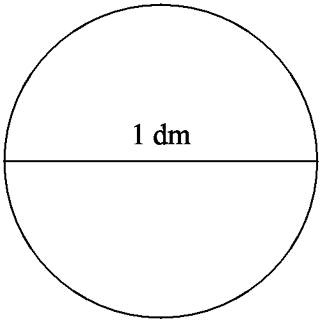
Die Trapezfläche kann auch durch Zerlegung in zwei Dreiecke gewonnen werden:



Also: $A \;=\; \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \;=\; \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot h \;=\; \frac{a+b}{2} \cdot h$

Der Flächeninhalt eines Kreises

Der Kreis ist nicht geradlinig begrenzt und daher schwieriger zu berechnen. Wir betrachten zunächst den Kreisumfang. Dazu nehmen wir einen Kreis mit dem Durchmesser 1 dm (= 1 Dezimeter = 10 cm), wie er zum Beispiel als Querschnitt einer handelsüblichen Konservendose vorkommt:



Dann messen wir die Länge des Umfanges beispielsweise mit einem Bandmaß aus Papier:
Das Ergebnis ist bei Sorgfältiger Messung ungefähr:

3,14 dm

Der Wert wird als „Pi" bezeichnet und geschrieben als

$$\pi = 3{,}14159...$$

π ist der kleine griechische Buchstabe Pi. William Jones (1675–1749) hat im Jahre 1706 die Bezeichnung π eingeführt, vermutlich weil π der Anfangsbuchstabe des griechischen Wortes *perimetros* (= Umfang) ist.

Der Umfang eines Kreises mit einem Durchmesser von 1 Dezimeter ist also π.
Beträgt der Kreisdurchmesser nun 2 Dezimeter statt 1 Dezimeter, so verdoppeln sich alle Längen. Der Umfang ist dann:

$$\text{Umfang} = \pi \cdot 2 \text{ Dezimeter}$$

Ist der Kreisdurchmesser 3 Dezimeter statt 1 Dezimeter, so verdreifachen sich alle Längen. Der Umfang ist jetzt:

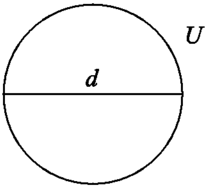
$$\text{Umfang} = \pi \cdot 3 \text{ Dezimeter}$$

Allgemein gilt also:

$$\text{Umfang} = \pi \cdot \text{Durchmesser}$$

In Buchstaben ergibt sich die Formel:

$$\text{U} = \pi \cdot \text{d}$$



Oft ist nicht der Durchmesser, sondern der Radius des Kreises gegeben. Der Radius ist der halbe Durchmesser. Anders gesagt: der Durchmesser ist der doppelte Radius. Aus

$$\text{Umfang} = \pi \cdot \text{Durchmesser}$$

wird dann

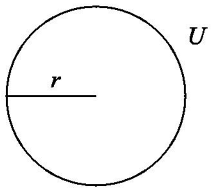
$$\text{Umfang} = \pi \cdot 2 \cdot \text{Radius}$$

In Buchstaben:

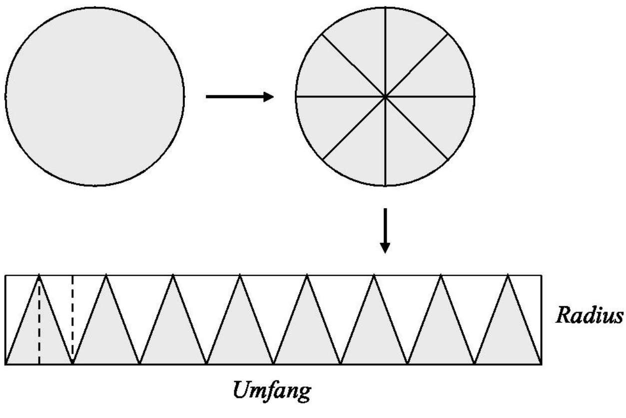
$$U = \pi \cdot 2 \cdot r$$

oder in der üblichen und kurzen Form:

$$U = 2\pi r$$



Nun können wir die Fläche des Kreises berechnen. Dazu zerlegen wir den Kreis in „Dreiecke“ (fast Dreiecke):



Die Kreisfläche ist daher die halbe Rechtecksfläche:

$$\textit{Kreisfläche} = \frac{\textit{Umfang} \cdot \textit{Radius}}{2}$$

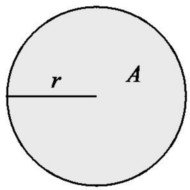
$$\textit{Kreisfläche} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot \textit{Radius}) \cdot \textit{Radius}}{2}$$

Die Zwei kann man kürzen:

$$\textit{Kreisfläche} = \pi \cdot \textit{Radius} \cdot \textit{Radius}$$

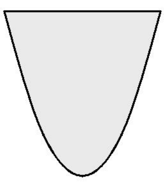
Daraus ergibt sich die bekannte Formel für die Berechnung der Kreisfläche:

$$A = \pi r^2$$

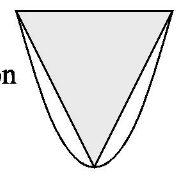


Der Flächeninhalt eines Parabelsegments

Als letztes Beispiel erwähnen wir noch die Parabel. Archimedes (287–212 v. Chr.) war der erste, der die Fläche eines Parabelsegments berechnen konnte. Sein Ergebnis lautet:



$= \frac{4}{3}$ von

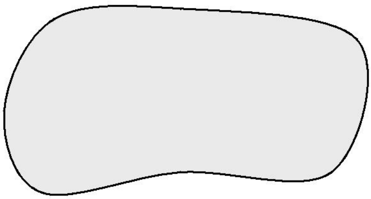


$$\textit{Fläche des Parabelsegments} = \frac{4}{3} \textit{ der Dreiecksfläche}$$

Die Arbeit von Archimedes über die Parabel ist kompliziert und umfangreich, sie umfasst über 20 Seiten in den gesammelten Werken des Archimedes.

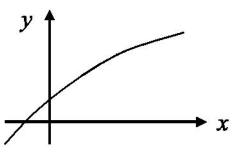
Der Flächeninhalt beliebiger Figuren

Wir betrachten nun ziemlich beliebige, krummlinig begrenzte Figuren:

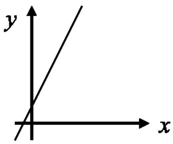
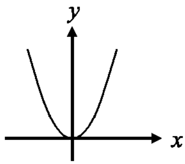
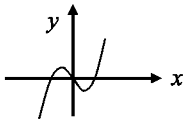
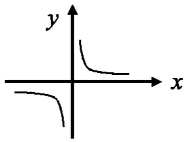


Die Begrenzungskurve kann jetzt nicht durch klassische geometrische Konstruktionen gewonnen werden. Erst die Erfindung der Koordinatensysteme (Nicole d'Oresme, etwa 1323–1382, René Descartes, 1596–1650, und Pierre de Fermat, 1601–1665) hat beliebige Kurven zugänglich gemacht: Zu jeder Kurve gehört eine Gleichung, die oft auch als „Funktionsgleichung" bezeichnet wird:

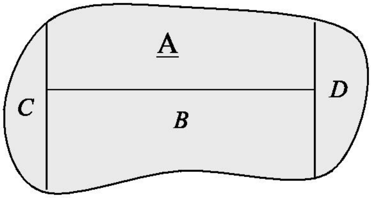
Allgemein

Kurve	Gleichung
	$y = f(x)$ Hierbei steht $f(x)$ für einen Ausdruck in x. (Euler, 1707–1783)

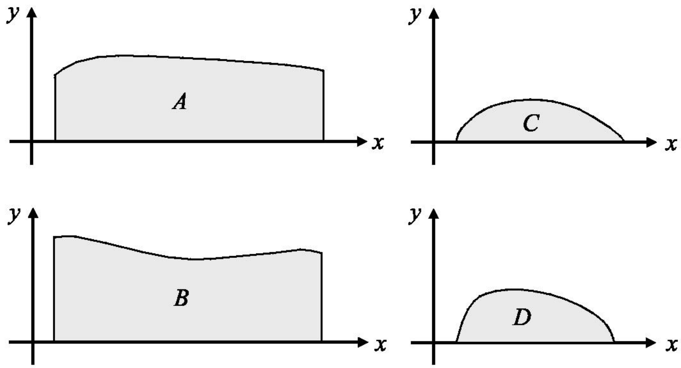
Beispiele

Name der Kurve	Kurve	Gleichung
Gerade		$y = 2x + 1$
Parabel		$y = x^2$
kubische Parabel		$y = x^3 - x$
Hyperbel		$y = \frac{1}{x}$

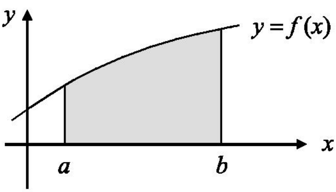
Wir wenden uns nun wieder obiger Figur zu. Sie kann in vier Teile zerlegt werden. Jeder dieser Teile kann bei Wahl eines geeigneten Koordinatensystems durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden.



Die Teile im Koordinatensystem sind:

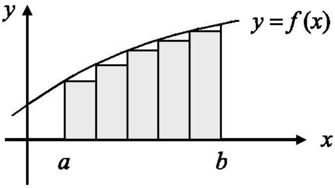


Damit ist unser Problem auf die Berechnung von Flächen der folgenden Art zurückgeführt:



Die Fläche hat links, rechts und unten gerade Begrenzungslinien. Nur oben ist die Begrenzung krumm und wird durch eine Funktionsgleichung beschrieben.

Nachdem die Beschreibung der Figur gelungen ist, kann man nun die Berechnung des Flächeninhalts in Angriff nehmen. Dazu wird die Figur durch viele *dünne* Rechtecke ausgeschöpft. Die Summe der Rechtecksflächen ist dann praktisch der gesuchte Flächeninhalt:



Historische Anmerkungen

Der Ansatz der Ausschöpfung einer Fläche durch Rechtecke oder Dreiecke ist nicht neu und findet sich bereits bei Archimedes (287–212 v. Chr.) und auch bei Eudoxos (408–355 v. Chr.) und seinen Vorläufern.

Mit der Erfindung der Koordinatensysteme durch Oresme stand eine rechnerische Beschreibung von *beliebigen* Kurven zur Verfügung – und umgekehrt eine Veranschaulichung von rechnerischen Beziehungen.

 Nicole Oresme 1320–1382	Bischof von Lisieux. Errungenschaften: Begründer der Nationalökonomie, die Gesetze des freien Falls, Wurzeln als Potenzen mit Brüchen als Hochzahl, Koordinatensysteme

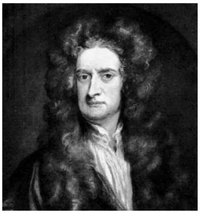
Als Descartes und Fermat nochmals (unabhängig voneinander) die Koordinatensysteme erfanden, stand ihnen die vietasche Buchstabenrechnung zur Verfügung. Die Koordinatensysteme konnten ihre volle Kraft entfalten. Beliebige Kurven sind nun zugänglich, zu jeder Kurve gehört eine Gleichung.

 René Descartes 1596–1650	 Pierre de Fermat 1601–1665
Jurist und Soldat. Errungenschaften: Koordinatensysteme, Begründung des Rationalismus (Philosophie).	Jurist am Parlament von Toulouse. Errungenschaften: Koordinatensysteme, Differentialrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit Pascal), Zahlentheorie, fermatsches Prinzip der Lichtausbreitung: Das Licht nimmt den Weg, auf dem es am wenigsten Zeit benötigt.

So hat Fermat in seiner Abhandlung „*Methoden zur Bestimmung von Maxima und Minima und Tangenten an gekrümmten Kurven*“ die Grundbegriffe der Differentialrechnung entwickelt. Ferner hat er Flächen, die von höheren Parabeln und Hyperbeln berandet werden, berechnet.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wurde erstmals von Gregory formuliert und bewiesen. Newton und Leibniz haben die Differential- und Integralrechnung systematisch ausgebaut. Die heute gebräuchlichen Bezeichnungen der Differential- und Integralrechnung gehen auf Leibniz zurück, der besonderen Wert auf klare und praktische mathematische Symbole legte.

James Gregory
1638–1675



Isaac Newton
1643–1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646–1716

Die erste präzise formale Definition des Integrals stammt von Riemann. Man spricht daher auch vom „Riemannschen Integral“. Lebesgue hat schließlich den Integralbegriff zum modernen „Lebesgue- Integral“ verallgemeinert.

