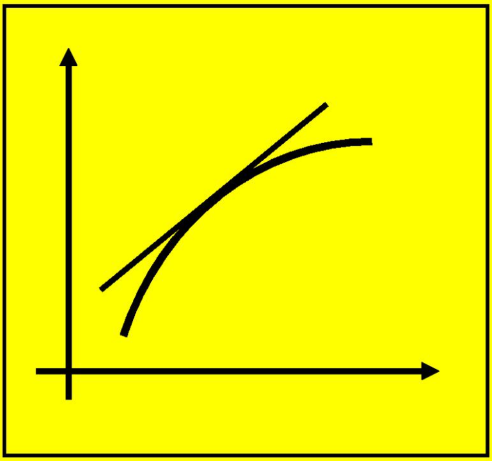
# Das kleine Buch der
# Differentialrechnung

Alexander Roux

3., korr., überarbeitete und erweiterte Auflage



Differentialrechnung

Das kleine Buch der

# Differentialrechnung

Alexander Roux

3. Auflage

**Impressum**

www.a-roux.de
ISBN  9798323710867

Selbstverlag, Alexander Roux
c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb: Kindle Direct Publishing
Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,
L-1855 Luxemburg

# Vorwort

Einschlägige Schulbücher weisen oft folgende Mängel auf:

1. Der Blick auf das Wesentliche wird durch eine Überzahl von künstlich konstruierten „Anwendungen“ und „Alltagsbezügen“ verdeckt.

2. Dagegen werden einige wirklich praxisrelevante Themen (z. B. Reihenentwicklungen und das Newton-Verfahren) höchstens am Rande erwähnt.

3. Übersichtlichkeit und Systematik lassen zu wünschen übrig. Ein roter Faden ist nur schwer zu erkennen.

„Das kleine Buch der Differentialrechnung“ betont die Grundgedanken; technische Feinheiten wie Differenzierbarkeit und Definitionsbereiche werden in der Regel nicht erörtert. Dagegen habe ich versucht, den Gedankengang so klar und übersichtlich wie möglich darzustellen. Nach einem Überblick (Einführung) enthält das Buch drei strategische Teile:

1. Die Erklärung der Ableitung
2. Die Berechnung der Ableitung
3. Anwendungen

Die Rechentechniken werden ausführlich erläutert und an vielen Beispielen vorgeführt. Als wichtige Anwendungen werden Maxima und Minima, Kurvendiskussionen, das Newton-Verfahren zur Lösung von Gleichungen und die Reihendarstellung von Funktionen betrachtet.

Fortgeschrittene Themen wie Stetigkeit, Mittelwertsätze und die exakte Erörterung des Grenzwertbegriffs werden nicht behandelt. Aus diesem Grunde steht auch das Adjektiv „klein“ im Buchtitel. Aber es werden bei der Ableitung von Sinus und Kosinus typische Abschätzungen vorgeführt, wie sie bei der Ermittlung von Grenzwerten vorkommen.

Welche Vorkenntnisse benötigt der Leser? Die Differentialrechnung ist die Antwort auf die Frage, wie man die Tangenten an krummen Linien (Kurven) berechnen kann. Daher sind Kenntnisse über Koordinatensysteme, Geraden, Parabeln, Rechenausdrücke und an einigen Stellen etwas Trigonometrie wünschenswert. In den Anhängen werden einige dieser Themen zusammengefasst.

Nach dem Erwerb der Grundlagen der Differentialrechnung wird der Leser imstande sein, die Integralrechnung, die gewissermaßen eine Umkehrung der Differentialrechnung ist, zu erlernen. Differential- und Integralrechnung sind grundlegend für die Mathematik, Physik und viele andere Wissenschaften.

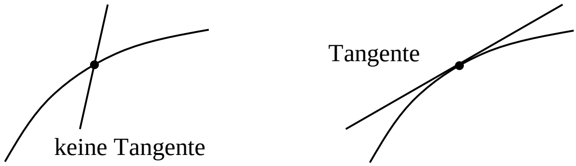
In der vorliegenden dritten Auflage wurden einerseits Fehler korrigiert und einige Änderungen vorgenommen, die auf eine noch größere Verständlichkeit abzielen. Andererseits sind einige Ergänzungen hinzugekommen, zum Beispiel die Herleitung der Zauberformel von Euler und eine Einführung in die dafür notwendingen komplexen Zahlen. Ferner werden die Taylor-Reihe betrachtet und die benutzten elementaren Restglied-Abschätzungen zusammengestellt und erläutert.

Brühl, April 2024 Dr. A. Roux

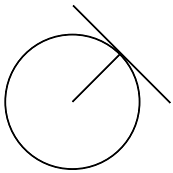
# Inhalt

# 1. Einführung und Überblick

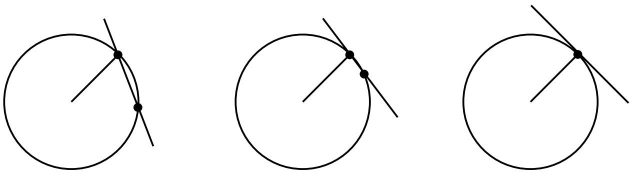
Die Differentialrechnung ist die Antwort auf die Frage, wie die ***Tangente*** an eine beliebige Kurve finden kann. Eine Tangente ist eine Gerade, die sich besonders gut an eine Kurve anschmiegt, dieselbe Richtung hat:




Bei einem Kreis sind die Tangenten leicht zu finden, denn sie stehen senkrecht auf den Radien:



Man kann die Tangente auch dadurch bekommen, dass man zunächst Sehnen (Sekanten) betrachtet. Nähern sich die zwei Schnittpunkte der Sehne mit der Kurve, so nähern sich die Sehnen der Tangente:



Bei ***beliebigen*** Kurven ist die Situation schwieriger. Das eigentliche Problem liegt darin, zu sagen, was eine „beliebige Kurve“ überhaupt ist und wie man sie rechnerisch beschreibt. Und wie beschreibt man eine Gerade? (Eine Tangente ist ja eine Gerade.)

Mit der Erfindung der Koordinatensysteme durch Oresme stand eine rechnerische Beschreibung von Kurven zur Verfügung – und umgekehrt eine Veranschaulichung von rechnerischen Beziehungen.
Erst nach der Einführung von Buchstaben zur allgemeinen Darstellung von Zahlen durch Viète war diese Beschreibung effizient genug, um sich durchsetzen zu können.

Nicole d'Oresme
1320-1382

Bischof von Lisieux.
Errungenschaften: Begründer der Nationalökonomie, die Gesetze des freien Falls, Wurzeln als Potenzen mit Brüchen als Hochzahl, Koordinatensysteme

François Viète
1540-1603

Jurist, Privatlehrer, Berater französischer Könige.
Errungenschaften: Buchstaben für Zahlen, Dechiffrierung eines spanischen Geheimcodes

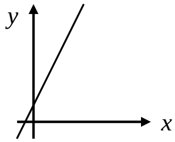
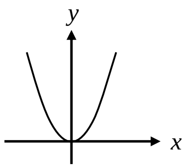
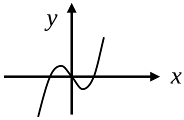
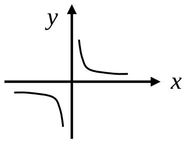
Als Descartes und Fermat nochmals (unabhängig voneinander) die Koordinatensysteme erfanden, stand ihnen die vietasche Buchstabenrechnung zur Verfügung. Die Koordinatensysteme konnten ihre volle Kraft entfalten.
Beliebige Kurven sind nun zugänglich, zu jeder Kurve gehört eine Gleichung. Diese Gleichung ist eine Formel, die

die Höhe $y$ der Kurve an jeder Stelle $x$ liefert. Oft wird sie auch als „Funktionsgleichung“ bezeichnet.
Der Ausdruck „Funktion“ ist von Leibniz in die Mathematik eingeführt worden. Den Satz „*y* hängt von *x* ab“ hat er als „*y* ist eine Funktion von *x*“ formuliert, aber in Latein.

| | |
|---|---|
| <br>René Descartes<br>1596-1650 | <br>Pierre de Fermat<br>1601-1665 |
| Jurist und Soldat.<br>Errungenschaften: Koordinatensysteme, Begründung des Rationalismus (Philosophie). | Jurist am Parlament von Toulouse.<br>Errungenschaften: Koordinatensysteme, Differentialrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit Pascal zusammen), Zahlentheorie, fermatsches Prinzip der Lichtausbreitung: Das Licht nimmt den Weg, auf dem es am wenigsten Zeit benötigt. |

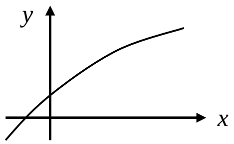
In der Tabelle auf der nächsten Seite sind einige Kurven mit ihrem Namen und ihrer Funktionsgleichung zusammengestellt:

## Beispiele

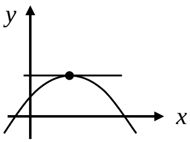
| Name der Kurve | Kurve | Funktionsgleichung |
|---|---|---|
| Gerade |  | $y = 2x + 1$ |
| Parabel |  | $y = x^2$ |
| kubische Parabel |  | $y = x^3 – x$ |
| Hyperbel |  | $y = \frac{1}{x}$ |

Betrachtet man keine konkrete Kurve, sondern eine beliebige („allgemeine“) Kurve, so würde man dies etwa wie folgt schreiben:

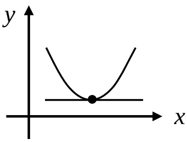
## Allgemein

| Kurve | Funktionsgleichung |
|---|---|
|   | $y = f(x)$<br>Hierbei steht $f(x)$ für einen Ausdruck in $x$.<br>(Euler, 1707-1783) |

Fermat ist noch einen Schritt weiter gegangen und hat in seiner Abhandlung „*Methoden zur Bestimmung von Maxima und Minima und Tangenten an gekrümmten Kurven*“ die Grundbegriffe der Differentialrechnung entwickelt.




waagerechte Tangente
bei maximalem Wert



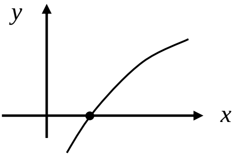

waagerechte Tangente
bei minimalem Wert

Er hat sogar schon Flächen, die von höheren Parabeln und Hyperbeln berandet werden, berechnet. Damit ist er auch ein Pionier der Integralrechnung.

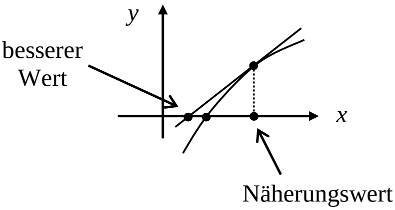
Newton und Leibniz haben die Differential- und Integralrechnung systematisch ausgebaut. Die heute gebräuchlichen Bezeichnungen der Differential- und Integralrechnung gehen auf Leibniz zurück, der besonderen Wert auf klare und praktische mathematische Symbole legte.

| | |
|---|---|
|  Isaac Newton 1643-1727 |  Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716 |

Mit Hilfe der Tangenten hat Newton ein Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen gefunden. Eine beliebige Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen, bedeutet anschaulich, die Stellen auf der $x$-Achse zu finden, wo die Kurve $y = f(x)$ durchgeht.