Bernhard Riemann
1826–1866

Henri Lebesgue
1875–1941

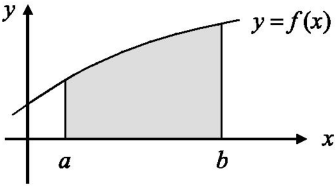
2. Das Integral

2.1 Das Integralzeichen

Das Integralzeichen stammt von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Joseph Fourier (1768–1830) hat das Symbol noch um die Integrationsgrenzen ergänzt. Der Name „Integral“ wurde von Johann Bernoulli (1667–1748) im brieflichen Einvernehmen mit Leibniz eingeführt.

Das Integralzeichen steht für die schraffierte Fläche:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{Fläche}$$



In diesem Zeichen Stecken die folgenden drei konkreten Informationen:

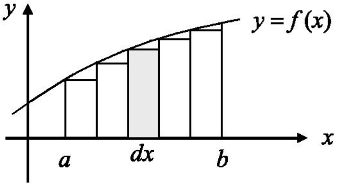
rechte (große) ***Begrenzung*** des Flächenstückes

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{gibt die Kurve an: } y = f(x)} dx$$

linke (kleine) ***Begrenzung*** des Flächenstückes

gibt die ***Kurve*** an:
$y = f(x)$

Die anderen Bestandteile des Integralzeichens beziehen sich auf die Berechnung des Integrals durch die Addition vieler „schmaler“ Rechtecksflächen. Die Grundseite dieser Rechtecke ist dx und die Höhe $f(x)$.



$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{Summe aller Rechtecksflächen} \quad f(x)\,dx$$

Das Zeichen $\int$ ist ein stilisiertes, lang gezogenes großes lateinisches „S“ und steht für „<u>S</u>umme“. Die Grundseite dx kann man sich als **<u>D</u>**ifferenz zweier benachbarter Werte auf der <u>*x*</u>-Achse vorstellen. Das „*d*“ in dx steht also für „Differenz“.

2.2 Beispiele

Wir betrachten nun fünf Beispiele. Der Leser kann sich mit ihnen an das Integral gewöhnen. Die Beispiele vermitteln aber auch wichtige Einsichten auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

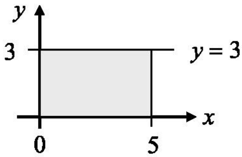
<u>Beispiel 1</u>

Berechne $\int_0^5 3\,dx$.

Lösung

Das Intergral ist nichts weiter als die Fläche eines Rechtecks mit der Grundseite 5 und der Höhe 3.

$$\int_0^5 3\,dx = \text{Fläche}$$



$$= 5 \cdot 3$$

$$= 15$$

Also: $\int_0^5 3\,dx = 15$

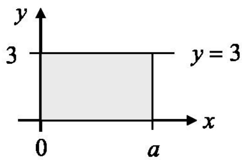
Beispiel 2

Berechne $\int_0^a 3\,dx$.

Lösung

Das Intergral ist nichts weiter als die Fläche eines Rechtecks mit der Grundseite a und der Höhe 3.

$$\int_0^a 3\,dx = \text{Fläche}$$



$$= a \cdot 3$$

$$= 3a$$

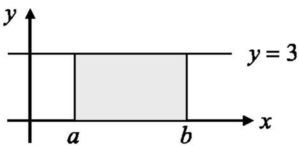
Also: $\int_0^a 3\,dx = 3a$

Beispiel 3

Berechne $\int_a^b 3\,dx$.

Lösung

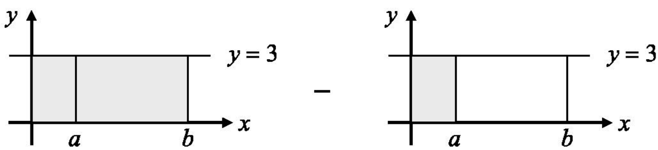
Das Intergral entspricht der folgenden Fläche:



Der Flächeninhalt dieses Rechtecks mit der Grundseite $b-a$ und der Höhe 3 ist $3(b-a)=3b-3a$. Also:

$$\int_a^b 3\,dx = 3b-3a.$$

Das Integral kann man auch als Differenz zweier Integrale der in Beispiel 2 betrachteten Art auffassen:



Das führt zu folgendem Rechenweg:

$$\int_a^b 3\,dx \;=\; \int_0^b 3\,dx - \int_0^a 3\,dx \;=\; 3b-3a$$

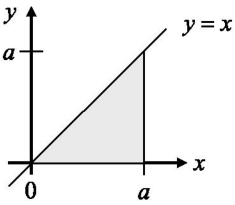
Beispiel 4

Berechne $\int_0^a x\,dx$.

Lösung

Das Intergral ist die Fläche eines Dreiecks mit der Grundseite a und der Höhe ebenfalls a.

$$\int_0^a x\,dx \quad = \quad \text{Fläche}$$



$$= \frac{a \cdot a}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

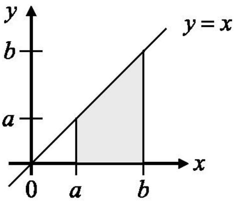
Also: $\int_0^a x\,dx = \dfrac{a^2}{2}$

Beispiel 5

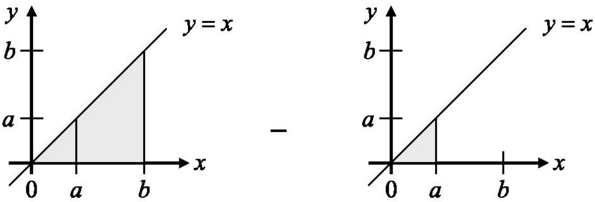
Berechne $\int_a^b x\,dx$.

Lösung

Das Intergral entspricht im vorliegenden Fall dem Flächeninhalt eines Trapezes. Wir werden nicht die Formel für die Fläche eines Trapezes bemühen. Stattdessen fassen wir die Fläche als Differenz von Dreiecksflächen auf und greifen auf Beispiel 4 zurück:



Das Integral kann man als Differenz zweier Integrale auffassen:



Das führt zu folgender Rechnung:

$$\int_a^b x\,dx = \int_0^b x\,dx - \int_0^a x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Also: $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

3.1 Die Grundstruktur

Wir betrachten die Beispiele 3 und 5 aus dem vorangehenden Kapitel:

$$\int_a^b 3\,dx = 3b - 3a$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Auf der rechten Seite steht jeweils eine Differenz gleichartiger Ausdrücke:

$$3b \quad - \quad 3a$$

$$\frac{b^2}{2} \quad - \quad \frac{a^2}{2}$$

Hier kommt b vor. Hier ist b durch a ersetzt.

Allgemein formuliert ist die Struktur folgende:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

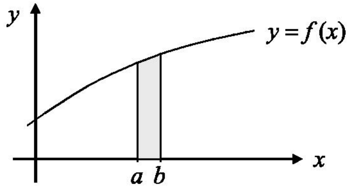
Es bleibt die Frage, welche Gestalt F hat und wie man es berechnen kann.

3.2 Dem Geheimnis von F auf der Spur

Wir betrachten den Fall, dass b nahe bei a liegt:

$$a \approx b$$

Die Fläche $\int_a^b f(x)\,dx$ ist dann sehr schmal und auch oben praktisch geradlinig begrenzt, also ein Trapez:



Daher ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; (\text{Mittelwert der Höhen}) \cdot \text{Grundseite}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$$

Und wegen

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a)$$

erhält man

$$F(b)-F(a) \;=\; \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a).$$

Teilt man durch $(b-a)$, so ergibt sich:

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \;=\; \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Wenn nun b sehr nahe bei a liegt $(b\to a)$, steht links die ***Ableitung*** von F an der Stelle a, und man kann rechts $f(b)$ durch $f(a)$ ersetzen:

$$F'(a) \;=\; \frac{f(a)+f(a)}{2}.$$

Und damit

$$F'(a)=f(a)$$

F ist also dadurch gekennzeichnet, dass seine *Ableitung* der Integrand f ist. Dieses Ergebnis ist als ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*** bekannt. Der Satz ist der Schlüssel zur Berechnung von Integralen:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a)$
Hierbei gilt: $F'(x)=f(x)$ (F heißt *Stammfunktion* von f.)

Der Ausdruck „Stammfunktion“ ist angesichts der Bezeichnung „Ableitung“ einleuchtend:

$$\begin{tikzcd} \text{Stammfunktion } F \arrow[d, shift right=3, "\textit{ableiten}"'] \\ \text{Funktion } f \arrow[u, shift right=3, "\textit{abstammen}"'] \end{tikzcd}$$

Die Berechnung eines Integrals besteht vor allem im Auffinden einer Stammfunktion. Daher wird das Integrieren oft auch als Umkehrung des Differenzierens (Ableitens) bezeichnet.

3.3 Beispiele

Beispiel 1

Berechne $\int_0^5 3\,dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?\ )' = 3$$
$$(3x)' = 3$$

Also ist

$$F(x) = 3x$$

eine Stammfunktion von $f(x) = 3$.

2. Integral berechnen

$$\int_0^5 3\,dx = F(5) - F(0)$$

$$= 3 \cdot 5 - 3 \cdot 0$$

$$= 15 - 0$$

$$= 15$$

Also:

$$\int_0^5 3\,dx = 15.$$

Beispiel 2

Berechne $\int_1^3 x\,dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?\ )' = x$$

Wir wissen:

$$(x^2)' = 2x$$

Damit beim Ableiten nicht $2x$, sondern x herauskommt, teilen wir x^2 durch 2. Dann ist:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = x$.

<u>2. Integral berechnen</u>

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\,dx &= F(3) - F(1) \\ &= \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{2} = 4\end{aligned}$$

Also:

$$\int_1^3 x\,dx = 4.$$

<u>Beispiel 3</u>

Berechne $\int_0^1 x^2\,dx$.

<u>Lösung</u>

<u>1. Stammfunktion finden</u>

$$(\;?\;)' = x^2$$

Wir wissen:

$$(x^3)' = 3x^2$$

Damit beim Ableiten nicht $3x^2$, sondern x^2 herauskommt, teilen wir x^3 durch 3. Dann ist:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 .$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$.

<u>2. Integral berechnen</u>

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{0}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} .$$

<u>Beispiel 4</u>

Berechne $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx$.

<u>Lösung</u>

<u>1. Stammfunktion finden</u>

$$(\ ?\ )' = -x^2 + 4x - 3$$

Man kann jeden Summanden einzeln betrachten und dann jeweils wie in den vorangehenden Beispielen vorgehen (konstante Faktoren bleiben dabei erhalten):

$$\left(-\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} - 3x\right)' = -x^2 + 4x - 3.$$

Daher ist

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

eine Stammfunktion von $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

<u>2. Integral berechnen</u>

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx &= F(3) - F(1)\\ &= -\frac{3^3}{3} + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3 - \left(-\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1\right)\\ &= -9 + 18 - 9 - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right)\end{aligned}$$

$$= 0-\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

Also:

$$\int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx \;=\; \frac{4}{3}.$$

Bemerkung
Die Flächenberechnung bei Parabeln in den letzten zwei Beispielen 3 und 4 hat bei uns jeweils etwa eine Seite erfordert. Die „Quadratur der Parabel" des Archimedes umfasst mehr als zwanzig Seiten.
Die nachfolgenden Beispiele sind für uns nicht wesentlich schwieriger, obwohl sie sicherlich jenseits der Reichweite der Methoden des Archimedes liegen.

Beispiel 5

Berechne $\int_0^1 (x-x^3)\,dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?\ )' = x-x^3$$

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)' = x-x^3$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = x - x^3$.

<u>2. Integral berechnen</u>

$$\int_0^1 (x - x^3)\,dx = F(1) - F(0)$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - (0 - 0)$$

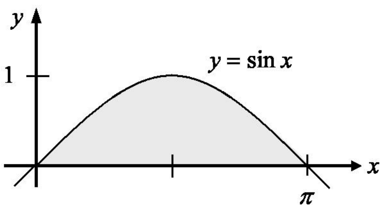
$$= \frac{1}{4}$$

Also:

$$\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{4}$$

<u>Beispiel 6</u>

Berechne $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.



Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?\ )' = \sin x$$

Wir wissen: $(\cos x)' = -\sin x$. Damit wir beim Ableiten $\sin x$ (statt $-\sin x$) bekommen, nehmen wir $-\cos x$:

$$(-\cos x)' = \sin x$$

Daher ist

$$F(x) = -\cos x$$

eine Stammfunktion von $f(x) = \sin x$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x\,dx &= F(\pi) - F(0)\\ &= -\cos\pi - (-\cos(0))\\ &= -(-1) - (-1))\\ &= 1+1\\ &= 2\end{aligned}$$

Also:

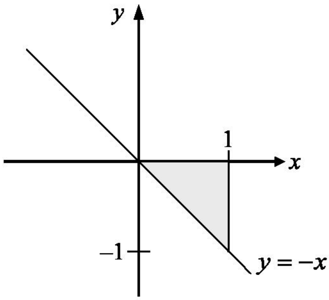
$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2.$$

Bemerkung
Das Ergebnis ist überraschend glatt, wenn man bedenkt, dass $\pi = 3{,}14{,}159$ ... „krumm“ ist und der Sinus etwas Kompliziertes.

Es folgt nun ein Beispiel, bei dem die Kurve ***unterhalb*** der x-Achse verläuft. Die y-Werte $f(x)$ sind also negativ. So leuchtet es ein, dass dann die Produkte $f(x)dx$ negativ sind, ebenso ihre Summe. Das Integral ergibt in diesem Fall die ***negative*** Fläche zwischen Kurve und x-Achse.

Beispiel 7

Berechne $\int\limits_0^1 (-x)\,dx$.



Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?\ )' = -x$$

$$\left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -x$$

Daher ist

$$F(x) = -\frac{x^2}{2}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = -x$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-x)\,dx &= F(1) - F(0) \\ &= -\frac{1^2}{2} - \left(-\frac{0^2}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + 0 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^1 (-x)\,dx = -\frac{1}{2}.$$

Dies ist wie erwartet der negative Flächeninhalt des schraffierten Dreiecks.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale elementargeometrisch und mit Hilfe des Hauptsatzes:

a) $\int_0^3 (3x+2)\,dx$ b) $\int_1^4 (2x-1)\,dx$ c) $\int_0^a (3x+2)\,dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes:

a) $\int_0^5 (1+x)\,dx$ b) $\int_0^a (1+x)\,dx$ c) $\int_{-1}^0 x\,dx$

d) $\int_{-1}^1 x\,dx$ e) $\int_{-1}^1 x^2\,dx$ f) $\int_{-2}^2 x^3\,dx$

g) $\int_0^1 (x^5+4x^2+1)\,dx$ h) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$

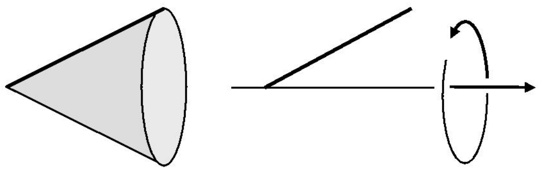
j) $\int_0^1 e^x\,dx$ k) $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx$ l) $\int_1^2 \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\,dx$

m) $\int_2^5 (2x-1)\,dx$ n) $\int_0^b (8x+5)\,dx$

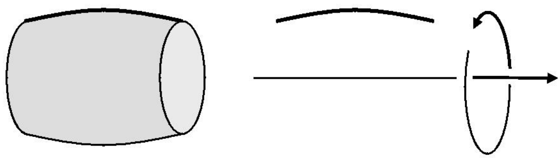
4. Anwendung: Drehkörper

Einige interessante Körper wie Kegel, Fässer und Kugeln sind Drehkörper, sie entstehen aus der Drehung einer Kurve um eine Achse.

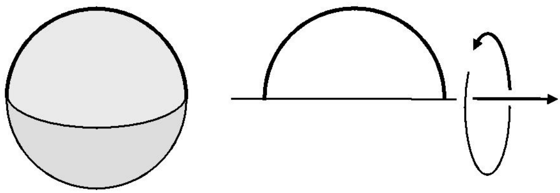
Ein Kegel entsteht durch die Drehung einer geraden Strecke um 360°:



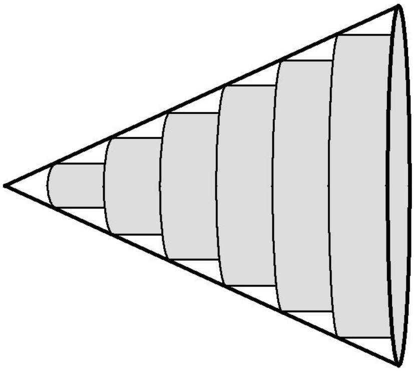
Ein Fass entsteht durch die Drehung eines Parabelstückes um 360°:



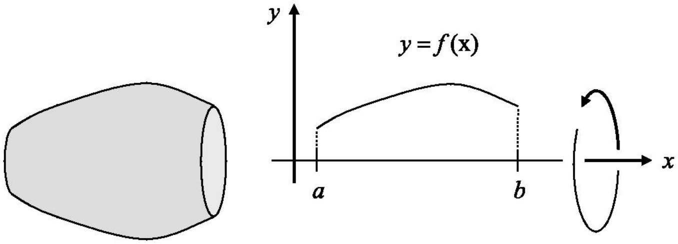
Eine Kugel entsteht durch die Drehung einer Halbkreislinie um 360°:



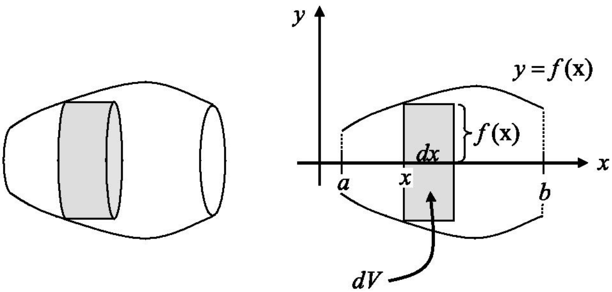
Das Volumen der Drehkörper kann mit Hilfe unserer Integrale berechnet werden. Die Grundidee ist die Zerlegung des Körpers in viele flache ***Zylinder***.



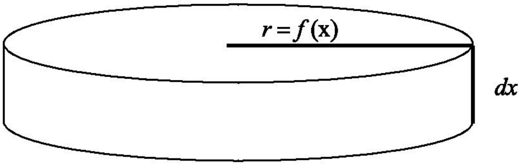
Wir betrachten eine allgemeine Kurve, die um die x-Achse gedreht wird:



Wir zerlegen den Körper nun in viele flache Zylinder und betrachten den Zylinder an der Stelle x:



Das (kleine) Volumen dV dieses Zylinders



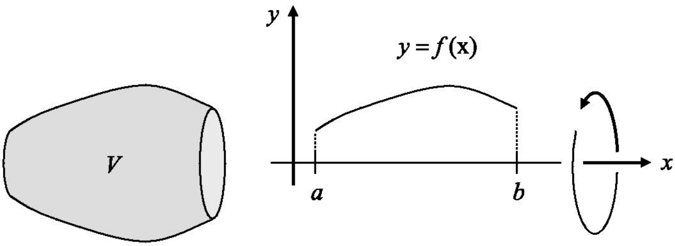
ist nun:

$$dV = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$
$$dV = \pi \cdot r^2 \cdot dx$$
$$dV = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

Das gesamte Volumen des Drehkörpers ist die Summe der Volumina dV aller flachen Zylinder:

$$V = \text{Summe aller } dV$$
$$V = \text{Summe aller } \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$
$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

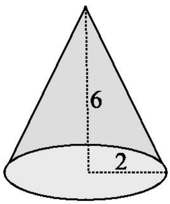
Wir fassen zusammen:



Volumen des Drehkörpers: $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$

Als Beispiele berechnen wir nun das Volumen von Kegel, Fass und Kugel.

<u>Beispiel 1: Kegel</u>
Gegeben: Kegel mit der Höhe $h = 6$ cm und dem Radius $r = 2$ cm.

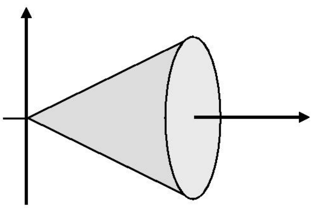


Gesucht: Volumen V.

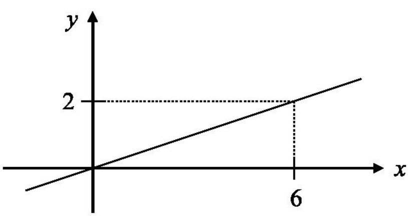
<u>Lösung:</u>

1. Der Kegel als Drehkörper

Wir legen den Kegel so in das Koordinatensystem:



Die zu drehende Gerade ist dann:



Die allgemeine Form der Geradengleichung lautet:

$$y = mx + n$$

Die Gerade geht durch den Ursprung (0; 0) und den Punkt (6; 2). Es liegt ein Zwei-Punkte-Problem vor.

Da die Gerade durch den Ursprung geht, ist für $x = 0$ also auch $y = 0$. Dies in die Geradengleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ 0 &= m \cdot 0 + n \\ 0 &= 0 + n \\ n &= 0 \end{aligned}$$

Also vereinfacht sich die Geradengleichung zu:

$$y = mx$$

Die Gerade geht durch den Punkt mit den Koordinaten $x = 6$ und $y = 2$. Dies in die Geradengleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} y &= mx \\ 2 &= m \cdot 6 \\ m &= \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3} = 0{,}333... \end{aligned}$$

Die Geradengleichung ist also konkret:

$$y = \tfrac{1}{3}x$$

Die Gerade ist im Bereich zwischen $x = 0$ und $x = 6$ zu betrachten, um beim Drehen den gewünschten Kegel zu bekommen.

2. Das Volumen des Kegels als Integral

Mit

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x,$$
$$a = 0 \text{ und } b = 6$$

erhalten wir aus

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

konkret

$$V = \int_0^6 \pi(\tfrac{1}{3}x)^2 dx$$
$$V = \int_0^6 \tfrac{\pi}{9}x^2 dx$$

3. Berechnung des Integrals

Stammfunktion:

$$(\ ?\ )' = \tfrac{\pi}{9}x^2$$
$$\left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\right)' = \tfrac{\pi}{9}x^2$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{\pi}{27}x^3$$

eine Stammfunktion von $g(x) = \dfrac{\pi}{9}x^2$.

Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^6 \tfrac{\pi}{9}x^2\,dx &= F(6)-F(0)\\ &= \frac{\pi}{27}6^3-\frac{\pi}{27}0^3\\ &= \frac{\pi}{27}6^3\\ &= 25{,}1327412...\end{aligned}$$

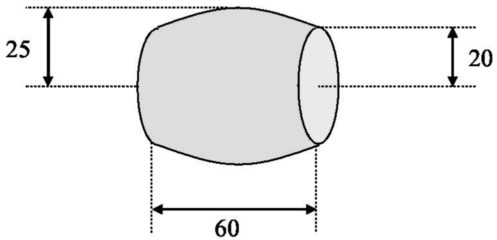
Da unsere Längeneinheit cm ist, ist unsere Volumeneinheit cm^3. Der Kegel hat also ein Volumen von:

$$V \approx 25{,}1327\text{ cm}^3.$$

Beispiel 2: Fass

Gegeben: Fass mit kleinem Radius $r = 20$ cm, großem Radius $R = 25$ cm und der Höhe $h = 60$ cm.

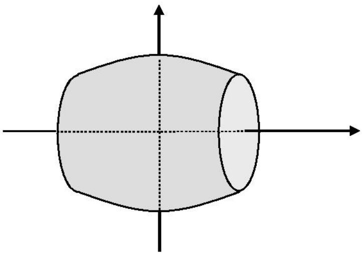
Gesucht: Volumen V.



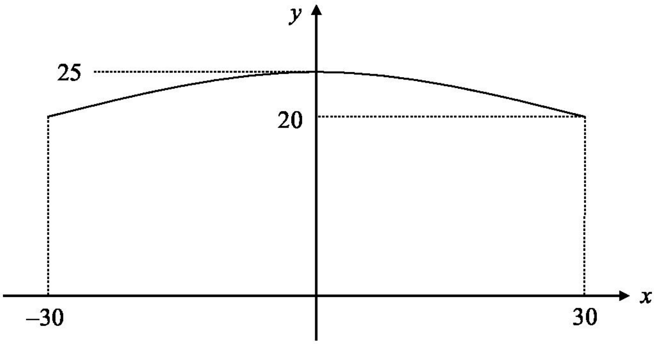
Lösung:

1. Das Fass als Drehkörper

Wir legen das Fass wie folgt in das Koordinatensystem:



Wir benutzen einen Ansatz von Johannes Kepler (1571–1630), der besagt, dass ein Fass aus der Drehung einer Parabel hervor geht. Für nicht stark gekrümmte Fässer ist das eine sehr gute Näherung.



Der Scheitelpunkt der Parabel liegt auf der y-Achse, und zwar bei $y = 25$. Die Parabelgleichung hat also die Gestalt:

$$y = cx^2 + 25$$

Es ist nun c zu berechnen.