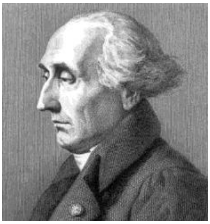

Indem man die Tangente als gute Näherung für die Kurve betrachtet, erhält man verbesserte Näherungswerte für die Lösung:




Den Ausdruck „Differential" hat Leibniz geprägt. Die Steigung der Sekanten ergibt sich als Quotient der Differenzen von y-Koordinaten und x-Koordinaten. Die Steigung der Tangente kann als Quotient von sehr kleinen Differenzen aufgefasst werden, als „Differentialquotient“ $\frac{dy}{dx}$. Die Steigung der Tangente wird nach Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) auch als „Ableitung“ bezeichnet und mit einem Strich versehen: Die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ ist damit $y' = f'(x)$.

Euler hat die effizienten leibnizschen Notationen in die Physik übernommen und die abstrakten Funktionsbezeichnungen wie $f(x)$ eingeführt, das für einen Ausdruck in $x$ steht. Man liest $f(x)$ als „$f$ von $x$“.

Leonhard Euler
1707-1783



Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

Cauchy hat schließlich die Differential- und Integralrechnung in die heute an Hochschulen übliche präzise formale Gestalt gebracht.

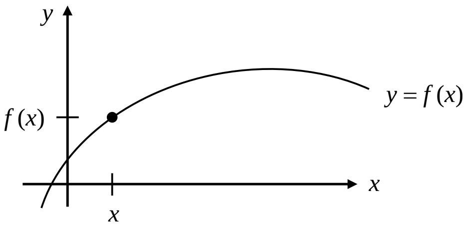
Dieses Büchlein besteht im Wesentlichen aus drei Teilen. Im ersten Teil wird die Ableitung anschaulich als Steigung der Tangente erklärt. Im zweiten Teil werden die Grundlagen für die praktische Berechnung der Ableitung von vielen in der Praxis auftauchenden Funktionen gelegt. Der dritte Teil ist den Anwendungen gewidmet, im Mittelpunkt stehen lokale Maxima und Minima, das Newton-Verfahren zur schrittweisen Lösung von Gleichungen und die Reihendarstellung von Funktionen. Diese Anwendungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie vorwiegend auf der anschaulichen Bedeutung der Ableitung beruhen und von großem praktischem Nutzen sind. Beispielsweise benutzt ein wissenschaftlicher Taschenrechner die Reihendarstellung zur Berechnung von Werten trigonometrischer Funktionen.

# 2. Die Ableitung

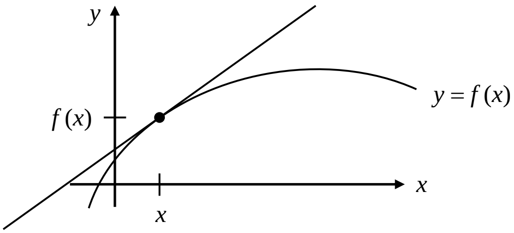
## 2.1 Die Ableitung als Steigung der Tangente

Wie in der Einführung erläutert, betrachten wir folgende Situation:

**Gegeben** ist eine beliebige Kurve $y = f(x)$ und ein Punkt $x$ auf der x-Achse. Die Stelle $x$ bestimmt den Punkt $(x; f(x))$ auf der Kurve.



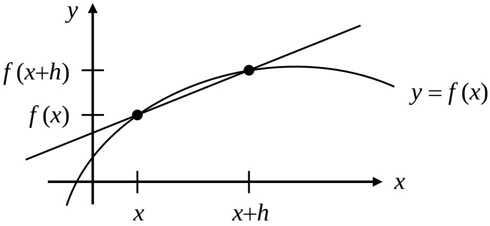

**Gesucht** ist die Tangente an die Kurve durch den Punkt $(x; f(x))$:




Im Sinne der Punkt-Steigungs-Problematik bei Geraden fehlt nur noch die **Steigung** der Tangente. Der zentrale

Begriff der Differentialrechnung ist die „Ableitung“. Sie ist nichts anderes als die Steigung der Tangente. Die Ableitung wird mit einem Strich bezeichnet. So wird die Ableitung von $f$ an der Stelle $x$ als $f'(x)$ geschrieben, was man als „$f$ Strich von $x$“ liest.

Wir betrachten nun die Sekante in der folgenden Skizze:




Wenn sich $h$ der Null nähert, so rücken die Punkte $x$ und $x+h$ immer mehr zusammen und die Sekanten nähern sich immer mehr der Tangente. In diesem Sinne bezeichnet man die Tangente (Tangentensteigung) als den „Grenzwert“ der Sekanten (Sekantensteigungen, siehe Anhang 1: Geraden, Abschnitte 3, 6 und 7). Also:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{la derivada de } f \text{ en el lugar } x \\ &= \text{pendiente de la tangente de } f \text{ en el punto } x \\ &= \text{valor límite de las pendientes de las secantes} \\ &= \text{valor límite de } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{aligned}$$

Das Symbol „lim“ ist die Abkürzung von Limes = Grenz(wert). Die Schreibweise „$h \to 0$“ deutet an, dass sich $h$ der Null nähern soll.

Der Bruch $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ wird „Differenzenquotient“ genannt. Obwohl optisch nicht erkennbar, ist auch der Nenner $h$ eine Differenz: $h=(x+h)-x$.

**Anmerkungen zu den „Differentialen“**

Der Differenzenquotient von $y=f(x)$ enthält im Zähler eine Differenz von *y*-Werten und im Nenner eine Differenz von *x*-Werten. Er wird traditionell daher abgekürzt auch als

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

geschrieben. Sind nun $\Delta x$ und damit auch $\Delta y$ „beliebig“ klein („infinitesimal“), so schreibt man für sie *dx* bzw. *dy*. Diese kleinen Differenzen werden als „Differentiale“ bezeichnet. Die Ableitung lässt sich dann als „Differentialquotient“ schreiben:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

Diese Bezeichnungen haben zu den Ausdrücken „Differentialrechnung“ und „Infinitesimalrechnung“ geführt. Die Letztgenannte umfasst Differential- und Integralrechnung.

## 2.2 Beispiele

Wir betrachten nun vier Beispiele:

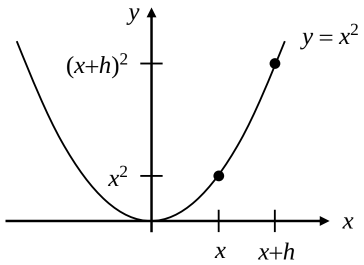
- Parabel,
- Gerade,
- kubische Parabel,
- Konstante.

Der Leser kann dabei den Umgang mit Differenzenquotienten und einfachen Grenzwerten kennenlernen.

Wir beginnen mit der einfachsten krummlinigen Kurve, die es auf dieser Welt gibt: der Parabel.

**Beispiel 1: Parabel**
Berechne die Ableitung von $f(x) = x^2$.

**Lösung**




Wir berechnen zunächst die Steigung der Sekante. Das Ergebnis ist kein Bruch mehr, $h$ steht nicht mehr im *Nenner*. Man kann nun gut überblicken was passiert, wenn $h$ gegen $0$ geht - man kann praktisch einfach $h = 0$ setzen.

Die ***Steigung der Sekante*** ist***:***

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$= \frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= \frac{2xh}{h}+\frac{h^2}{h}$$

$$= 2x+h$$

***Steigung der Tangente:***
Die Steigung der Tangente ergibt sich, wenn sich $h$ der Null nähert („$h\to 0$“). Hier heißt dies faktisch, dass man $h=0$ setzen kann:

$$2x+h \;\to\; 2x+0 \;=\; 2x$$

Also:

Die Ableitung von $f(x)=x^2$ ist $f'(x)=2x$.

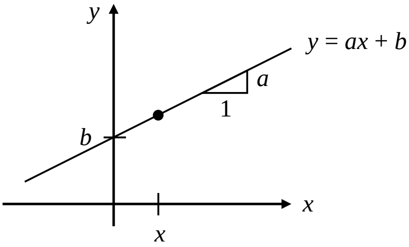
Oder kürzer formuliert:

$$(x^2)'=2x.$$

**<u>Beispiel 2: Gerade</u>**
Berechne die Ableitung von $f(x)=ax+b$.

## Lösung (Variante 1)

Die Tangente an eine Gerade ist genau diese Gerade, denn sie schmiegt sich am besten an die Gerade.




***Ableitung:***

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Steigung der Tangente} \\ &= \text{Steigung der Geraden } \; y = ax + b \\ &= a \end{aligned}$$

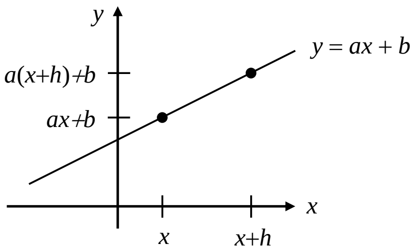
Die Ableitung von $f(x) = ax + b$ ist also $f'(x) = a$.

Oder kürzer formuliert: $(ax+b)' = a$.

## Lösung (Variante 2)

Mit Hilfe einer Skizze bestimmen wir die Steigung der Sekante und rechnen dann die Steigung der Tangente aus.

***Steigung der Sekante:***



$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} \\ &= \frac{ax+ah+b-ax-b}{h} \\ &= \frac{ah}{h} \\ &= a\end{aligned}$$

***Steigung der Tangente:***
Die Steigung der Tangente ergibt sich, wenn sich $h$ der Null nähert („$h \to 0$"). Hier heißt dies praktisch, dass man nichts tun muss, denn $h$ taucht nicht mehr auf. *Alle* Sekanten haben dieselbe Steigung $a$. Daher auch die Tangente:

$$a \;\to\; a$$

Also:

Die Ableitung von $f(x) = ax + b$ ist $f'(x) = a$.

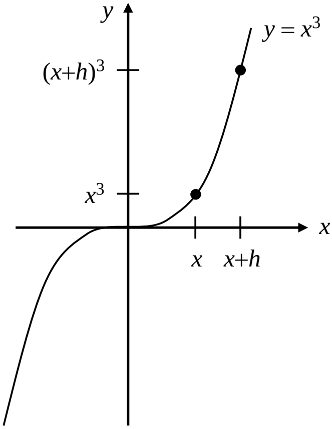
Oder kürzer formuliert:

$$(ax+b)' = a\,.$$

**<u>Beispiel 3: Kubische Parabel</u>**
Berechne die Ableitung von $f(x) = x^3$.

**<u>Lösung</u>**

Wir betrachten wieder den Graphen der Funktion:




***Steigung der Sekante:***

Wir schicken eine kurze Nebenrechnung voraus:

$(x+h)^3 = (x+h)^2(x+h) = (x^2+2xh+h^2)(x+h) = x^3+3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h}{h} + \frac{3xh^2}{h} + \frac{h^3}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2\end{aligned}$$

Der Ausdruck enthält nun keinen Bruch mehr.