Die Parabel geht durch den Punkt mit den Koordinaten $x = 30$ und $y = 20$. Dies in die Parabelgleichung eingesetzt und nach c aufgelöst, ergibt:

$$
\begin{aligned}
y &= cx^2 + 25 \\
20 &= c \cdot 30^2 + 25 \\
20 &= 900c + 25 \\
-5 &= 900c \\
c &= -\tfrac{5}{900} = -\tfrac{1}{180} = -0{,}00555...
\end{aligned}
$$

Die konkrete Parabelgleichung lautet also:

$$y = -\tfrac{1}{180}x^2 + 25$$

Die Parabel ist im Bereich zwischen -30 und 30 zu betrachten, um beim Drehen das gewünschte Fass zu liefern.

2. Das Volumen des Fasses als Integral

Wir setzen

$$f(x) = -\tfrac{1}{180}x^2 + 25,$$

$$a = -30,\ b = 30$$

in

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

ein und quadrieren die Klammer:

$$V = \int_{-30}^{30} \pi \cdot (-\tfrac{1}{180}x^2 + 25)^2 \, dx$$

$$V = \int_{-30}^{30} \pi \cdot (\tfrac{1}{32.400}x^4 - \tfrac{5}{18}x^2 + 625) \, dx$$

3. Berechnung des Integrals

Stammfunktion:

Durch Ableiten bestätigt man, dass

$$F(x) = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{162.000} x^5 - \tfrac{5}{54} x^3 + 625x\right)$$

eine Stammfunktion ist von

$$g(x) = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{32.400} x^4 - \tfrac{5}{18} x^2 + 625\right).$$

Integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-30}^{30} \pi \cdot \left(\tfrac{1}{32.000} x^4 - \tfrac{5}{18} x^2 + 625\right) dx \\ &= F(30) - F(-30) \\ &= \pi \cdot \left(\tfrac{1}{162.000} 30^5 - \tfrac{5}{54} 30^3 + 625 \cdot 30\right) \\ &\quad - \pi \cdot \left(\tfrac{1}{162.000} (-30)^5 - \tfrac{5}{54} (-30)^3 + 625(-30)\right) \end{aligned}$$

Mit $\pi \approx 3{,}14159$ gerechnet, bekommt man:

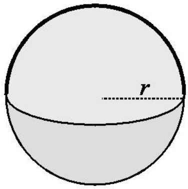
$$\text{V} \approx 103\,044$$

Da unsere Längeneinheit cm ist, ist unsere Volumeneinheit cm^3. Das Fass hat also ein Volumen von etwa:

$$103\,044 \text{ cm}^3 = 103{,}044 \text{ Liter.}$$

Als letztes Beispiel eines Drehkörpers betrachten wir die Kugel. Wir nehmen eine allgemeine Kugel mit einem beliebigen Radius.

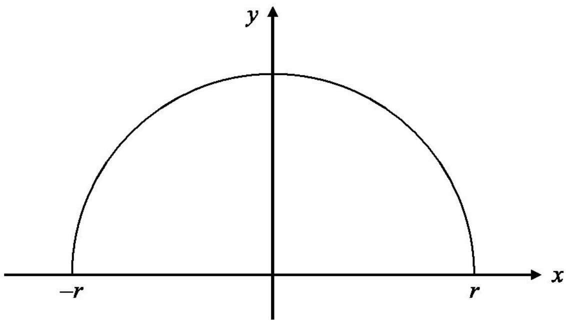
Beispiel 3: Kugel
Gegeben: Kugel mit Radius r.
Gesucht: Volumen V.



Lösung:

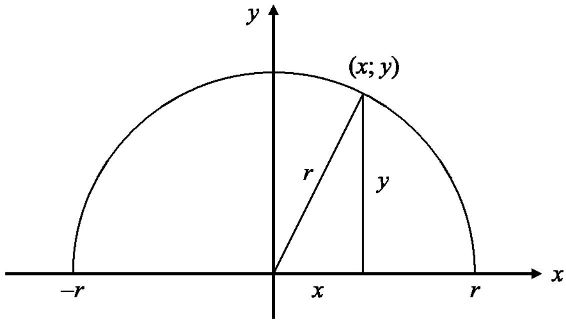
1. Die Kugel als Drehkörper

Wir legen den Mittelpunkt der Kugel in den Ursprung des Koordinatensystems. Die zu drehende Kurve ist dann der obere Halbkreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt:



Die Punkte $(x; y)$, die auf der Kreislinie liegen, haben alle den Abstand r vom Koordinatenursprung. In der Skizze treten die Koordinaten x und y als Katheten und der Radius r als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks auf. Der Satz des Pythagoras liefert dann:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Wir lösen die Gleichung $x^2+y^2 = r^2$ nach y auf und erhalten:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Auf dem oberen Halbkreis sind die y-Werte stets ≥ 0, die negative Wurzel scheidet aus und es bleibt:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Halbkreislinie befindet sich im x-Bereich zwischen $-r$ und r.

2. Das Volumen der Kugel als Integral

Wir setzen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$a = -r, \; b = r$$

in

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

ein und quadrieren die Klammer:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-r}^{r} \pi \cdot \left(r^2 - x^2\right) dx$$

3. Berechnung des Integrals

Stammfunktion:

Durch Ableiten bestätigt man, dass

$$F(x) = \pi \cdot (r^2 x - \frac{x^3}{3})$$

eine Stammfunktion ist von

$$g(x) = \pi \cdot (r^2 - x^2).$$

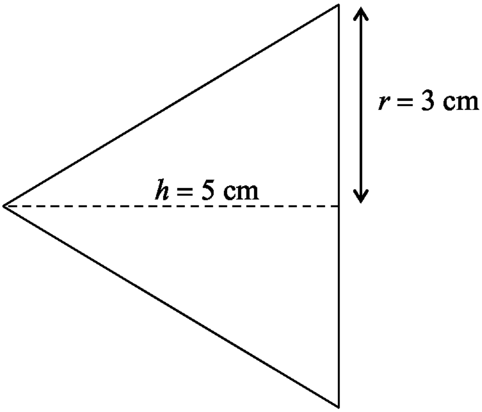
Integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi \cdot (r^2 - x^2)\, dx \\ &= F(r) - F(-r) \\ &= \pi \cdot \left(r^2 r - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \cdot \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \\ &= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \cdot \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \\ &= \pi \cdot \frac{2r^3}{3} + \pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \end{aligned}$$

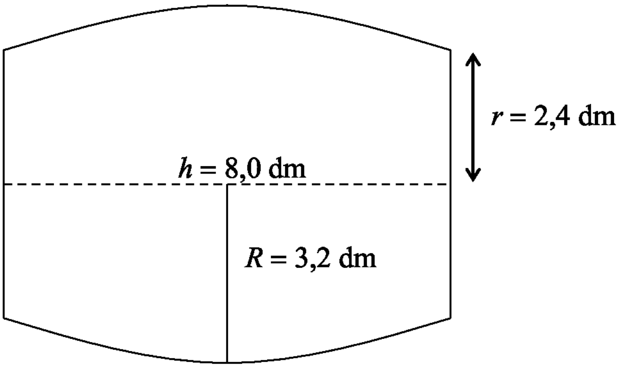
Also ist das Volumen der Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

Aufgaben

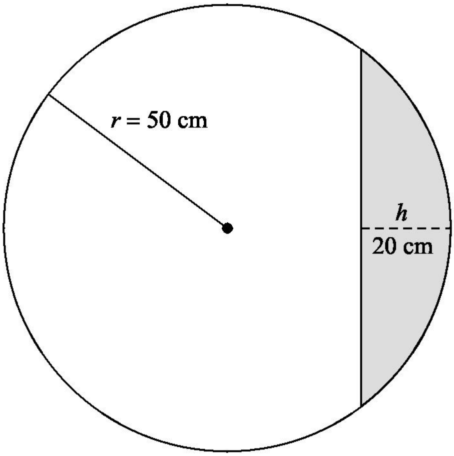
1. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Kegels:



2. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Fasses:



3. Berechnen Sie das Volumen des skizzierten Kugelabschnittes (schattiert dargestellt):



4. Berechnen Sie das Volumen eines allgemeinen Kegels der Höhe h und mit Radius r.

5. Berechnen Sie das Volumen eines allgemeinen Fasses der Höhe h und mit Radien R und r.

5. Integrationsregeln und -techniken

Mit Hilfe des Hauptsatzes haben wir viele Integrale berechnet. In den betrachteten Fällen war eine Stammfunktion relativ einfach zu finden. Bei komplizierten Kurven versucht man, die Integrale auf einfache Integrale zurückzuführen (gemäß dem klassischen Motto „Teile und herrsche!"). Dazu benötigt man die Integrationsregeln. Dies ist die immer wiederkehrende Strategie, die auch den Ableitungsregeln zugrunde liegt.

Wir betrachten folgende Regeln:

1. Elementare Integrationsregeln
   * Regel über die Integrationsgrenzen
   * Summenregel
   * Faktorregel
2. Partielle Integration
3. Substitutionsregel

Diese Integrationsregeln betreffen die drei Aspekte:

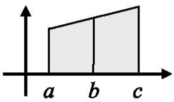
* Integrationsgrenzen
* Grundrechenarten
* Ersetzung eines Ausdrucks durch einen Buchstaben (eine neue Variable)

5.1 Elementare Integrationsregeln

Wir betrachten eine Regel über Integrationsgrenzen, die Summenregel und die Faktorregel. Die Regeln werden formuliert, anschließend erläutert und in Beispielen angewendet.

(1) Regel über Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(2) Die Summenregel

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(3) Die Faktorregel

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Erläuterung zur Regel (1)

Die Gleichheit kann direkt aus der Skizze abgelesen werden. Eine analoge Situation findet man bei einer Reise mit Zwischenstopp:

Reise von Berlin nach Paris + Reise von Paris nach Madrid = Reise von Berlin nach Madrid.

Erläuterung zur Regel (2)

Möchte man alle Zahlen, die in zwei Spalten stehen, addieren, so kann man zeilenweise oder spaltenweise addieren. Dies ist der Grundgedanke der folgenden Begründung zur Summenregel.

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx &= \text{Summe aller } [f(x)+g(x)]\,dx \\ &= \text{Summe aller } f(x)\,dx + g(x)\,dx \\ &= \text{Summe aller } f(x)\,dx + \\ &\quad\ \text{Summe aller } g(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Erläuterung zur Regel (3)

Die Faktorregel entspricht dem üblichen Ausklammern:

$$\begin{aligned}\int_a^b c\,f(x)\,dx &= \text{Summe aller } c\cdot f(x)\,dx \\ &= c\cdot \text{Summe aller } f(x)\,dx \\ &= c\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Zu jeder der drei dargelegten Regeln folgt nun ein Beispiel.

Beispiel 1 (Integrationsgrenzen)

$$\int_0^2 (x-1)\,dx$$

Lösungsweg 1:

$F(x) = 0{,}5x^2 - x$ ist eine Stammfunktion von $x-1$.

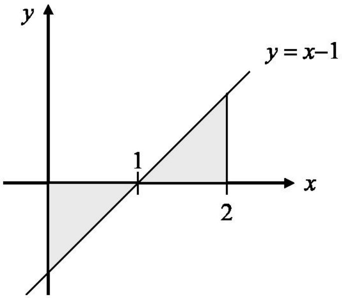
Also:

$$\int_0^2 (x-1)\,dx \;=\; F(2)-F(0) \;=\; 0{,}5\cdot 2^2 - 2 \;-\; 0 \;=\; 0\,.$$

Das Integral ist überraschenderweise Null:

$$\int_0^2 (x-1)\,dx \;=\; 0$$

Lösungsweg 2:



Im Bereich 0 bis 1 verläuft die Gerade unterhalb der x-Achse, und im Bereich von 1 bis 2 oberhalb. Daher ergibt sich beim Integral eine negative und eine positive Fläche, die sich im vorliegenden Fall sogar aufheben und Null ergeben.

$F(x) = 0{,}5x^2 - x$ ist eine Stammfunktion von $x-1$. Daher:

$$\int_0^2 (x-1)\,dx = \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= F(1) - F(0) \quad + \quad F(2) - F(1)$$

$$= 0{,}5 \cdot 1 - 1 - 0 \quad + \quad 0{,}5 \cdot 4 - 4 - (0{,}5 \cdot 1 - 1)$$

$$= -0{,}5 \quad + \quad 0{,}5$$

$$= 0$$

Beispiel 2 (Summenregel)

$$\int_0^1 (x^2 + x)\,dx$$

Lösung:

Nach der Summenregel ist:

$$\int_0^1 (x^2 + x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 x\,dx.$$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ ist eine Stammfunktion von x^2,

$G(x) = \frac{x^2}{2}$ ist eine Stammfunktion von x.

Daher:

$$\int_0^1 (x^2 + x)\,dx = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{6}$$

Also

$$\int_0^1 (x^2 + x)\,dx = \frac{5}{6}$$

Schreibweise:

Beim vorigen Beispiel wurde das Integral auf *zwei* Integrale zurückgeführt. Bei ihrer Berechnung sind zwei Stammfunktionen zu betrachten. Um Stammfunktionen direkt (ohne Buchstaben wie F und G) hinschreiben zu können, hat sich folgende Schreibweise bewährt und weitgehend durchgesetzt:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

Die Stammfunktion steht hier ausdrücklich da, ohne einen Namen (wie den Buchstaben F) für sie einzuführen.

Allgemein:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel 3 (Faktorregel)

$$\int_0^1 5x^2\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 5x^2\,dx &= 5\cdot\int_0^1 x^2\,dx\\ &= 5\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\ &= 5\cdot\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)\\ &= 5\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Also

$$\int_0^1 5x^2\,dx = \frac{5}{3}$$

5.2 Partielle Integration

Die partielle Integration ist eine Formel, die auf der Produktregel der Differentialrechnung beruht. Der Name „partielle“ (= „teilweise“) Integration rührt daher, dass von einem Produkt zunächst nur ein Faktor integriert (eine Stammfunktion gebildet) wird.

Wir leiten zunächst die Formel für die partielle Integration her und betrachten dann drei typische Beispiele. Diese Beispiele decken so gut wie alle Fälle ab, die in der Praxis vorkommen.

<u>Herleitung der partiellen Integration</u>

Die Produktregel besagt, dass man ein Produkt ableitet, indem man jeweils einen Faktor ableitet und die Produkte addiert:

$$(f(x)\cdot g(x))' \;=\; f'(x)\cdot g(x) \;+\; f(x)\cdot g'(x)$$

Bilde nun das Integral auf beiden Seiten:

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))'\,dx \;=\; \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx \;+\; \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Nach dem Hauptsatz ist das links stehende Integral:

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))'\,dx \;=\; \left[\,f(x)\cdot g(x)\right]_a^b \;,$$

da $f(x)\cdot g(x)$ eine Stammfunktion von $(f(x)\cdot g(x))'$ ist.

Man erhält also:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Nach dem ersten Integral aufgelöst, ergibt sich:

Partielle Integration

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

Erläuterung zur partiellen Integration

Bei der partiellen Integration wird das Integral eines Produktes von zwei Faktoren betrachtet.

$$\int_a^b \underbrace{f'(x)}\cdot g(x)\,dx = \left[\underbrace{f(x)}\cdot \underbrace{g(x)}\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot \underbrace{g'(x)}\,dx$$

Stammfunktion bilden *ableiten*

Zunächst wird zu einem der Faktoren eine Stammfunktion gesucht. (Der Faktor wird „integriert". Daher kommt die Bezeichnung „partielle Integration".) Das neue Produkt wird an den Stellen a und b berechnet, und die Differenz gebildet.

In einem zweiten Schritt wird beim neuen Produkt der andere (unverändert gebliebene) Faktor abgeleitet. Von diesem Produkt wird das Integral genommen.

Beispiel 1 (Faktor loswerden durch Ableiten)

$$\int_0^1 x \cdot e^x \, dx$$

Lösung:

Wenn man den Faktor x ableitet, vereinfacht er sich zu 1. Daher empfiehlt es sich, den zweiten Faktor zu integrieren. Eine Stammfunktion für e^x ist e^x selber. Also:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \cdot e^x \, dx &= \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot e^x \, dx \\
&= \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\
&= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 e^x \, dx \\
&= e - \left[e^x\right]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= e - (e-1) = 1
\end{aligned}$$

Somit:

$$\int_0^1 x \cdot e^x \, dx = 1$$

<u>Beispiel 2 (Produkt erzeugen durch den Faktor 1)</u>

$$\int_1^2 \ln x \, dx$$

<u>Lösung:</u>

(Vorbemerkungen: Auf den ersten Blick scheint die partielle Integration hier nicht anwendbar, denn im Integral taucht kein Produkt auf. Man kann aber

$$\ln x = 1 \cdot \ln x$$

schreiben, und dann steht doch ein Produkt da.)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln x \, dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx \\
&= \left[x \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 x \cdot (\ln x)' \, dx \\
&= 2 \cdot \ln 2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= \ln 2^2 - \int_1^2 1 \, dx \\
&= \ln 4 - \left[x\right]_1^2 \\
&= \ln 4 - (2-1) \\
&= \ln 4 - 1 \\
&\approx 0,38629
\end{aligned}$$

Also: $\int_1^2 \ln x \, dx \approx 0,38629$

<u>Beispiel 3 (Eine Gleichung für das Integral bekommen)</u>

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

<u>Lösung:</u>

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin x \, dx \\
&= \big[(-\cos x) \cdot \sin x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot (\sin x)' \, dx \\
&= \big[-\cos x \cdot \sin x\big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \cdot \cos x \, dx \\
&= 0 + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \\
&= \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Also

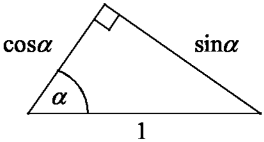
$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx .$$

Dieses Ergebnis ist zunächst sehr enttäuschend, denn

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

ist grundsätzlich nicht einfacher als das ursprüngliche Integral. Wir lösen die Beziehung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$



die nichts anderes ist als der Satz von Pythagoras in trigonometrischem Gewande, nach $\cos^2 x$ auf:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Wir setzen das Ergebnis ein:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \cos^2 x\, dx$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi 1\, dx - \int_0^\pi \sin^2 x\, dx$$

Das gesuchte Integral kann nun als *Unbekannte* in dieser *Gleichung* aufgefasst werden. Wir lösen nach dem Integral auf:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi 1\, dx - \int_0^\pi \sin^2 x\, dx$$

$$2 \cdot \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi 1\, dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} 1\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\big[x\big]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}(\pi - 0) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57080$$

5.3 Substitutionsregel

Substitutionen zur Vereinfachung

In der Mathematik kommen „Substitutionen“ (Ersetzungen) öfter vor. Beispielsweise kann der unangenehm kompliziert aussehende Ausdruck

$$(2x+1)e^{2x+1}\sin(2x+1)$$

durch die Abkürzung (Ersetzung, Substitution):

$$z = 2x+1$$

vereinfacht werden zu:

$$ze^{z}\sin z\,.$$

Substitutionen bei Integralen

Wir möchten nun bei einem Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

eine Substitution $x = g(t)$ durchführen. Das hat Auswirkungen auf:

- den Integranden $f(x)$,
- die kleine Differenz dx,
- die Integrationsgrenzen a, b.

Der Integrand

Wir ersetzen: $f(x) \to f(g(t))$

Die kleine Differenz

Nach Definition der Ableitung (= Steigung der Tangente ≈ Steigung der Sekante = Differenzenquotient) ist:

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

Also

$$dx = g'(t)\,dt$$

Wir ersetzen: $dx \to g'(t)\,dt$

Die Integrationsgrenzen

Die Variable x läuft von a bis b. Wir wählen t_a und t_b so, dass

$$a = g(t_a)$$
$$b = g(t_b)$$

Dann läuft t im Bereich von t_a bis t_b. Wir ersetzen also:

$$a \to t_a$$
$$b \to t_b$$

Alle Ersetzungen vorgenommen, ergibt sich die Substitutionsregel für Integrale:

Substitutionsregel

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t))\cdot g'(t)\,dx}$$

Für die praktische Anwendung braucht man diese Formel nicht auswendig zu wissen. Mann betrachtet, wie oben vorgeführt, den Integranden, das *dx* und die Integrationsgrenzen getrennt und setzt ein.

Es gibt grundsätzlich zwei Arten, die Substitution anzuwenden:

A

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\begin{array}{c}\textit{gegebenes}\\ \textit{Integral}\end{array}} = \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt}_{\begin{array}{c}\textit{Stellt sich als}\\ \textit{einfacheres Integral}\\ \textit{heraus}\end{array}}$$

B

$$\underbrace{\int_{t_a}^{t_b} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt}_{\begin{array}{c}\textit{Gegebenes Integral,}\\ \textit{Integrand ist ein}\\ \textit{Produkt der Gestalt:}\\ \textit{(Ausdruck in g)}\cdot g'\end{array}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\begin{array}{c}\textit{einfacheres}\\ \textit{Integral}\end{array}}$$

Diese Anwendungen werden nun in mehreren Beispielen vorgeführt.

Beispiel 1 (Typ A)

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Lösung:

Vorbemerkungen:
Aus der bereits erwähnten Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ folgt $\cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t}$. Der Kosinus ist im betrachten Bereich zwischen 0 und $\pi/6$ positiv, daher scheidet das negative Vorzeichen aus, somit: $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$.
Diese Formel legt die Substitution $x = \sin t$ nahe, denn der Wurzelausdruck $\sqrt{1-x^2}$ kann dadurch vereinfacht werden.

Substitution:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t \text{ , also } dx = \cos t\; dt$$

$$x = 0 = \sin 0 \text{, also } t_a = 0$$

$$x = 0,5 = \sin \pi/6 \text{, also } t_b = \pi/6$$

Daher:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\; dt$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos t} \cos t\; dt$$

$$= \int_0^{\pi/6} 1\, dt$$

$$= [t]_0^{\pi/6} = \pi/6 - 0 = \pi/6$$

Also: $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi/6$

<u>Beispiel 2 (Typ A)</u>

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

<u>Lösung:</u>

Substitution:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t \text{ , also } dx = \cos t\, dt$$

$$x = 0 = \sin 0, \text{ also } t_a = 0$$

$$x = 1 = \sin \pi/2, \text{ also } t_b = \pi/2$$

Also:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dx$$

Wir berechnen $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dx$ durch partielle Integration:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = [\cos t \cdot \sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin t) \cdot \sin t\, dt$$

$$= 0 + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1\, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

Daher:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

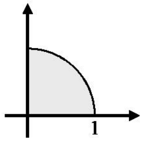
$$2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}$$

Insgesamt:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

Das berechnete Integral ist ein Viertel der Fläche des Kreises mit Radius 1:



Beispiel 3 (Typ A)

$$\int_0^1 e^{3x+2}\,dx$$

Lösung:

Substitution:

$$3x+2 = t$$
$$\frac{dt}{dx} = (3x+2)' = 3 \text{ , also } dx = \tfrac{1}{3}dt$$
$$x = 0, \text{ also } t = 3\cdot 0+2 = 2$$
$$x = 1, \text{ also } t = 3\cdot 1+2 = 5$$

Eingesetzt:

$$\int_0^1 e^{3x+2}dx = \int_2^5 e^t \tfrac{1}{3}\,dt = \left[\tfrac{1}{3}e^t\right]_2^5 = \tfrac{1}{3}e^5 - \tfrac{1}{3}e^2 \approx 47{,}01$$

Also:

$$\int_0^1 e^{3x+2}\,dx \approx 47{,}01$$

Beispiel 4 (Typ B)

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Lösung:

Der Ausdruck in der Wurzel hat als Ableitung den Faktor vor der Wurzel: $(1+x^2)' = 2x$.

$$\int_0^1 \underbrace{2x}\,\underbrace{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Ableitung

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z = 1+x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = (1+x^2)' = 2x \text{, also } dz = 2x\,dx$$

$$x = 0, \text{ also } z = 1+0^2 = 1$$

$$x = 1, \text{ also } z = 1+1^2 = 2$$

Eingesetzt:

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\;2x\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{z}\,dz$$

$$= \int_1^2 z^{0,5}\,dz$$

$$= \left[\frac{z^{0.5+1}}{0,5+1} \Big| \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{z^{3/2}}{3/2} \Big| \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2}{3} \sqrt{z^3} \Big| \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3}$$

$$\approx 1,219$$

Also:

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\, dx \approx 1,219$$

Beispiel 5 (Typ B)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \; \cos x \, dx$$

Lösung:

Die Ableitung von Sinus ist Kosinus:

$$\int_0^{\pi/2} (\underbrace{\sin x}_{})^2 \underbrace{\cos x}_{} \, dx$$

Ableitung

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z = \sin x$$
$$\frac{dz}{dx} = (\sin x)' = \cos x \text{ , also } dz = \cos x \, dx$$
$$x = 0, \text{ also } z = \sin 0 = 0$$
$$x = \pi/2, \text{ also } z = \sin \pi/2 = 1$$

Eingesetzt:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \int_0^1 z^2 \, dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \tfrac{1}{3}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \tfrac{1}{3}$$

Eine weitere Herleitung der Substitutionsregel

Wir betrachten nun eine weitere Begründung der Substitutionsregel. Sie beruht auf dem Hauptsatz.
Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion $f(x)$. Dann besagt der Hauptsatz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Wir berechnen auch das Integral

$$\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \qquad (\text{wobei } a = g(t_a) \text{ und } b = g(t_b))$$

mit Hilfe des Hauptsatzes. Dazu müssen wir eine Stammfunktion von $f(g(t)) \cdot g'(t)$ finden. Nun ist nach der Kettenregel:

$$(F(g(t))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Daher ist $F(g(t))$ eine Stammfunktion von $f(g(t)) \cdot g'(t)$.
Also:

$$\begin{aligned}\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt &= F(g(t_b)) - F(g(t_a)) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Die Integrale

$$\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

sind daher gleich (beide sind $F(b) - F(a)$).