***Steigung der Tangente:***

Die Steigung der Tangente ergibt sich, wenn sich $h$ der Null nähert („$h \to 0$“). Hier heißt dies praktisch, dass man $h = 0$ setzen kann:

$$3x^2 + 3xh + h^2 \;\to\; 3x^2 + 0 + 0 \;=\; 3x^2$$

Also:

Die Ableitung von $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$.

Oder kürzer formuliert:

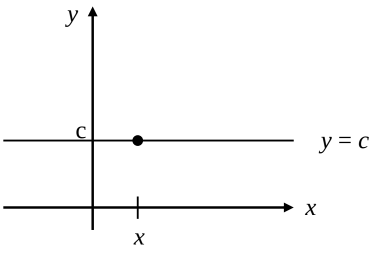
$$(x^3)' = 3x^2 .$$

**<u>Beispiel 4: Konstante Funktion</u>**

Berechne die Ableitung von $f(x) = c$.

(Diese Funktion kann auch als Sonderfall von Beispiel 2 betrachtet werden: als Gerade mit der Steigung Null.)

**<u>Lösung (Variante 1)</u>**




***Ableitung:***

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{pendiente de la tangente} \\ &= \text{pendiente de la recta } y = c \\ &= 0 \end{aligned}$$

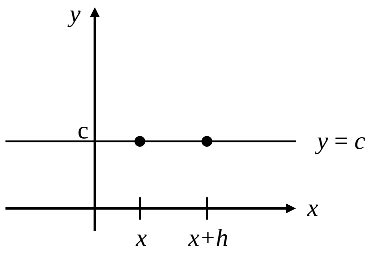
Also:

Die Ableitung von $f(x) = c$ ist $f'(x) = 0$.

Oder kürzer formuliert:

$$(c)' = 0.$$

**<u>Lösung (Variante 2)</u>**




***Steigung der Sekante:***
Es ist zu beachten, dass $f(x)$ und $f(x+h)$ beide *c* sind.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{c-c}{h}\\ &= \frac{0}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

Die Steigung der Sekante hängt nicht von $h$ ab.

***Steigung der Tangente:***
Die Steigung der Tangente ergibt sich, wenn sich *h* der Null nähert („$h \to 0$“). Hier heißt dies praktisch, dass man nichts

tun muss, denn *h* taucht nicht mehr auf. *Alle* Sekanten haben dieselbe Steigung 0. Daher auch die Tangente:

$$0 \to 0$$

Also:

Die Ableitung von $f(x) = c$ ist $f'(x) = 0$.

Oder kürzer formuliert:

$$(c)' = 0.$$

## Aufgaben

Skizzen sind hilfreich bei der Lösung der Aufgaben.

1. Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe des Differenzenquotienten:

a) $f(x) = 3x + 1$
b) $f(x) = c$ ($c$ ist eine Konstante)
c) $f(x) = x^3$

Stelle jeweils die Gleichung der Tangente bei $x = 1$ auf.

2. Bestimme Geradengleichung der Tangente des Graphen von $f(x) = x^2$ in $(2; 4)$. Wo schneidet die Tangente die $x$-Achse?

3.

a) Benutze den Differenzenquotienten, um die Ableitung der Funktion $f(x) = 4x^2 + 5x + 3$ zu berechnen.

b) Benutze das Ergebnis von Teil a), um den Scheitelpunkt der Parabel $y = 4x^2 + 5x + 3$ zu berechnen.
Hinweis: Am Scheitelpunkt der Parabel ist die Tangente waagerecht.

4. Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit Hilfe des Differenzenquotienten. Wie lautet die Gleichung der Tangenten in den Punkten $(0{,}5; 2)$, $(1; 1)$ und $(2; 0{,}5)$?

5. Betrachte die Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$.

a) Berechne die Ableitung der Funktion.
b) Bestimme die Gleichung der Tangenten bei $x = 4$.
c) Bestimme die Gleichung der Sekante, die die Kurve bei

$x = 4$ und $x = 4{,}5$ schneidet.

d) Zeichne Kurve, Tangente und Sekante.

6. Betrachte die Funktion $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 2$.

a) Berechne die Nullstellen von $f(x)$, d. h. die $x$-Achsenschnittpunkte des Graphen von $f$.
b) Berechne die Ableitung der Funktion.
c) Bestimme die Gleichung der Tangente bei $x = 1$.
d) Berechne den $x$-Achsenschnittpunkt der Tangente.
e) Zeichne Kurve und Tangente.

7. Betrachte die Funktion $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 3$.

a) Berechne die Nullstellen von $f(x)$, d. h. die $x$-Achsenschnittpunkte des Graphen von $f$.
b) Berechne die Ableitung der Funktion.
c) Bestimme die Gleichung der Tangente bei $x = 1$.
d) Berechne den $x$-Achsenschnittpunkt der Tangente.
e) Zeichne Kurve und Tangente.

8. Benutze die Ableitung, um den Scheitelpunkt der Parabeln zu berechnen:

a) $y = 3x^2 + 18x + 30$
b) $y = 0{,}5x^2 + 2x + 1$
c) $y = 1{,}5x^2 - 9x + 12$

9. Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ mit Hilfe der Sekantensteigung (d. h. des Differenzenquotienten). Wie lautet die Tangentengleichung bei $x = 2$?

10. Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit Hilfe des Differenzenquotienten. (Tipp: Erweitern mit

$\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$, die 3. binomische Formel.)
Wie lautet die Gleichung der Tangente bei $x = 4$?

# 3. Die Berechnung der Ableitung

Viele der in der Praxis vorkommenden Funktionen sind aus einer Handvoll wichtiger Grundfunktionen zusammengesetzt. Die Zusammensetzung erfolgt mit Hilfe der Grundrechenarten und der Ersetzung, wie die folgenden Beispiele zeigen:

a) $f(x) = x^2 + 1$
   ergibt sich aus der *Addition* von $x^2$ und $1$ (von einer Potenzfunktion $x^n$ und einer konstanten Funktion $c$).

b) $f(x) = 3x^2$
   ergibt sich aus der *Multiplikation* von $3$ und $x^2$ (konstante Funktion $c$ und Potenzfunktion $x^n$).

c) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$
   ergibt sich aus der *Division* von $3$ und $x^2 + 1$.

d) $f(x) = \sin(2x + 1)$
   ergibt sich aus der Sinusfunktion $\sin x$ durch *Ersetzen* von $x$ durch $2x + 1$.

Zur Berechnung der Ableitung müssen wir also zwei strategische Ziele ins Auge fassen:

1. **Die Ableitung grundlegender Funktionen**
   *(Konstanten, Geraden, $x^n$, $e^x$, $\sin x$ und $\cos x$)*
2. **Die Ableitungsregeln**
   *(Summenregel, Faktorregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)*

## 3.1 Grundlegende Ableitungen

Wir betrachten die Ableitung der folgenden Funktionen:

- Konstante Funktion: $f(x) = c$
- Gerade: $f(x) = ax + b$
- Potenzfunktion: $f(x) = x^n$
- Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$ ($e = 2{,}718...$)
- Sinusfunktion: $f(x) = \sin x$
- Kosinusfunktion: $f(x) = \cos x$

**Die konstante Funktion**

Die Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c$ ist $f'(x) = 0$, wie in Beispiel 4 des vorigen Kapitels bereits berechnet.

**Die Geradenfunktion**

Die Ableitung der Funktion $f(x) = ax + b$ ist $f'(x) = a$, wie in Beispiel 2 des vorigen Kapitels bereits berechnet. Ein wichtiger Sonderfall ist: $(x)' = 1$.

**Die Potenzfunktion**

In den Beispielen 1 und 3 des vorigen Kapitels haben wir bereits die Ableitung von $x^2$ und $x^3$ bestimmt. Auch $x^1$ haben wir bereits betrachtet, denn $x^1$ ist nichts anderes als $x$ und das wiederum kann als Spezialfall von $ax + b$ aufgefasst werden ($a = 1$ und $b = 0$):

$$x^1 = x = 1 \cdot x + 0.$$

Die Ableitung ist also nach Beispiel 2 des vorigen Kapitels:

$$(x^1)' = (1 \cdot x + 0)' = 1.$$

Das Ergebnis 1 kann übrigens auch als Potenz geschrieben werden: $1 = x^0$.

Wir fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen:

| Funktion $f(x)$ | Ableitung $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^1$ | $1x^0$ |
| $x^2$ | $2x^1$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |

Man kann schöne Gesetzmäßigkeiten erkennen:

1. Die ***Hochzahl*** der Potenz wird beim Ableiten zur ***Vorzahl***.
2. Beim Ableiten ***vermindert*** sich die ***Hochzahl*** um ***eins***.

In der Formelsprache bedeutet das:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

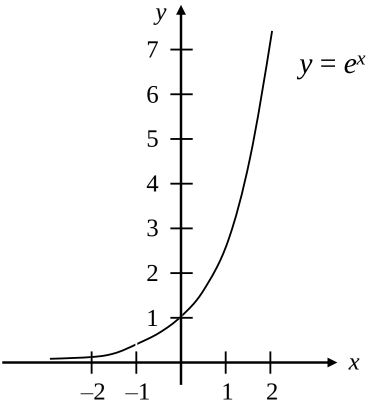
## Die Exponentialfunktion

Die Zahl $e = 2{,}718...$ ist als *eulersche Zahl* bekannt. Sie ist so gewählt, dass die Ableitung von $e^x$ eine möglichst einfache Gestalt hat. Dies wird unten erläutert werden. Zunächst legen wir eine Wertetabelle an und skizzieren mit ihrer Hilfe die Exponentialfunktion $y = e^x$:

| $x$ | $e^x$ |
|---|---|
| –2 | 0,14 |
| –1 | 0,37 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2,72 |
| 2 | 7,39 |

$: e$

$\cdot\, e$




*1 nach rechts: mal 2,718... (ungefähr: mal 3)*

Zuerst betrachten wir die Kurve von links nach rechts. Bei jedem Einer-Schritt nach rechts verdreifacht sich der Funktionswert (die Höhe) etwa. Die Kurve steigt immer mehr an („exponentielles Wachstum“).

Ausgehend von der Position 0 betrachten wir die Kurve nun von rechts nach links. Bei jedem Einer-Schritt nach links drittelt sich der Funktionswert (die Höhe) etwa. Die Kurve schmiegt sich immer mehr an die *x*-Achse.

Wir nehmen jetzt die Ableitung der Exponentialfunktion in Angriff:

***Steigung der Sekante:***

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} \\ &= \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \end{aligned}$$

Anmerkung: $\dfrac{e^h-1}{h}$ hängt *nicht* von $x$ ab.

***Steigung der Tangente:***

Die Steigung der Tangente ergibt sich, wenn sich *h* der Null nähert („$h \to 0$“). Unten wird erläutert, dass der Ausdruck sich $\dfrac{e^h-1}{h}$ der 1 nähert, wenn $h \to 0$. Hätte $e$ einen anderen Wert als 2,718... (z. B. 2), so würde sich der Bruch einer anderen, in der Regel „krummen“, Zahl nähern.

Die Steigung der Sekante geht also gegen $e^x$:

$$e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \;\to\; e^x \cdot 1 \;=\; e^x$$

Also:

Die Ableitung von $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$.

Oder kürzer formuliert:

$$(e^x)' = e^x$$

***Erläuterungen zu*** $\frac{e^h - 1}{h}$

Wir betrachten zwei Erklärungen für das Verhalten von $\frac{e^h - 1}{h}$ bei $h \to 0$. Eine konkrete (aber auf dem Taschenrechner beruhende) und eine abstrakte, die dafür zu Formeln zur Berechnung der eulerschen Zahl $e$ führen.

**Erste Erklärung**

Der Leser kann die Werte der folgenden Tabelle mit Hilfe eines Taschenrechners bestätigen:

| $h$ | $\frac{e^h - 1}{h}$ | $\frac{2^h - 1}{h}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1,718 282 | 1,000 000 |
| 0,1 | 1,051 709 | 0,717 735 |
| 0,01 | 1,005 017 | 0,695 555 |
| 0,001 | 1,000 500 | 0,693 388 |
| 0,000 1 | 1,000 050 | 0,693 171 |
| 0,000 01 | 1,000 005 | 0,693 150 |

Aus der Tabelle kann man entnehmen, dass sich

- $\dfrac{e^h - 1}{h}$ der glatten Zahl $1$**,**
- $\dfrac{2^h - 1}{h}$ der „krummen" Zahl $0{,}6931...$ nähert,

wenn $h$ gegen $0$ geht.

**Zweite Erklärung**
Ähnlich wie in der Tabelle betrachten wir besondere, immer kleiner werdende Werte von *h*, nämlich Werte der Gestalt:

$$h = \frac{1}{2},\ h = \frac{1}{3},\ h = \frac{1}{4},\ h = \frac{1}{5}, \text{ usw.}$$

Allgemein formuliert, betrachten wir

$$h = \frac{1}{n}, \text{ wobei } n = 1, 2, 3, 4, ...$$

Wenn $n$ groß wird, wird $h$ klein.

Für kleines $h$ soll $\dfrac{e^h - 1}{h}$ ungefähr $1$ sein:

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Wir lösen nun nach *e* auf und setzen $h = \dfrac{1}{n}$:

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 \qquad | \text{ mal } h$$

$$e^h - 1 = h \qquad | +1$$

$$e^h = h + 1 \qquad | \text{ hoch } \frac{1}{h}$$

$$e = (1+h)^{1/h} \qquad | \; h = \frac{1}{n},\ \frac{1}{h} = n$$

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad | \; (n \text{ groß})$$

Dies entspricht im Wesentlichen der bekannten Formel:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die folgende Tabelle zeigt, wie man damit die eulersche Zahl $e$ berechnen kann:

| $n$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---:|---|
| 1 | 2 |
| 10 | 2,594 |
| 100 | 2,705 |
| 1000 | 2,717 |
| 10000 | 2,718 |
| 100000 | 2,718 |

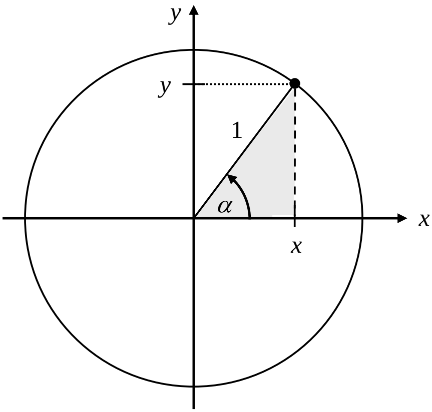
Wir erhalten den Näherungswert $e \approx 2{,}718$.

## Die allgemeine Definition von sin, cos und tan

Die ursprüngliche Definition von Sinus, Kosinus und Tangens bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke. Dabei treten Winkel bis höchstens 90° auf. Für schiefwinklige Dreiecke gelten Sinus- und Kosinussatz. Da hierbei Winkel bis zu 180° vorkommen, mussten die Definitionen von sin, cos und tan entsprechend erweitert werden. Aus Sinus- und Kosinussatz können die Additionstheoreme für sin und cos hergeleitet werden. Diese Additionstheoreme sagen, wie man sin und cos von einer Winkelsumme berechnen kann. Sie lauten:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Unterstellt man ihre Gültigkeit für beliebige Winkel, so gestatten sie die Definition und Berechnung von sin und cos für große (und letztlich beliebige) Winkel. Die doch recht komplizierte Situation hat Euler in einer schönen, kurzen Definition von sin und cos zusammengefasst:




$$\sin\alpha = y$$

$$\cos\alpha = x$$

Diese allgemeinen Definitionen beruhen auf den Definitionen am rechtwinkligen Dreieck:

Sinus = Gegenkathete : Hypotenuse,
Kosinus = Ankathete : Hypotenuse.

Im schattierten rechtwinkligen Dreieck hat die Hypotenuse die Länge 1.
Der Satz des Pythagoras besagt für das schattierte Dreieck:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Diese Beziehung werden wir bei der Ableitung des Tangens benötigen.
Das schattierte Dreieck legt auch nahe, wie die klassische Definition

Tangens = Gegenkathete : Ankathete

mit Hilfe des obigen Einheitskreises verallgemeinert werden kann:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

oder auch:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

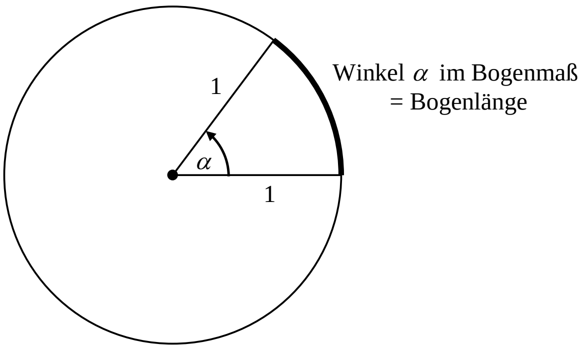
## Winkel im Bogenmaß

Wenn wir die Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ betrachten, so meint $x$ den Winkel im *Bogenmaß*. So ist zum Beispiel beim vollen Winkel $x$ nicht die Zahl 360 (von 360°), sondern der volle Umfang des Einheitskreises:

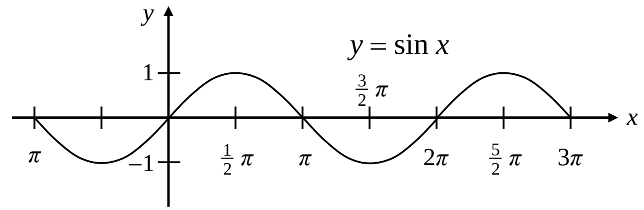
$$x = 2\pi = 6{,}283185...$$

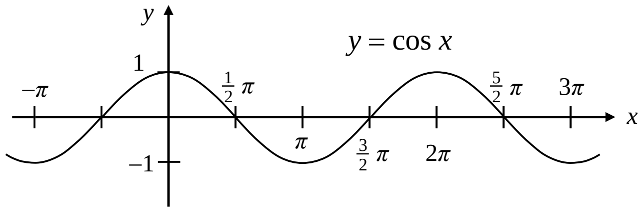
Die folgende Tabelle stellt die wichtigsten Winkel in Grad und Bogenmaß zusammen:

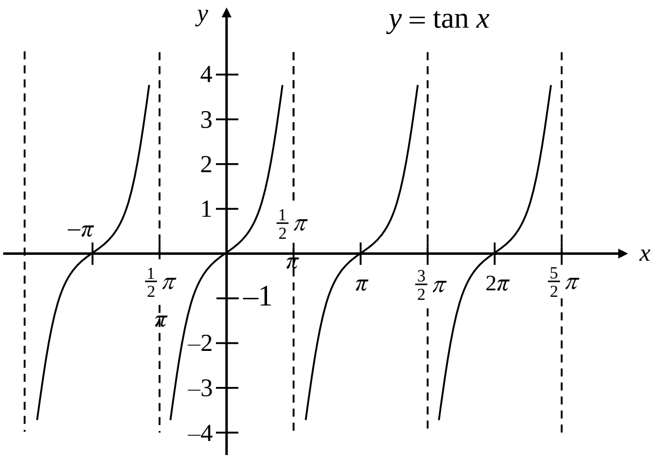
| Winkel in Grad | Winkel im Bogenmaß |
|---|---|
| 360° | $2\pi = 6{,}283185...$ |
| 180° | $\pi = 3{,}141592...$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2} = 1{,}57079...$ |
| 60° | $\frac{\pi}{3} = 1{,}04719...$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539...$ |
| 30° | $\frac{\pi}{6} = 0{,}52359..$ |
| 0° | 0 |




Nur wenn man die Winkel im Bogenmaß nimmt, ergeben sich einfache (koeffizientenfreie) Ableitungen der trigonometrischen Funktionen. Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion nehmen dann auch die bekannte schöne Form an:



## Die Ableitung der Sinusfunktion

***Steigung der Sekante:***

Wir benutzen das Additionstheorem für den Sinus:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\text{sen}\beta$$

Wie bei der Exponentialfunktion isolieren wir die Terme, die nicht von $x$ abhängen.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot\sin h - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x\cdot(\cos h - 1) + \cos x\cdot\sin h}{h}$$

$$= \frac{\sin x\cdot(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x\cdot\sin h}{h}$$

$$= \sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}$$

***Steigung der Tangente:***

Die Steigung der Tangente ergibt sich, wenn sich $h$ der Null nähert („$h\to 0$“). Der Ausdruck $\frac{\cos h - 1}{h}$ nähert sich der $0$ und der Ausdruck $\frac{\sin h}{h}$ nähert sich der $1$. Dies wird unten erklärt.

Daher geht

$$\sin x \cdot \frac{\cos h \ - 1}{h} \quad + \quad \cos x \cdot \frac{\sin \ h}{h}$$

gegen

$$\sin x \cdot 0 \ + \ \cos x \ \cdot 1 \ = \ \cos x.$$

Die Ableitung von $f(x) = \sin x$ ist also $f'(x) = \cos x$.

Oder kürzer formuliert:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

## <u>Die Ableitung der Kosinusfunktion</u>

***Steigung der Sekante:***

Wir benutzen das Additionstheorem für den Kosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) \ = \ \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Wie bei der Sinusfunktion isolieren wir die Terme, die nicht von *x* abhängen.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos h \ - \ \sin x \cdot \operatorname{sen} h \ - \ \cos x}{h} \\
&= \frac{\cos x \cdot (\cos h \ - \ 1) \ - \ \sin x \cdot \sin h}{h} \\
&= \frac{\cos x \cdot (\cos h \ - \ 1)}{h} \ - \ \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} \\
&= \cos x \cdot \frac{\cos h \ - 1}{h} \ - \ \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}
\end{aligned}$$

***Steigung der Tangente:***

Die Steigung der Tangente ergibt sich, wenn sich $h$ der Null nähert („h→0“). Der Ausdruck $\frac{\cos h \ - 1}{h}$ nähert sich der 0 und der Ausdruck $\frac{\sin h}{h}$ nähert sich der 1. Dies wird unten erklärt.