Die Substitutionsregel ist damit bewiesen.

Aufgaben

Einfache Integrationsregeln

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^2 (2x^4 + 3x^7 - 2x)\,dx$

b) $\int_1^4 \left(3x + \frac{2}{x^2}\right)dx$

c) $\int_{-1}^0 (x + 5e^x)\,dx$

d) $\int_{-1}^1 (2\sin x + 4\cos x)\,dx$

e) $\int_0^\pi (0{,}5e^x + 3\sin x)\,dx$

f) $\int_0^a (x^2 - 2\sin x)\,dx$

Partielle Integration

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^\pi x \sin x\,dx$

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx$

c) $\int_0^{0{,}5} \arcsin x\,dx$

d) $\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$

e) $\int_0^\pi \sin x \cos x\,dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^a x\cos x\,dx$ b) $\int_0^a x^2\cos x\,dx$ c) $\int_0^a e^x\cos x\,dx$

d) $\int_0^a \cos^3 x\,dx$ e) $\int_0^a \cos^4 x\,dx$ f) $\int_1^a \frac{\ln x}{x}\,dx$

g) $\int_1^a x\ln x\,dx$ h) $\int_1^a x^n\ln x\,dx$

Substitution

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^1 (x+1)^{10}\,dx$ b) $\int_0^1 (2x+3)^{10}\,dx$

c) $\int_0^1 \cos(3x+1)\,dx$ d) $\int_0^1 e^{5x+2}\,dx$

e) $\int_0^\pi \sin^4 x\cos x\,dx$ f) $\int_1^2 \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx$

g) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$ h) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

6. Unbestimmte Integrale

6.1 Definition des unbestimmten Integrals

Der Hauptsatz besagt, dass die Berechnung eines Integrals im Wesentlichen darauf hinausläuft, eine *Stammfunktion* zu finden.
Das „**unbestimmte Integral**" ist ein Symbol für eine Stammfunktion und wird als Integral ohne Integrationsgrenzen geschrieben:

$$\int f(x)\,dx \quad = \quad \text{Stammfunktion von } f(x)$$

Es ist ein praktisches Symbol bei der Berechnung von Stammfunktionen. Die lästigen Integrationsgrenzen kann man sich dabei ersparen.

Leider sind Stammfunktionen nicht eindeutig bestimmt. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so kann man noch eine beliebige Konstante C addieren. Man bekommt wieder Stammfunktion von $f(x)$:

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

Das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx$$

ist eine *beliebige* Stammfunktion des Integranden $f(x)$. Deswegen schreibt man:

$$\int f(x)dx \ = F(x)+C$$

Hierbei ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, und C eine Konstante, die sogenannte „Integrationskonstante“.

6.2 Regeln für unbestimmte Integrale

Für unbestimmte Integrale gelten analoge Regeln wie bei den üblichen Integralen. Auch ihre Anwendung ist entsprechend.

<u>Integrationsregeln</u>

1. Die Summenregel

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx \;=\; \int f(x)\,dx \;+\; \int g(x)\,dx$$

2. Die Faktorregel

$$\int c\,f(x)\,dx \;=\; c\int f(x)\,dx$$

3. Die partielle Integration

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx \;=\; f(x)\cdot g(x) \;-\; \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

4. Die Substitutionsregel

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \qquad (\text{wo } x = g(t),\; dx = g'(t)\,dt\,)$$

Begründungen der Regeln 1, 2 und 3

Wir prüfen, ob die rechte Seite eine Stammfunktion des Integranden im linken Integral ist. Wir führen dies exemplarisch für die Faktorregel durch:

$$(c\int f(x)\,dx)' \;=\; c(\int f(x)\,dx)' \;=\; c\,f(x)$$

Also ist $c\int f(x)\,dx$ eine Stammfunktion von $c\,f(x)$.

Begründung der Substitutionsregel

Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann wird die linke Seite der Substitutionsregel:

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x)+C.$$

Im Hinblick auf die rechte Seite (die bloß mit der Variablen t zu tun hat) drücken wir x durch t aus. Dazu setzen wir $x = g(t)$ ein:

$$\int f(x)dx \;=\; F(g(t))+C$$

Es ist nun zu zeigen, dass:

$$F(g(t))+C \;=\; \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt.$$

Wir müssen also nachzuweisen, dass $F(g(t))+C$ eine Stammfunktion des Integranden $f(g(t))\cdot g'(t)$ ist.

Dazu leiten wir ab, wobei wir die Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned}(F(g(t))+C)' &= (F(g(t)))'+0\\ &= F'(g(t))\cdot g'(t)\\ &= f(g(t))\cdot g'(t)\end{aligned}$$

Damit ist die Substitutionsregel bewiesen.

6.3 Beispiele für die Integrationsregeln

Beispiel 1 (Summenregel)

$\int (x^2 + x)\,dx$

Lösung:

Nach der Summenregel ist:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x)\,dx &= \int x^2\,dx + \int x\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 + \frac{x^2}{2} + C_2 \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \qquad (C = C_1 + C_2) \end{aligned}$$

Also

$$\int (x^2 + x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

Bemerkung zu den Integrationskonstanten:

Um eine unübersichtliche Flut von Integrationskonstanten zu vermeiden, kann man sich auf eine einzige Integrationskonstante beschränken, die man erst am Schluss (nach Auflösen des letzten Integrals) schreibt. Das Integral aus Beispiel 1 kann daher wie folgt berechnet werden:

$$\int (x^2 + x)\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

<u>Beispiel 2 (Faktorregel)</u>

$\int 5x^2\,dx$

<u>Lösung:</u>

$$\begin{aligned}\int 5x^2\,dx &= 5\int x^2\,dx\\ &= 5\cdot\frac{x^3}{3}+C\\ &= \frac{5}{3}x^3+C\end{aligned}$$

Also:

$$\int 5x^2\,dx = \frac{5}{3}x^3+C$$

<u>Beispiel 3 (partielle Integration)</u>

$\int x\cdot e^x\,dx$

<u>Lösung:</u>

Wenn man den Faktor x ableitet, vereinfacht er sich zu 1. Daher empfiehlt es sich, den zweiten Faktor zu integrieren. Eine Stammfunktion für e^x ist e^x selber. Also:

$$\begin{aligned}\int x\cdot e^x\,dx &= x\cdot e^x - \int (x)'\cdot e^x\,dx\\ &= x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx\\ &= x\cdot e^x - \int e^x\,dx\\ &= x\cdot e^x - e^x + C\\ &= (x-1)\cdot e^x + C\end{aligned}$$

Daher: $\int x \cdot e^x \, dx = (x-1) \cdot e^x + C$

Beispiel 4 (partielle Integration)

$\int \ln x \, dx$

Lösung:

Vorbemerkungen:
Auf den ersten Blick scheint eine partielle Integration hier nicht anwendbar, denn im Integral taucht kein Produkt auf. Man kann aber jeden Term als Produkt mit dem Faktor 1 auffassen. Insbesondere kann man

$$\ln x = 1 \cdot \ln x$$

schreiben.

Den Faktor 1 kann man leicht integrieren: x ist eine Stammfunktion.

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx \\
&= x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' \, dx \\
&= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx \\
&= x \cdot \ln x - x + C \\
&= x \cdot (\ln x - 1) + C
\end{aligned}$$

Also: $\int \ln x \, dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$

<u>Beispiel 5 (partielle Integration)</u>

$$\int \sin^2 x \, dx$$

<u>Lösung:</u>

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin x \, dx \\
&= (-\cos x) \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cdot (\sin x)' \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Also

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx$$

Wir lösen die Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, die nichts anderes ist als der Satz von Pythagoras in trigonometrischer Verkleidung, nach $\cos^2 x$ auf. Das Ergebnis

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

setzen wir ein in das rechte Integral der Gleichung:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Gleichung

$$\int \sin^2 x\,dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x\,dx.$$

Das gesuchte Integral kann nun als Unbekannte in dieser Gleichung aufgefasst werden. Wir lösen nach dem Integral auf:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

$$2 \cdot \int \sin^2 x\,dx = -\cos x \cdot \sin x + x$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

Also:

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

Beispiel 6 (Substitution)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Lösung:

Substitution:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t \text{ , also } \; dx = \cos t\,dt$$

Also:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\cos t} \cos t \, dt$$
$$= \int 1 \, dt$$
$$= t + C$$

Nun muss t wieder durch x ausgedrückt werden. Wegen $x = \sin t$, ist $t = \arcsin x$. Daher:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = t + C = \arcsin x + C$$

Also:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

Beispiel 7 (Substitution)

$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

Lösung:

Substitution:

$$x = \sin t$$
$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t \text{ , also } dx = \cos t \, dt$$

Also:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt$$

Wir berechnen $\int \cos^2 t \, dx$ durch partielle Integration (vergleiche Beispiel 5):

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t\,dt &= \sin t \cdot \cos t - \int \sin t \cdot (-\sin t)\,dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + \int \sin^2 t\,dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + \int (1-\cos^2 t)\,dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + \int 1\,dt - \int \cos^2 t\,dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t\,dt\end{aligned}$$

Also

$$\int \cos^2 t\,dt = \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t\,dt .$$

Nach dem Integral aufgelöst:

$$\int \cos^2 t\,dt = \tfrac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t) + C .$$

Damit

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t) + C$$

Nun muss t wieder durch x ausgedrückt werden. Wegen $x = \sin t$, ist $t = \arcsin x$. Daher:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t) + C$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} \;+\; t\,) \;+\; C$$

$$= \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1-x^2} \;+\; \arcsin x\,) \;+\; C$$

Also:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1-x^2} \;+\; \arcsin x\,) \;+\; C$$

Beispiel 8 (Substitution)

$\int e^{3x+2}\,dx$

Lösung:

Substitution:

$$3x+2 \;=\; t$$

$$\frac{dt}{dx} \;=\; (3x+2)' \;=\; 3 \text{ , also } \; dx \;=\; \tfrac{1}{3}\,dt$$

Eingesetzt:

$$\int e^{3x+2}\,dx \;=\; \int e^t\,\tfrac{1}{3}\,dt \;=\; \tfrac{1}{3}e^t + C$$

Drücke t wieder durch x aus, $t = 3x+2$:

$$\int e^{3x+2}\,dx \;=\; \tfrac{1}{3}e^t + C$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{3x+2} + C$$

Also: $\int e^{3x+2}\,dx \;=\; \tfrac{1}{3}e^{3x+2} + C$

Beispiel 9 (Substitution)

$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx \;=\; ?$

Lösung:

Der Ausdruck in der Wurzel hat als Ableitung den Faktor vor der Wurzel: $(1+x^2)' = 2x$.

$$\int \underbrace{2x}\,\underbrace{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Ableitung

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z \;=\; 1+x^2$$

$$\frac{dz}{dx} \;=\; (1+x^2)' \;=\; 2x \text{ , also } \; dz \;=\; 2x\,dx$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx \;&=\; \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx \\
&=\; \int \sqrt{z}\,dz \\
&=\; \int z^{0,5}\,dz \\
&=\; \frac{z^{0,5+1}}{0,5+1} \;+\; C \\
&=\; \frac{z^{3/2}}{3/2} \;+\; C \\
&=\; \tfrac{2}{3}\sqrt{z^3} \;+\; C
\end{aligned}$$

Drücke z wieder durch x aus, $z = 1+x^2$:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{z^3} + C$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$$

Also: $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$

<u>Beispiel 10 (Substitution)</u>

$\int \sin^2 x \ \cos x\, dx$

<u>Lösung:</u>

Die Ableitung von Sinus ist Kosinus:

$$\int (\underbrace{\sin x}) ^2 \underbrace{\cos x}\, dx$$

Ableitung

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z = \sin x$$
$$\frac{dz}{dx} = (\sin x)' = \cos x \text{ , also } dz = \cos x\, dx$$

Eingesetzt:

$$\int \sin^2 x \ \cos x\, dx = \int z^2\, dz$$
$$= \frac{z^3}{3} + C$$

Drücke z wieder durch x aus, $z = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \ \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Das Integral ist damit berechnet.