Daher geht

$$\cos x \cdot \frac{\cos h \ - 1}{h} \quad - \quad \sin x \cdot \frac{\sin \ h}{h}$$

gegen

$$\cos x \cdot 0 \ - \sin x \ \cdot 1 \ = \ - \sin x.$$

Also:

Die Ableitung von $f(x) = \cos x$ ist $f'(x) = -\sin x$.

Oder kürzer formuliert:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

***Erläuterungen zu*** $\frac{\cos h \ - 1}{h}$ ***und*** $\frac{\sin h}{h}$

Wir betrachten zwei Erklärungen für das Verhalten von $\frac{\cos h \ - 1}{h}$ und $\frac{\sin h}{h}$ bei $h$→0. Die erste ist anschaulich, aber etwas vage, da sie auf der Sinus- und Kosinuskurve beruht. Die zweite ist ebenfalls anschaulich, aber etwas präziser und umfangreicher. Dafür zeigt sie die typischen Abschätzungen bei der Ermittlung von Grenzwerten.

**Erste Erklärung**

Die Tangente an die Kosinuskurve im Punkte $x = 0$ ist waagerecht, hat also die Steigung 0. Die Ableitung der Kosinusfunktion an der Stelle $x = 0$ ist also 0.

Die Steigung der Sekante ist dort:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h}$$

$$= \frac{\cos h - 1}{h}$$

und geht gegen 0.

Die Tangente an die Sinuskurve im Punkte $x = 0$ hat (vermutlich genau) die Steigung 1, wie man der Kurve entnehmen kann. Die Ableitung der Sinusfunktion an der Stelle $x = 0$ ist also 1.
Die Steigung der Sekante ist dort

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

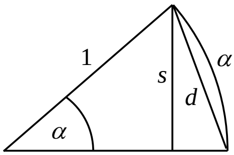
$$= \frac{\sin(0+h)-\sin 0}{h}$$

$$= \frac{\sin h}{h}$$

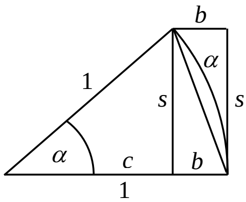
und geht gegen 1.

## Zweite Erklärung

Wir benutzen folgende Skizzen, um zwei Beziehungen zwischen dem Winkel $\alpha$ und seinem Sinuswert $\sin\alpha$ zu gewinnen. Dazu betrachten wir eine Strecke, die kürzer als der Bogen $\alpha$ ist, und eine Strecke, die länger als $\alpha$ ist.




Skizze 1




Skizze 2

**Erste Beziehung: $\sin\alpha \leq \alpha$**

Aus der Skizze 1 kann man ablesen, dass:

a) $\sin\alpha = s$

b) Kathete $s \leq$ Hypotenuse $d$

c) $d \leq \alpha$ ($d$ ist als Gerade die kürzeste Verbindung)

Zusammengefasst: $\sin\alpha = s \leq d \leq \alpha$

Also: $\sin\alpha \leq \alpha$

**Zweite Beziehung: $\alpha - \alpha^2 \leq \sin\alpha$**

Wir werden Gebrauch machen vom Satz des Pythagoras, der Erweiterung (was zu einem Bruch führt), der dritten binomischen Formel, und der Ungleichung $\sin\alpha \leq \alpha$.

Mit Skizze 2 als Grundlage ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\alpha &\le b+s \\
&= b+\sin\alpha \\
&= 1-c+\sin\alpha \\
&= 1-\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}+\sin\alpha \\
&= \frac{\left(1-\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}\right)\left(1+\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}\right)}{1+\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}+\sin\alpha \\
&= \frac{1^2-\left(\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}\right)^2}{1+\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}+\sin\alpha \\
&= \frac{1-\left(1-(\sin\alpha)^2\right)}{1+\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}+\sin\alpha \\
&= \frac{(\sin\alpha)^2}{1+\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}+\sin\alpha \\
&\le \frac{\alpha^2}{1+0}+\sin\alpha \\
&= \alpha^2+\sin\alpha
\end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned}
\alpha &\le \alpha^2+\operatorname{sen}\alpha \\
\alpha-\alpha^2 &\le \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

**Das Verhalten von** $\dfrac{\sin h}{h}$

Die obigen Abschätzungen liefern:

$$h - h^2 \ \leq \ \sin h \ \leq \ h$$

$$\frac{h - h^2}{h} \ \leq \ \frac{\sin h}{h} \ \leq \ \frac{h}{h}$$

$$1 - h \ \leq \ \frac{\sin h}{h} \ \leq \ 1$$

Nun ist $\dfrac{\sin h}{h}$ „eingequetscht“ zwischen $1 - h$ und 1. Da sich $1 - h$ der 1 nähert (wenn $h \to 0$), muss sich $\dfrac{\sin h}{h}$ ebenfalls der 1 nähern.

**Das Verhalten von** $\dfrac{\cos h - 1}{h}$

Wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall $h > 0$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| &= \frac{1-\cos h}{h} \\
&= \frac{(1-\cos h)\cdot(1+\cos h)}{h\cdot(1+\cos h)} \\
&= \frac{1^2-(\cos h)^2}{h\cdot(1+\cos h)} \\
&= \frac{1-(\cos h)^2}{h\cdot(1+\cos h)} \\
&\leq \frac{(\sin h)^2}{h\cdot(1+0)} \\
&= \frac{(\sin h)^2}{h} \\
&\leq \frac{h^2}{h} = h
\end{aligned}
$$

Also:

$$0 \leq \left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| \leq h.$$

Daher muss sich $\dfrac{\cos h - 1}{h}$ der $0$ nähern, wenn $h$ gegen 0 geht.

## Zusammenfassung: Grundlegende Ableitungen

| | |
|---|---|
| Konstante Funktion : | $(c)' = 0$ |
| Geradenfunktion: | $(ax+b)' = a$ |
| Potenzfunktion: | $(x^n)' = nx^{n-1}$ |
| Exponentialfunktion: | $(e^x)' = e^x$ |
| Sinusfunktion: | $(\sin x)' = \cos x$ |
| Kosinusfunktion: | $(\cos x)' = -\sin x$ |

## 3.2 Ableitungsregeln

Wir betrachten die folgenden Ableitungsregeln (in Klammern stehen jeweils zwei Beispiele von Funktionen, auf die die Regel angewendet werden kann):

- Summenregel ($x + \sin x$, $x^3 + x^2$)
- Faktorregel ($3 \sin x$, $5x^2$)
- Produktregel ($x \cdot \sin x$, $x^2 e^x$)
- Quotientenregel ($\frac{\cos x}{e^x}$, $\frac{x}{1+x^2}$)
- Kettenregel ( $\sin(2x+1)$, $(\cos x)^3$)

Jede Ableitungsregel wird formuliert (in Worten und in der Formelsprache), dann folgen Anwendungsbeispiele und schließlich eine Herleitung der Regel.

**<u>Die Summenregel</u>**

Man leitet eine Summe ab, indem man jeden Summanden ableitet:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Die Summenregel gilt sinngemäß auch für *Differenzen*, denn man kann die Differenz als Summe auffassen:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x) .$$

Der Faktor –1 bleibt beim Ableiten erhalten (Faktorregel).

**Beispiele**

$(x+\sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x$

$(x^3 - x^2)' = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x$

$(x^2 + x + 3)' = (x^2)' + (x)' + (3)' = 2x + 1 + 0 = 2x + 1$

**Herleitung der Summenregel**

***Steigung der Sekante*** für die Funktion $f(x) + g(x)$:

$$\frac{\big(f(x+h) + g(x+h)\big) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x) \;+\; g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;+\; \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\to f'(x) \;+\; g'(x)$$

Die Ableitung von $f(x) + g(x)$ ist also $f'(x) + g'(x)$.
Damit ist die Summenregel bewiesen.

## Die Faktorregel

*Konstante* Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

**Beispiele**

$(3\operatorname{sen} x)' = 3(\operatorname{sen} x)' = 3\cos x$

$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x + 3)' &= (x^2)' + (5x)' + (3)' \\ &= 2x + 5(x)' + 0 \\ &= 2x + 5 \cdot 1 \\ &= 2x + 5\end{aligned}$$

**Herleitung der Faktorregel**

***Steigung der Sekante*** für die Funktion $c \cdot f(x)$:

$$\frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to c \cdot f'(x)$$

Die Ableitung von $c \cdot f(x)$ ist also $c \cdot f'(x)$.
Damit ist die Faktorregel bewiesen.

## Die Produktregel

Man leitet ein Produkt ab, indem man jeweils einen Faktor ableitet:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Die Produktregel gilt sinngemäß auch für mehr als zwei Faktoren, z. B. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

**Beispiel 1**

$$\begin{aligned}(x\sin x)' &= (x)'\sin x \;+\; x(\sin x)'\\ &= 1\cdot\sin x \;+\; x\cdot\cos x\\ &= \sin x \;+\; x\cos x\end{aligned}$$

**Beispiel 2**

$$\begin{aligned}(x^2e^x)' &= (x^2)'e^x \;+\; x^2(e^x)'\\ &= 2xe^x \;+\; x^2e^x\\ &= (2x+x^2)e^x\end{aligned}$$

**Beispiel 3**

$$\begin{aligned}(xe^x\sin x)' &= (x)'e^x\sin x \;+\; x(e^x)'\sin x \;+\; xe^x(\sin x)'\\ &= (x)'e^x\sin x \;+\; x(e^x)'\sin x \;+\; xe^x(\sin x)'\\ &= 1e^x\sin x \;+\; xe^x\sin x \;+\; xe^x\cos x\\ &= (\sin x + x\sin x + x\cos x)e^x\\ &= [(1+x)\sin x + x\cos x]e^x\end{aligned}$$

**Beispiel 4**

$$\begin{aligned}(x^3)' &= (x\cdot x\cdot x)'\\ &= (x)'\cdot x\cdot x \;+\; x\cdot(x)'\cdot x \;+\; x\cdot x\cdot(x)'\\ &= 1\cdot x\cdot x \;+\; x\cdot 1\cdot x \;+\; x\cdot x\cdot 1\\ &= x^2 \;+\; x^2 \;+\; x^2\\ &= 3x^2\end{aligned}$$

Anmerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass die Ableitung von $x^n$ auch aus der Produktregel gewonnen werden kann.

### Herleitung der Produktregel

Der Trick bei den nachfolgenden Umformungen ist die Einführung eines gemischten Terms $f(x)\cdot g(x+h)$.

***Steigung der Sekante*** für die Funktion $f(x)\cdot g(x)$:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\;+\;f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\rightarrow\; f'(x)\cdot g(x)\;+\;f(x)g'(x)$$

Die Ableitung von $f(x)\cdot g(x)$ ist also:

$$f'(x)\cdot g(x)\;+\;f(x)g'(x).$$

Damit ist die Produktregel bewiesen.

## Die Quotientenregel

Die Ableitung eines Quotienten ist auch ein Quotient. Der Nenner wird quadriert. Im Zähler steht der Ausdruck wie bei der Produktregel, aber mit einem Minuszeichen:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

**Beispiel 1**

$$\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot e^x - \cos x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x + \cos x) \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$$

**Beispiel 2**

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot (0+2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

**Beispiel 3**

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} \\
&= \begin{cases} \dfrac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \dfrac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x \\[2em] \dfrac{1}{(\cos x)^2} \quad \left(\text{wegen } \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ Pythagoras}\right) \end{cases} \\
&= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

Also:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Anmerkung: $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ und $\tan^2 x$ sind abkürzende Schreibweisen für $(\sin x)^2$, $(\cos x)^2$, bzw. $(\tan x)^2$.

**Herleitung der Quotientenregel**

Wir schreiben den Quotienten um (wie schon die Babylonier vor 4000 Jahren):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

und wenden die Produktregel an. Dazu müssen wir vorher die Ableitung von $\dfrac{1}{g(x)}$ berechnen:

***Steigung der Sekante*** für die Funktion $\dfrac{1}{g(x)}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) \\
&= \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{g(x)}{g(x+h) \cdot g(x)} - \frac{g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right) \\
&= \frac{1}{h} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
&= \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
&= -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
&\to -g'(x) \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

Die Ableitung von $\dfrac{1}{g(x)}$ ist also $-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$.

Wir berechnen nun die Ableitung von $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ mit Hilfe der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

Damit ist die Quotientenregel hergeleitet.

Übrigens kann die Quotientenregel auch aus dem Ansatz

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = f(x)$$

gewonnen werden. Dazu leitet man beide Seiten ab (Produktregel) und löst die Gleichung nach $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ auf.

## Die Kettenregel

Die Kettenregel ist die schwierigste der Ableitungsregeln. Daher beginnen wir zunächst mit einigen Beispielen. Aus ihnen wird die Situation klar, in der die Kettenregel angewendet wird. Ferner kann man aus den Beispielen die Kettenregel als Vermutung herauslesen.

**Beispiel 1**
Wir berechnen die Ableitung der Funktion $e^{3x}$.
Die Funktion $e^{3x}$ ist wie die Funktion $e^x$, *aber es ist $x$ ersetzt durch* $3x$.

Wir leiten mittels Produktregel ab ($e^{3x} = e^x \cdot e^x \cdot e^x$):

$$\begin{aligned}(e^{3x})' &= (e^x)' \cdot e^x \cdot e^x + e^x \cdot (e^x)' \cdot e^x + e^x \cdot e^x \cdot (e^x)' \\ &= e^x \cdot e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x \cdot e^x \\ &= 3 \cdot e^x \cdot e^x \cdot e^x \\ &= 3 \cdot e^{3x}\end{aligned}$$

Also: $(e^{3x})' = 3 \cdot e^{3x}$

**Beispiel 2**
Wir berechnen die Ableitung der Funktion $\sin(2x)$.
Die Funktion $\sin(2x)$ ist wie die Funktion $\sin x$, *aber es ist $x$ ersetzt durch* $2x$.

Die Ableitung berechnen wir mit Hilfe des Additionstheorems sowie der Faktor- und Produktregel:

$$(\sin(2x))' = (\sin(x+x))'$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sin x \cos x + \cos x \sin x)' \\
&= (2 \sin x \cos x)' \\
&= 2 \cdot [(\sin x)' \cos x \ + \ \sin x (\cos x)'] \\
&= 2 \cdot [\cos x \cos x \ + \ \sin x (-\sin x)] \\
&= 2 \cdot [\cos x \cos x \ - \ \sin x \sin x] \\
&= 2 \cdot \cos(x + x) \\
&= 2 \cdot \cos(2x)
\end{aligned}
$$

Also: $(\sin(2x))' = 2 \cdot \cos(2x)$

**Beispiel 3**
Wir berechnen die Ableitung der Funktion $(g(x))^3$.
Die Funktion $(g(x))^3$ ist wie die Funktion $x^3$, *aber es ist* $x$ *ersetzt durch* $g(x)$.
Die Ableitung berechnen wir mit Hilfe der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
[(g(x))^3]' &= [g(x) \cdot g(x) \cdot g(x)]' \\
&= g'(x) \cdot g(x) \cdot g(x) \ + \ g(x) \cdot g'(x) \cdot g(x) \\
&\quad + \ g(x) \cdot g(x) \cdot g'(x) \\
&= 3 \cdot g(x) \cdot g(x) \cdot g'(x) \\
&= 3 \cdot (g(x))^2 \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Also: $[(g(x))^3]' = 3 \cdot (g(x))^2 \cdot g'(x)$

An den vorgeführten Beispielen werden wir nun die Kettenregel ablesen.

## Zusammenfassung

| *Funktion und Ableitung* | | | *Struktur der Funktion* | |
|---|---|---|---|---|
| **Funktion** | **Ableitung** | | $f(x)$ | **$x$ ersetzt durch** |
| $e^{3x}$ | $e^{3x}\cdot 3$ | | $e^x$ | $3x$ |
| $\sin(2x)$ | $\cos(2x)\cdot 2$ | | $\sin x$ | $2x$ |
| $g(x)^3$ | $3g(x)^2\cdot g'(x)$ | | $x^3$ | $g(x)$ |

### Fazit

Ist bei einer Funktion $x$ durch $g(x)$ ersetzt, so kann man beim Ableiten zunächst so verfahren, als stünde noch $x$. Man muss aber dann noch mit der Ableitung des Ersetzungsausdrucks multiplizieren, nämlich mit $g'(x)$. In der allgemeinen Formelsprache ausgedrückt lautet diese Regel:

| *Funktion und Ableitung* | | | *Struktur der Funktion* | |
|---|---|---|---|---|
| **Funktion** | **Ableitung** | | | **$x$ ersetzt durch** |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x))\cdot g'(x)$ | | $f(x)$ | $g(x)$ |

Die Ringe einer Kette sind in andere Ringe eingesetzt. Diese Analogie hat zur Bezeichnung „*Kettenregel*" geführt. Oft wird $f'(g(x))$ als „*äußere*" Ableitung bezeichnet und $g'(x)$ als „*innere*" Ableitung („nachdifferenzieren").

**Kettenregel:**

$$[\, f(g(x))\,]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Wir betrachten nun mehrere Beispiele zur Berechnung der Ableitung mit Hilfe der Kettenregel. Dabei ist von entscheidender Bedeutung, dass die Struktur der Funktion klar erfasst wird.

**Beispiel 4**

$((x^2+1)^{10})' = \ ?$

Struktur der Funktion: $x^{10}$, aber $x$ ersetzt durch $x^2+1$.
Daher:

$$\begin{aligned} ((x^2+1)^{10})' &= 10(x^2+1)^9 \cdot (x^2+1)' \\ &= 10(x^2+1)^9 \cdot 2x \\ &= 20x(x^2+1)^9 \end{aligned}$$

Also:

$((x^2+1)^{10})' \ = \ 20x(x^2+1)^9$

**Beispiel 5**

$(\sin(x^3))' \ = \ ?$

Struktur der Funktion: $\sin x$, aber $x$ ersetzt durch $x^3$.
Daher:

$$\begin{aligned} (\sin(x^3))' &= \cos(x^3) \cdot (x^3)' \\ &= \cos(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= 3x^2 \cos(x^3) \end{aligned}$$

Also:

$(\sin(x^3))' = 3x^2 \cos(x^3)$

**Beispiel 6**

$(\cos^2(5x-3))' \;=\; ?$

Struktur der Funktion: $x^2$, und $x$ ersetzt durch $\cos(5x-3)$.

Daher:

$$\begin{aligned}(\cos^2(5x-3))' &= [(\cos(5x-3))^2]' \\ &= 2\cdot(\cos(5x-3))^{2-1}\cdot(\cos(5x-3))' \\ &= 2\cdot\cos(5x-3)\cdot(\cos(5x-3))'\end{aligned}$$

Die Ableitung von $\cos(5x-3)$ erfordert noch einmal die Anwendung der Kettenregel:

Struktur der Funktion: $\cos x$, aber $x$ ersetzt durch $5x-3$.

Daher:

$$\begin{aligned}(\cos(5x-3))' &= (-\sin(5x-3))\cdot(5x-3)' \\ &= (-\sin(5x-3))\cdot 5 \\ &= -5\sin(5x-3)\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}(\cos^2(5x-3))' &= 2\cdot(\cos(5x-3))\cdot(\cos(5x-3))' \\ &= 2\cdot(\cos(5x-3))\cdot(-5\sin(5x-3)) \\ &= -10\cos(5x-3)\sin(5x-3)\end{aligned}$$

Daher:

$(\cos^2(5x-3))' \;=\; -10\cos(5x-3)\sin(5x-3)$

## Herleitung der Kettenregel

***Steigung der Sekante*** für die Funktion $f(g(x))$ ist nach Erweiterung mit $g(x+h)-g(x)$:

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} =$$

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Der Differenzenquotient

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}$$

ist nichts anderes als die Steigung der Sekante von $f$ durch die Punkte an den Stellen $g(x+h)$ und $g(x)$. Geht $h$ gegen 0, so nähert sich $g(x+h)$ der Stelle $g(x)$. Aus der Sekante wird die Tangente von $f$ an der Stelle $g(x)$:

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \rightarrow f'(g(x)).$$

Wegen

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \rightarrow g'(x)$$

folgt daher insgesamt

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \rightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Die Ableitung von $f(g(x))$ ist also $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Damit ist die Kettenregel begründet.

## Die Ableitung einiger wichtiger Funktionen

Wir benutzen die grundlegenden Funktionen und die Ableitungsregeln, um die Ableitung folgender Funktionen zu berechnen:

- Natürlicher Logarithmus $\ln x$,
- Allgemeine Exponentialfunktion $a^x$,
- Arkustangens $\arctan x$,
- Arkussinus $\arcsin x$,
- Arkuskosinus $\arccos x$.

### Die Ableitung des natürlichen Logarithmus

Der natürliche Logarithmus der positiven Zahl $x$ ist der Exponent, mit der $x$ als Potenz der eulerschen Zahl $e$ geschrieben werden kann:

$x = e^?$
? = natürliche Logarithmus von $x$, abgekürzt $\ln x$

Diese Definition lässt sich kompakt in folgender unscheinbaren Beziehung zusammenfassen:

$$x = e^{\ln x}.$$

Wir bilden auf beiden Seiten die Ableitung, benutzen die Kettenregel und lösen nach $(\ln x)'$ auf:

$$
\begin{aligned}
(x)' &= (e^{\ln x})' \\
1 &= e^{\ln x} \cdot (\ln x)' \\
1 &= x \cdot (\ln x)' \\
\frac{1}{x} &= (\ln x)'
\end{aligned}
$$

Also:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Anmerkungen:
Die Exponentialfunktion liefert die Potenz $e^x$ zu jedem Exponenten $x$. Die Logarithmusfunktion liefert umgekehrt zu jedem Potenzwert $x$ den zugehörigen Exponenten. Der Logarithmus ist die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion. Wir werden unten noch Umkehrfunktionen weiterer Funktionen (tan, sin, cos) betrachten und ableiten.