6.4 Eine kleine Integraltafel

Bei der Berechnung von Integralen haben wir schon zahlreiche Stammfunktionen bestimmt. In einfachen Fällen haben wir sie durch Rückführung auf bekannte Ableitungen gefunden. Bei schwierigen Integralen haben wir zusätzlich die Integrationsregeln und -techniken benutzt. In der Praxis der Naturwissenschaft und Technik kommen auch viele kompliziertere Integrale vor, die mühsam zu berechnen sind. Daher gibt es umfangreiche Integraltafeln als Nachschlagewerke für die Praxis. Wir fassen nun unsere bisher ermittelten Stammfunktionen und unbestimmten Integrale in einer kleinen Integraltafel zusammen.

1. Die Potenzfunktion x^n

Beim Ableiten einer Potenzfunktion vermindert sich der Exponent um 1 und der ursprüngliche Exponent rutscht als Koeffizient vor die Potenz: $(x^m)' = mx^{m-1}$. Als Kandidat für eine Stammfunktion von x^n kommt daher zunächst x^{n+1} in Frage. Da nun $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$, müssen wir noch durch $n+1$ teilen, um die Vorzahl loszuwerden:

$$(\ ? \ )' = x^n$$

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$$

Also

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

Da die Division durch Null nicht möglich ist, darf der Nenner $n+1$ nicht 0 sein, also muss $n \neq -1$ vorausgesetzt werden.

Der Fall $n = -1$, d. h. $x^{-1} = \frac{1}{x}$, wird später betrachtet.

Schließlich ist zu beachten, dass auch **Wurzeln** als Potenzen betrachtet werden können:

$$\sqrt{x} = x^{0,5}, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Daher liefert das obige Integral die Sonderfälle:

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{0,5}\,dx = \frac{x^{0,5+1}}{0,5+1} + C = \frac{x^{0,5} \cdot x}{1,5} + C$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$\int \sqrt[n]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C = \frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x} + C$$

2. Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Ableitungen der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus sind:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{und} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

woraus wir sofort zwei Integrale bekommen:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

Und mittels partieller Integration können wir auch das Integral des natürlichen Logarithmus berechnen:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x\, dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)'\, dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln x - x + C \\ &= x \cdot (\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

Also:

$$\int \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$$

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch die allgemeine Exponentialfunktion a^x, wobei $a > 0$. Nach Definition des Logarithmus haben wir $e^{\ln a} = a$. Damit können wir nun die Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= ((e^{\ln a})^x)' \\ &= (e^{(\ln a)x})' \\ &= (\ln a) \cdot e^{(\ln a)x} && \text{(Kettenregel)} \\ &= (\ln a) \cdot a^x\end{aligned}$$

Also:

$$(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

3. Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens
Wir rekapitulieren die Ableitungen von Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} 1 + \tan^2 x \quad \text{oder} \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \begin{cases} -(1 + \cot^2 x) \quad \text{oder} \\ -\dfrac{1}{\sin^2 x} \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Integrale:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \tan^2 x \, dx = -x + \tan x + C$$

$$\int \cot^2 x \, dx = -x - \cot x + C$$

Die Integrale von Tangens und Kotangens kann man direkt durch Substitution bestimmen:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \qquad \text{Subst. } z = \cos x,\ \ dz = -\sin x\,dx$$
$$= -\int \frac{1}{z}\,dz$$
$$= -\ln z + C$$
$$= -\ln \cos x + C$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad \text{Subst. } z = \sin x,\ \ dz = \cos x\,dx$$
$$= \int \frac{1}{z}\,dz$$
$$= \ln z + C$$
$$= \ln \sin x + C$$

4. Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen arcsin, arccos und arctan liefern die ursprünglichen Winkel aus gegebenen Werten von Sinus, Kosinus bzw. Tangens, anders gesagt:

$$\sin(\arcsin x) = x,\ \ \cos(\arccos x) = x \ \text{ und } \ \tan(\arctan x) = x.$$

Wir wiederholen hier kurz die Berechnung der Ableitungen der Arkusfunktionen:

$$\sin(\arcsin x) = x$$
$$(\sin(\arcsin x))' = (x)' \qquad \text{Kettenregel}$$
$$\sin'(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)' = 1$$
$$\cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)' = 1 \qquad \cos() = \sqrt{1-\sin^2()}$$
$$\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}\cdot(\arcsin x)' = 1$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} \cdot (\arcsin x)' &= 1 \\
\sqrt{1-x^2} \cdot (\arcsin x)' &= 1 \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Völlig analog erhält man

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ferner:

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan x) &= x \\
(\tan(\arctan x))' &= (x)' \qquad \text{Kettenregel} \\
\tan'(\arctan x) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\
\left(1+\tan^2(\arctan x)\right) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\
(1+x^2) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Integrale gewonnen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$$

Schließlich berechnen wir noch die Integrale von arcsin und arctan mittels partieller Integration.

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot \arcsin x\,dx$$

$$= x\cdot \arcsin x - \int x\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \begin{cases} z = 1-x^2 \\ dz = -2x dx \end{cases}$$

$$= x\cdot \arcsin x + \int \frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz$$

$$= x\cdot \arcsin x + \int \frac{1}{2} z^{-1/2}\,dz$$

$$= x\cdot \arcsin x + z^{1/2} + C$$

$$= x\cdot \arcsin x + \sqrt{z} + C$$

$$= x\cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan x\,dx = \int 1\cdot \arctan x\,dx$$

$$= x\cdot \arctan x - \int x\cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \begin{cases} z = 1+x^2 \\ dz = 2x dx \end{cases}$$

$$= x\cdot \arctan x - \int \frac{1}{2z}\,dz$$

$$= x\cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln z + C$$

$$= x\cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Nun haben wir allerlei Integrale bereitgestellt und können sie in einer kleinen Integraltafel zusammenfassen.

5. Die Integraltafel

Potenzen von x
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$
$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$ $\int \sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x} + C$
Exponentialfunktionen
$\int e^x\,dx = e^x + C$ $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \qquad (a > 0)$
Trigonometrische Funktionen
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \tan x\,dx = -\ln \cos x + C$ $\int \cot x\,dx = \ln \sin x + C$

Quadrate trigonometrischer Funktionen
$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$
$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \cos x \cdot \sin x) + C$
$\int \tan^2 x\,dx = -x + \tan x + C$
$\int \cot^2 x\,dx = -x - \cot x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$
Arkusfunktionen und natürlicher Logarithmus
$\int \arcsin x\,dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\int \arccos x\,dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\int \arctan x\,dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\int \ln x\,dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$
Bruch- und Wurzelfunktionen
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

Bruch- und Wurzelfunktionen (Fortsetzung)
$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \arctan x + C$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int (x^3 + 5x^2 - 3x)\, dx$ b) $\int \left(2x + \frac{3}{x^2}\right) dx$

c) $\int (x + 4e^x)\, dx$ d) $\int (2\sin x + 4\cos x)\, dx$

e) $\int (3\sin x + 2e^x)\, dx$ f) $\int (x^2 - 2\sin x)\, dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x^2 \sin x\, dx$ b) $\int \arcsin x\, dx$

c) $\int \cos^2 x\, dx$ d) $\int \sin x \cos x\, dx$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x \cos x\, dx$ b) $\int x^2 \cos x\, dx$ c) $\int e^x \cos x\, dx$

d) $\int \cos^3 x\, dx$ e) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ f) $\int x \ln x\, dx$

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int (2x + 3)^{10}\, dx$ b) $\int \cos(3x + 1)\, dx$

c) $\int e^{5x+2}\, dx$ d) $\int \sin^4 x \cos x\, dx$

e) $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ f) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ c) $\int \frac{1}{1-x}\,dx$

6. Bestätigen Sie mittels partieller Integration die Formel:

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx\,.$$

(Diese Formel ermöglicht es, das Integral von $\sin^n x$ Schritt für Schritt zu berechnen.)

Lösungen

Der Hauptsatz

1. a) 19,5 b) 12 c) $1{,}5a^2 + 2a$

2.

a) 17,5 b) $0{,}5a^2 + a$ c) $-0{,}5$ d) 0

e) $\frac{2}{3}$ f) 0 g) 2,5 h) 0

i) 2 j) $\mathrm{e} - 1 = 1{,}718...$ k) 0,75 l) 2

m) 18 n) $4b^2 + 5b$

Drehkörper

1. 47,1238898... cm^3
2. ca. 217,683 dm^3
3. ca. 54,454 dm^3
4. $V = \pi r^2 h$
5. $V = \frac{\pi h}{15}\left(8R^2 + 4Rr + 3r^2\right)$

Einfache Integrationsregeln

1. a) 104,8 b) 24 c) 2,6606… d) 6,7317…

   e) 17,0703… f) $\frac{a^3}{3} + 2\cos a - 2$

Partielle Integration

1. a) π b) $\pi^2 - 4$ c) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 = 0{,}1278\ldots$

   d) $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707\ldots$ e) 0

2.
a) $a \sin a + \cos a - 1$
b) $(a^2 - 2)\sin a + 2a\cos a$
c) $0{,}5(\sin a + \cos a)e^a - 0{,}5$
d) $\frac{1}{3}(2 + \cos^2 a)\sin a$
e) $\frac{1}{4}\cos^3 a \sin a + \frac{3}{8}(a + \sin a \cos a)$
f) $\frac{1}{2}(\ln a)^2$
g) $\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$
h) $\frac{a^{n+1}}{n+1}\ln a - \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Substitution

1.
a) 186,090909… b) 2.211.408,090909…
c) $-0{,}5327578267\ldots$ d) 217,8488204659…
e) 0 f) 1,504077396776…
g) 0,643790283299… h) 0

Unbestimmte Integrale

1.

a) $\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+C$ b) $x^2-\frac{3}{x}+C$

c) $\frac{x^2}{2}+4e^x+C$ d) $-2\cos x+4\sin x+C$

e) $-3\cos x+2e^x+C$ f) $\frac{x^3}{3}+2\cos x+C$

2.
a) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$
b) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$
c) $\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C$
d) $\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

3.
a) $x\sin x+\cos x+C$
b) $2x\cos x+(x^2-2)\sin x+C$
c) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+C$
d) $\frac{1}{3}(2+\cos^2 x)\sin x+C$
e) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

f) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

4.

a) $\frac{(2x+3)^{11}}{22} + C$ b) $\frac{1}{3}\sin(3x+1) + C$

c) $\frac{1}{5}e^{5x+2} + C$ d) $\frac{1}{5}\sin^5 x + C$

e) $\ln(1+x^2) + C$ f) $\left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\right)\sqrt{x+1} + C$

5.

a) $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ b) $\arcsin\frac{x}{a} + C$ c) $-\ln(1-x) + C$

Hinweis: Ergebnisse, die nicht glatt aufgehen, sind in der Regel *gerundet* oder mit Auslassungspunkten (…) angegeben.

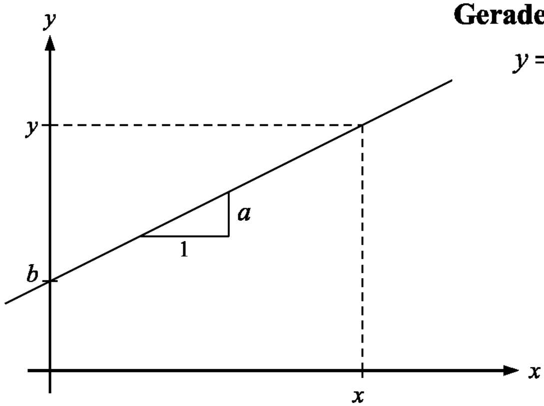
Anhang 1:

Geraden und Parabeln
Zusammenfassung

I. Geraden

1. Die Geradengleichung

Die Geradengleichung liefert die y-Koordinate (Höhe) eines beliebigen Punktes auf der Geraden, wenn die x-Koordinate gegeben ist.



Geradengleichung:

$$y = ax + b$$

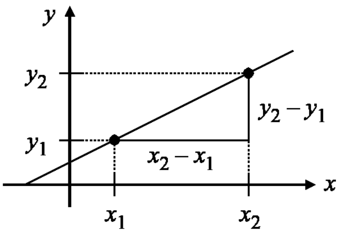
Die Zahlen a (Vorzahl von x) und b (Konstante ohne x) haben die folgenden geometrischen Bedeutungen:

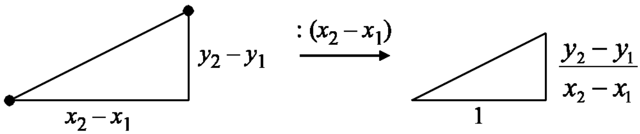
a = ***Steigung*** der Geraden
(1 Schritt nach rechts und a Schritte nach oben, bzw. nach unten, wenn a negativ ist.)

b = ***Schnittpunkt*** mit der ***y-Achse***.