**Die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion**

Wir werden die Potenz $a^x$ in eine Potenz mit Basis $e$ umwandeln. Dazu schreiben wir die gegebene Basis $a$ als Potenz von $e$:

$$a = e^{\ln a}$$

Dies setzen wir in die Potenz $a^x$ ein:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

Also

$$a^x = e^{(\ln a)x}$$

Nun können wir mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $a^x$ berechnen:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (e^{(\ln a)x})' \\ &= e^{(\ln a)x} \cdot [(\ln a)x]' \\ &= e^{(\ln a)x} \cdot (\ln a) \\ &= a^x \cdot (\ln a) \\ &= (\ln a) \cdot a^x\end{aligned}$$

Also:

$$(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$$

Anmerkung:
Mit diesem Ergebnis und der Definitionsgleichung des Logarithmus, $a^{\log_a x} = x$, kann nun die Ableitung des allgemeinen Logarithmus $\log_a x$ berechnet werden:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

**Die Ableitung der Arkustangensfunktion**

Das lateinische Wort *arcus* steht für „Bogen“ und ist hier in unserem Zusammenhang einfach als „Winkel“ zu lesen. (Wir betrachten ja auch Winkel im „*Bogen*maß“.)

Die Tangensfunktion macht aus einem Winkel einen Tangenswert. Der Arkustangens gewinnt umgekehrt aus einem Tangenswert den entsprechenden Winkel (zwischen –90°

und 90°, d. h. im Bogenmaß zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$) zurück:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Winkel}} \arrow[r, shift left, "\tan"] & \boxed{\text{Tangenswert}} \arrow[l, shift left, "\arctan"] \end{tikzcd}$$

Daher ist

$$\tan(\arctan x) = x$$

wieder der ursprüngliche Tangenswert x.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\arctan x} \arrow[r, shift left, "\tan"] & \boxed{x} \arrow[l, shift left, "\arctan"] \end{tikzcd}$$

Mit Hilfe der unscheinbaren Gleichung $\tan(\arctan x) = x$ können wir nun die Ableitung von $\arctan x$ berechnen. Wir bilden auf beiden Seiten die Ableitung, benutzen die Kettenregel und das frühere Ergebnis $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$. Schließlich lösen wir nach $(\arctan x)'$ auf:

$$\begin{aligned} (\tan(\arctan x))' &= (x)' \\ (1 + (\tan(\arctan x))^2) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\ (1 + x^2) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Die Ableitung von $\arctan x$ ist also:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

## Die Ableitung der Arkussinusfunktion

Wir verfahren wie beim Arkustangens. Die Sinusfunktion macht aus einem Winkel einen Sinuswert. Der Arkussinus gewinnt umgekehrt aus einem Sinuswert den entsprechenden Winkel (zwischen –90° und 90°, d. h. im Bogenmaß zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$) zurück:

$$\boxed{\text{Winkel}} \; \underset{\arcsin}{\overset{\sin}{\rightleftarrows}} \; \boxed{\text{Sinuswert}}$$

Daher ist

$$\sin(\arcsin x) \;=\; x$$

wieder der ursprüngliche Tangenswert x.

$$\boxed{\arcsin x} \; \underset{\arcsin}{\overset{\sin}{\rightleftarrows}} \; \boxed{x}$$

Wir benutzen den oben (auf Seite 38) bereits erwähnten trigonometrisch verkleideten Satz des Pythagoras:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 \;+\; (\cos\alpha)^2 \;=\; 1\,,$$

um den Kosinus durch den Sinus ausdrücken zu können.
Nach $\cos\alpha$ aufgelöst, erhält man zunächst

$$\cos\alpha \;=\; \pm\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}\;.$$

Das negative Vorzeichen scheidet aus, da $\alpha$ hier wie gesagt zwischen –90° und 90° liegt. Dort ist der Kosinus nie negativ. Also ist in diesem Bereich:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}\,.$$

Nun können wir die Ableitung von $\arcsin x$ berechnen (in Analogie zum Fall des Arkustangens):

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin x) &= x \\
(\sin(\arcsin x))' &= (x)' \\
(\cos(\arcsin x))\cdot(\arcsin x)' &= 1 \\
\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}\cdot(\arcsin x)' &= 1 \\
\sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin x)' &= 1 \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

**Die Ableitung der Arkuskosinusfunktion**

Völlig analog zu den Überlegungen beim Arkussinus erhält man für die Ableitung des Arkuskosinus:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

# Aufgaben

## Grundlegende Ableitungen

1. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = x^4$
c) $f(x) = x^{25}$
d) $f(x) = x^5$
e) $f(x) = x^{13}$

2. Leite die folgenden **Potenz**funktionen ab:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ (Tipp: $\sqrt{x} = x^{1/2}$)
b) $f(x) = \frac{1}{x}$ (Tipp: $\frac{1}{x} = x^{-1}$)
c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$
d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{x^3}$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^{13}}}$
d) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

## Summen- und Faktorregel

1. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = 4x - 3$
b) $f(x) = -8x^2 + 5x + 17$
c) $f(x) = 7x^8 - 3x^5 + 2x^3 - 5x + 8$
d) $f(x) = 1 - 0{,}5x + 3{,}5x^2 - 6x^3$
e) $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 3x + 5$
f) $f(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$
g) $f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
h) $f(x) = 3x^{17} - 4x^9 + 8x^3$
i) $f(x) = \pi x^3 - 2x + 1 + \dfrac{5}{x^2}$
j) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

2. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$
b) $f(x) = 7x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 5x + 13$
c) $f(x) = (3x+5)^2$
d) $f(x) = 8x^3 + 10\sqrt{x}$
e) $f(x) = x + \sqrt{x}$
f) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

## Produktregel

1. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = x \sin x$
b) $f(x) = x \cos x$
c) $f(x) = x\, e^x$
d) $f(x) = x^3 e^x$

e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

2. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = x^2 \sin x$
b) $f(x) = x^5 \cos x$
c) $f(x) = \sin^2 x \qquad [\ = (\sin x)^2\ ]$
d) $f(x) = \cos^2 x \qquad [\ = (\cos x)^2\ ]$
e) $f(x) = e^x e^x$

3. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = 2\,e^x \sin x$
c) $f(x) = (x^2 + 3x + 4)(\sin x + \cos x)$
d) $f(x) = (3x + 5\,e^x)(4\sin x - 3\cos x)$
e) $f(x) = (1+2\cos^2 x)(1-x^2)$

4. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = x^2 e^x \sin x$
b) $f(x) = x\ e^x \cos x$
c) $f(x) = x^2 e^x \sin x + x^3 \cos x$
d) $f(x) = (\sin x)^4$
e) $f(x) = (1+x^2)^5$
f) $f(x) = (1+\cos x)^{10}$

## Quotientenregel

1. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = \dfrac{3x+2}{5x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^4}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

g) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$

## Kettenregel

1. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = \sin(3x+5)$

b) $f(x) = \cos(7x+4)$

c) $f(x) = e^{\sin x}$

d) $f(x) = \cos e^x$

e) $f(x) = (3x+5)^{100}$

f) $f(x) = \cos(7x^5 + 8x^3 + 5x + 13)$

g) $f(x) = e^{4x}$

h) $f(x) = \sin e^x$

i) $f(x) = \sin^{13} x$

j) $f(x) = e^{\cos x}$

k) $f(x) = e^{-x}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

2. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = e^{4x} \cos(7x+3)$
b) $f(x) = \cos^9(x^2+1)$
c) $f(x) = \sin^{20}(x^3+1)$
d) $f(x) = e^{x \sin(2x)}$
e) $f(x) = (7x^2+3)^{20}$
f) $f(x) = (3x+5)^{30}$
g) $f(x) = x \cos(x^2 e^{3x})$
h) $f(x) = (2-7x)^{30}$

## Gemischte Ableitungsregeln

1. Leite die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = 2^x$ [ Tipp: $2 = e^{\ln 2}$ ]
b) $f(x) = a^x$ (wobei $a > 0$)
c) $f(x) = x^x$ [ Tipp: $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \cdot \ln x}$ ]
d) $f(x) = \ln(\sin x)$
e) $f(x) = \ln(\cos x)$
f) $f(x) = \cot x$ [ Tipp: $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ]
g) $f(x) = \ln(1+x^2)$
h) $f(x) = x(\ln x - 1)$
i) $f(x) = \ln(1-x)$
j) $f(x) = \ln(\tan x)$

# 4. Anwendungen

Wir betrachten folgende Themen:

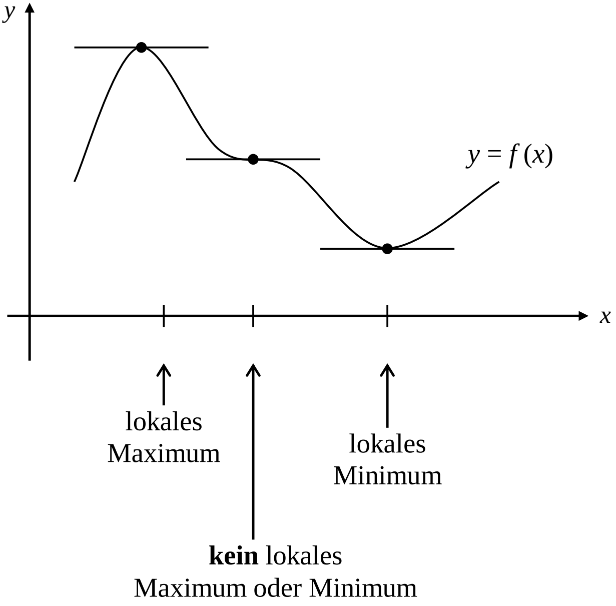
4.1 Lokale Maxima und Minima
4.2 Tatsächliche lokale Maxima und Minima
4.3 Wendepunkte
4.4 Kurvendiskussion
4.5 Das Newton-Verfahren
4.6 Reihen

## 4.1 Lokale Maxima und Minima

Der Mount Everest ist der höchste Berg auf der Erde (auf dem Globus). Er stellt damit ein *globales* Maximum dar. Der Mont Blanc ist in seiner Region (in Europa) der höchste Berg. Er ist kein globales, sondern eine *lokales* Maximum; gelegentlich spricht man auch von einem *relativen* Maximum.
Auch ein Minimum kann global oder lokal (relativ) sein.

Der Plural von *Maximum* ist *Maxima* und der von *Minimum* ist *Minima*. Der Begriff „Extremum" fasst die Begriffe „Maximum" und „Minimum" zusammen.