2. Steigung aus zwei gegebenen Punkten berechnen

Aus den zwei gegebenen Punkten kann ein vergrößertes Steigungsdreieck gebildet werden. Durch eine einfache Division kann dieses in ein normiertes Steigungsdreieck überführt werden (mit der horizontalen Seite der Länge 1). Die Höhe des Dreiecks ist dann die Steigung der Geraden:





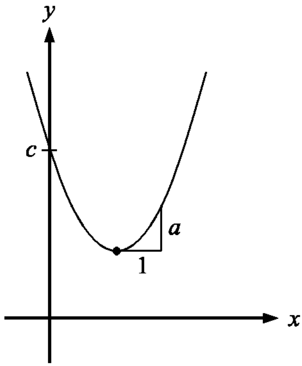
Also ist die Steigung a der Geraden:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

II. Parabeln

Allgemeine Form der Parabelgleichung:

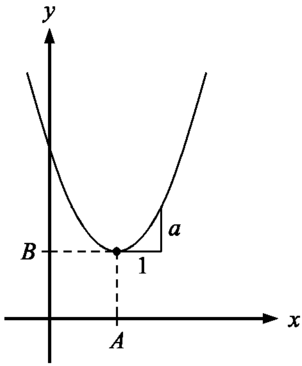
$$y = ax^2 + bx + c$$



quadratische Ergänzung ↓ ↑ ausmulti-plizieren

Scheitelform der Parabelgleichung:

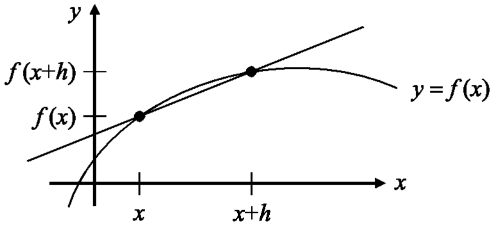
$$y = a(x - A)^2 + B$$



Anhang 2:

Differentialrechnung im Überblick

I. Begriff der Ableitung



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \text{Steigung der Tangente an } f \text{ im Punkte } x \\
&= \text{Grenzwert der Steigungen der Sekanten} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

II. Berechnung der Ableitung

Grundlegende Ableitungen

$$(c)' = 0$$
$$(ax+b)' = a$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

Ableitungsregeln

Summenregel

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

Faktorregel

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$$

Produktregel

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Weitere wichtige Ableitungen

Aus den grundlegenden Ableitungen können mithilfe der Ableitungsregeln weitere wichtige Ableitungen berechnet werden:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

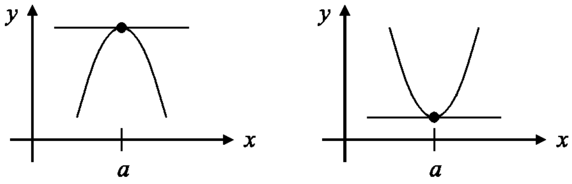
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)' = 1+\tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

III. Anwendungen

Relative Maxima und Minima



1. Wenn f bei a ein relatives Maximum oder Minimum hat, so ist:

$$f'(a) = 0\,.$$

2. Wenn

$$f'(a) = 0 \quad \text{und} \quad f''(a) < 0,$$

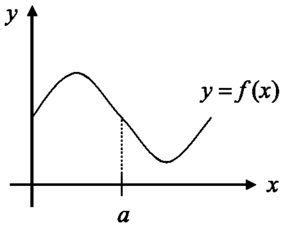
dann hat f bei a ein *lokales Maximum.*

3. Wenn

$$f'(a) = 0 \quad \text{und} \quad f''(a) > 0,$$

dann hat f bei a ein *lokales Minimum.*

Wendepunkte

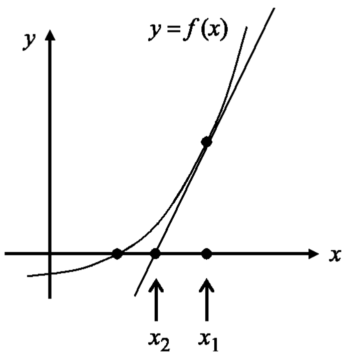


Wenn $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$, dann hat f einen Wendepunkt in a.

Newton-Verfahren

Aus dem Näherungswert x_1 für eine Lösung von $f(x) = 0$ ergibt sich ein verbesserter Wert x_2 durch:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



Reihen

Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots \qquad (-1<x<1)$$

Arkustangensreihe

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots \quad (-1\leq x\leq 1)$$

Logarithmusreihe

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots \quad (-1<x\leq 1)$$

Exponentialreihe

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad (x \text{ beliebig})$$

Sinusreihe

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots \qquad (x \text{ beliebig})$$

Kosinusreihe

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\ldots \qquad (x \text{ beliebig})$$

Maclaurinsche Reihe

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Eulers Zauberformel

Die aufgeführten Reihen enthalten lediglich die vier Grundrechenarten. Daher können sie auch für komplexe Zahlen (siehe Anhang 3) angewendet werden. Durch Einsetzen komplexer Zahlen in die Exponentialreihe ist Leonhard Euler auf die berühmte Zauberformel gestoßen:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist, die eine Zahl jenseits der reellen Zahlen ist und die der Gleichung $i^2 = -1$ genügt.

Die Zauberformel verbindet die Exponentialfunktion mit Sinus und Kosinus, Funktionen die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben. Mit Hilfe der Zauberformel lassen sich viele trigonometrische Beziehungen (wie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus) auf einfache Potenzegeln zurückführen.

Herleitung der Zauberformel

Die Potenzen von i sind:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ \text{etc.}$$

Man sieht, dass die Potenzen mit geradem Exponenten (also von der Gestalt $2n$) abwechselnd ± 1 sind, und bei ungeraden Exponenten (d. h. vom Typ $2n+1$) ergeben sich abwechselnd $\pm i$. In der Tat:

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n = \pm 1$$
$$i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n \cdot i = \pm i$$

Nun berechnen wir e^{ix}:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}$$

Also: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Der Fall $x = \pi$ (180°) ist berühmt und sticht hervor, weil fünf wichtige mathematische Konstanten in einer Gleichung vereint sind:

$$\begin{aligned}
e^{i\pi} &= \cos\pi + i\sin\pi \\
&= -1 + 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Das heißt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Anhang 3:

Komplexe Zahlen

Einige quadratische Gleichungen haben keine Lösung. So kommt für die einfache Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine der üblichen (*reellen*) Zahlen als Lösung in Frage, denn beim Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst erhält man stets eine positive Zahl oder Null.
Wir erweitern unseren Zahlenbereich durch Hinzufügen einer neuartigen Zahl i, die eine Lösung der obigen Gleichung ist:

$$i^2 = -1\,.$$

Man bezeichnet i als *imaginäre Einheit.* Sie kann als Wurzel aus –1 aufgefasst werden:

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Anschaulich betrachtet, gehen wir vom *Zahlenstrahl* zur *Zahlenebene* über. Die imaginäre Einheit entspricht einem Punkt in der Ebene, der außerhalb des Zahlenstrahls liegt.

Wenn man die vier Grundrechenarten mit reellen Zahlen und i durchführt, ergeben sich stets Ausdrücke der Gestalt:

$$a + bi\,,$$

beispielsweise $2 + 3i$, $-4 + 5i$, $1{,}5 + 3{,}8i$, usw.
Diese aus reellen Zahlen und der imaginären Einheit zusammengesetzten Größen nennt man *komplexe Zahlen.*

Im Bereich dieser komplexen Zahlen kann die Wurzel aus negativen Zahlen gezogen werden, zum Beispiel ist:

$$\sqrt{-9} = 3i, \text{ denn } (3i)^2 = 9i^2 = -9$$

Lässt man auch komplexe Zahlen zu, so liefert die *p-q*-Formel also immer eine Lösung der quadratischen

Gleichung. Zum Beispiel hat die Gleichung

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

nun die Lösungen:

$$x_1 = -2 + i \quad \text{und} \quad x_2 = -2 - i\,.$$

Denn

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\, p = 4 \text{ und } q = 5 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \qquad |\, \text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

$$x_1 = -2 + i, \quad x_2 = -2 - i$$

Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Man rechnet mit komplexen Zahlen genauso wie mit den üblichen reellen Zahlen und Buchstaben. Es ist lediglich zu beachten, dass $i^2 = -1$ ist.

Wir betrachten zur Verdeutlichung Beispiele zu den vier Grundrechenarten:

Addition
$(2+3i) + (5+9i) = 7+12i$

Subtraktion
$(2+9i) - (6+3i) = -4+6i$

Multiplikation

$$\begin{aligned}(2+3i)\cdot(5+4i) &= 2\cdot 5+2\cdot 4i+3i\cdot 5+3i\cdot 4i \\ &= 10+8i+15i+12i^2 \qquad\qquad |\, i^2=-1 \\ &= 10+23i-12 \\ &= -2+23i\end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned}\frac{3+7i}{1+2i} &= \frac{(3+7i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} \qquad |\,3.\text{ binomische Formel} \\ &= \frac{17+i}{1-4i^2} \qquad\qquad |\, i^2=-1 \\ &= \frac{17+i}{1+4} \\ &= \frac{17+i}{5} \\ &= \frac{17}{5}+\frac{1}{5}i\end{aligned}$$

Hier hat man einen oft nützlichen Kunstgriff benutzt, um das i im Nenner $1+2i$ loszuwerden: Zähler und Nenner werden mit der entsprechenden Differenz $1-2i$ multipliziert. Dann wendet man die 3. binomische Formel an, die besagt, dass das Produkt einer Summe und der entsprechenden Differenz die Differenz der Quadrate ist:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Somit erhält man also den neuen Nenner:

$$\begin{aligned}(1+2i)(1-2i) &= 1^2-(2i)^2 \\ &= 1-4i^2 \\ &= 1-4\cdot(-1) \\ &= 1+4 \\ &= 5\end{aligned}$$

Historisches zu den komplexen Zahlen

Rafael Bombelli (1526–1572) hat in seinem Buch *Algebra* als erster die komplexen Zahlen dargelegt und als Lösungen von Gleichungen einbezogen.

Das Wort *imaginär* ist von René Descartes (1596–1650) in seiner berühmten *Geometrie* eingeführt worden.
Der Ausdruck *komplexe Zahlen* ist von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) geprägt worden.

Die Bezeichnung *i* für die imaginäre Einheit geht auf Leonhard Euler (1708–1783) zurück.

Anwendungen der komplexen Zahlen

Bereits am Ende des 19. Jahrhunderts hat der deutsche Elektroingenieur Charles Steinmetz (1865–1923) komplexe Widerstände im Wechselstromkreis eingeführt, was zu einer erheblichen Vereinfachung der Berechnungen geführt hat.

Die in den 1920er Jahren entwickelte Quantenmechanik benutzt komplexe Zahlen. Auf einer Inschrift am Grab Erwin Schrödingers (1878–1961) steht die berühmte *Schrödingergleichung*:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$$

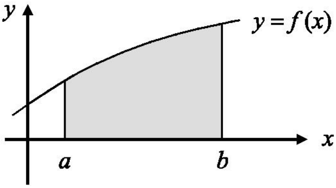
Sie enthält die imaginäre Einheit *i*.

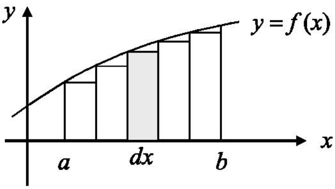
Anhang 4:

Integralrechnung im Überblick

I. Begriff des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{Fläche}$$





$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{Summe aller Rechtecksflächen} \quad f(x)\,dx$$

II. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)}$$

Hierbei gilt:

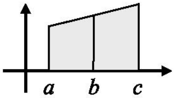
$$F'(x) = f(x)$$

(F heißt *Stammfunktion* von f.)

III. Integrationsregeln

1. Regel über Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



2. Summenregel

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Faktorregel

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

5. Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

(wobei $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$, $a = g(t_a)$, $b = g(t_b)$)

IV. Unbestimmte Integrale

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x) + C$$

F ist eine *Stammfunktion* von f:

$$F'(x) = f(x)$$

C ist eine Konstante (*Integrationskonstante*).

V. Regeln für unbestimmte Integrale

1. Die Summenregel

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx \;=\; \int f(x)\,dx \;+\; \int g(x)\,dx$$

2. Die Faktorregel

$$\int c\,f(x)\,dx \;=\; c\int f(x)\,dx$$

3. Die partielle Integration

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx \;=\; f(x)\cdot g(x) \;-\; \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

4. Die Substitutionsregel

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$ (wo $x = g(t)$, $dx = g'(t)\,dt$)