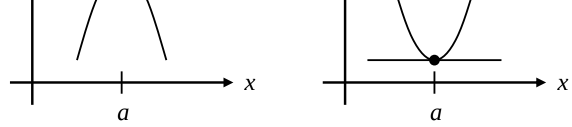
Das folgende Bild zeigt, dass die Tangente bei einem lokalen Maximum oder Minimum stets waagrechte verläuft. Die Steigung der Tangente ist dort also Null, das heißt, die Ableitung ist Null. Die Kurve zeigt aber auch, dass waagerechte Tangenten vorkommen können, obwohl kein lokales Maximum oder Minimum vorliegt.



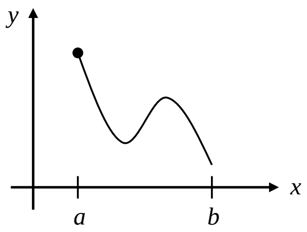

Wir fassen zusammen:

**Wenn** $f$ bei $a$ ein lokales Maximum oder Minimum hat,
dann gilt

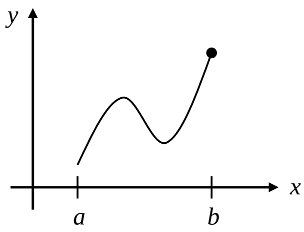
$$f'(a) = 0.$$



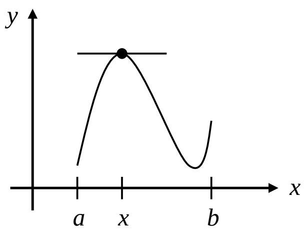
In der Praxis sind die $x$-Werte der Funktion oft auf einen gewissen *Bereich* beschränkt, z. B. auf reelle Zahlen von 0 bis 10 (kurz: $0 \leq x \leq 10$). Wir verschaffen uns einen anschaulichen Überblick über das Auftreten maximaler Funktionswerte ($y$-Werte) in einer solchen Situation. Die Überlegungen sind problemlos auf minimale Werte übertragbar. Offenbar gibt es nur die folgenden drei Fälle:




Maximum
am linken *Rand*
(bei $a$)




Maximum
am rechten *Rand*
(bei $b$)



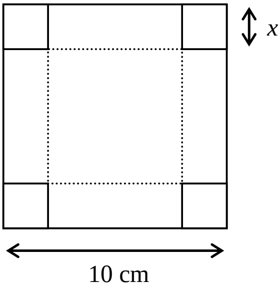

Maximum im
*Inneren* (bei $x$),
*waagerechte* Tangente

Um das Maximum zu finden, braucht man also nur folgende Kandidaten in Betrachte zu ziehen:

1. Randpunkte des Bereichs.
2. Stellen $x$, wo die Ableitung Null ist: $f'(x) = 0$.

Von diesen wenigen Kandidaten muss man nur noch die Funktionswerte berechnen und den größten von ihnen finden.

**Beispiel**
Aus einem quadratischen Pappstück (Seitenlänge 10 cm) wird durch Ausschneiden von gleich großen Quadraten an den Ecken eine Schachtel hergestellt. Welche Seitenlänge müssen die ausgeschnittenen Quadrate haben, damit die Schachtel das größtmögliche Volumen hat?




**Lösung**

**1. Das Volumen der Schachtel (in Abhängigkeit von $x$):**

$$f(x) = (10 - 2x)^2 x \qquad (0 \le x \le 5)$$

**2. Berechne $f(x)$ an den *Randpunkten* des Bereichs:**

$$f(0) = (...)^2 \cdot 0 = 0$$
$$f(5) = (10 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 0^2 \cdot 5 = 0$$

**3. Bestimme alle Stellen $x$ mit *waagerechter* Tangente:**

a) Multipliziere die Funktion aus:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (10-2x)^2 x \\
&= (100-40x+4x^2)x \\
&= 100x-40x^2+4x^3 \\
f(x) &= 4x^3-40x^2+100x
\end{aligned}
$$

b) Ableitung berechnen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (4x^3-40x^2+100x)' \\
f'(x) &= 12x^2-80x+100
\end{aligned}
$$

c) Berechne alle die Stellen, wo die Ableitung Null ist

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
12x^2-80x+100 &= 0 \\
x^2-\tfrac{20}{3}x+\tfrac{25}{3} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\left(\tfrac{10}{3}\right)^2-\tfrac{25}{3}} \qquad (p\text{-}q\text{-Formel}) \\
&= \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\tfrac{100-75}{9}} \\
&= \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\tfrac{25}{9}} \\
&= \tfrac{10}{3} \pm \tfrac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich die zwei Lösungen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{10}{3}+\tfrac{5}{3} = \tfrac{15}{3} = 5 \\
x_2 &= \tfrac{10}{3}-\tfrac{5}{3} = \tfrac{5}{3}
\end{aligned}
$$

d) Funktionswerte der Stellen mit waagerechter Tangente:

$$\begin{aligned} f(x) &= (10-2x)^2\,x \\ f(\tfrac{5}{3}) &= (10-2\cdot\tfrac{5}{3})^2\cdot\tfrac{5}{3} \\ &= (\tfrac{20}{3})^2\cdot\tfrac{5}{3} \\ &= \tfrac{2000}{27}\approx 74{,}074 \\ f(5) &= 0 \qquad \text{(Randpunkt, s.o.)} \end{aligned}$$

**4. Bestimme das Maximum (Vergleich)**

Alle ermittelten Kandidaten sind:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(\tfrac{5}{3}) &= \tfrac{2000}{27}\approx 74{,}074 \\ f(5) &= 0 \end{aligned}$$

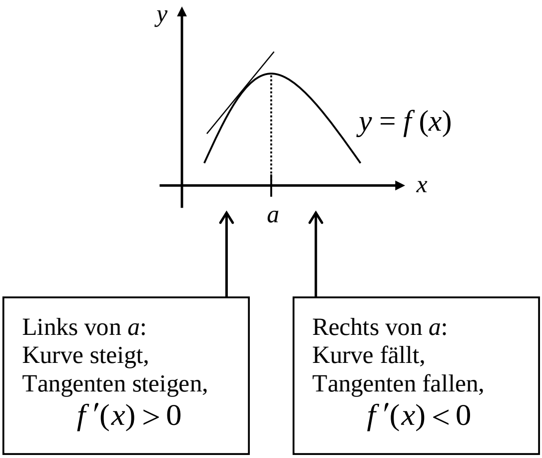
$f(\frac{5}{3}) = \frac{2000}{27} \approx 74{,}074$ ist der größte der drei Werte.

Also:
Wenn man Quadrate der Seitenlänge $\frac{5}{3}$ cm ausschneidet, ergibt sich die Schachtel mit dem größtmöglichen Volumen von ca. 74,074 cm$^3$.

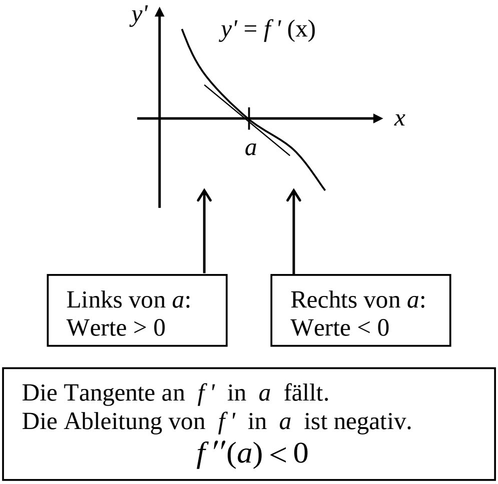
## 4.2 Tatsächliche lokale Maxima und Minima

Wenn $f$ bei $a$ ein lokales Maximum oder Minimum hat, dann ist die Tangente bei $a$ horizontal: $f'(a) = 0$. Hat man alle Stellen $a$ mit $f'(a) = 0$ (d. h. mit waagerechter Tangente) berechnet, so weiß man nicht, an welchen dieser Stellen die Kurve tatsächlich lokale Maxima oder Minima vorliegen.

Wir werden nun dazu ein einfaches Kriterium entwickeln. Zunächst betrachten wir ein lokales Maximum einer Funktion $f$:




Wir tragen nun die Steigungen der Tangenten, $y' = f'(x)$, auch in ein Koordinatensystem ein:




Diese Gedanken können wir nun in folgende schlüssige Reihenfolge bringen:

1. Wir nehmen an, dass die Ableitung der Funktion $f$ im Punkte $a$ Null ist und dass die zweite Ableitung in $a$ negativ ist:

$$f'(a) = 0,$$
$$f''(a) < 0.$$

2. Diese Annahmen bedeuten anschaulich:
   Die Ableitungskurve schneidet die Achse bei $a$.
   Die Tangente der Ableitungskurve in $a$ ist fallend.

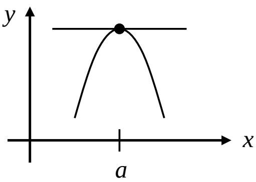
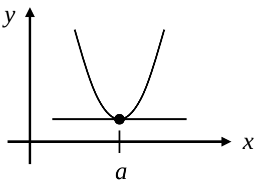
3. Die Ableitungsfunktion nimmt also
   links von $a$ positive Werte an und
   rechts von $a$ negative Werte.

4. Die Originalfunktion ist also
links von $a$ steigend und
rechts von $a$ fallend (wie ihre Tangenten).

5. Also hat $f$ in $a$ ein lokales Maximum.

Eine völlig analoge Überlegung liefert das entsprechende Ergebnis für lokale Minima

So fassen wir die Ergebnisse zusammen in folgendem Kriterium:

<table>
<tr>
<td>Wenn<br>$f'(a)=0$ und<br>$f''(a)<0$,<br>dann hat $f$ bei $a$ ein<br>lokales Maximum.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Wenn<br>$f'(a)=0$ und<br>$f''(a)>0$,<br>dann hat $f$ bei $a$ ein<br>lokales Minimum.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Wir betrachten nun drei Beispiele. Das erste Beispiel ist die Standardparabel $y = x^2$, die bekanntlich nur ein (lokales) Minimum hat. Sie kann auch als Eselsbrücke dienen, um zu rekonstruieren, dass ein lokales *Mini*mum mit einer *positiven* zweiten Ableitung verbunden ist.

**Beispiel 1**

Gegeben: Parabel $y = x^2$

Gesucht: alle Stellen, an denen ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt

**Lösung**

1. Erste und zweite Ableitung berechnen

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

2. Alle Stellen $x$ mit $f'(x) = 0$ finden (horizontale Tangente)

$$f'(x) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Es gibt nur eine Stelle mit horizontaler Tangente, nämlich $x = 0$. Diese Stelle muss nun mit Hilfe der zweiten Ableitung geprüft werden.

3. Prüfe die zweite Ableitung

$$f''(x) = 2$$

$$f''(0) = 2 > 0$$

Also liegt bei $x = 0$ ein lokales *Minimum* vor.

**<u>Beispiel 2</u>**

Gegeben: Parabel $y = -x^2 + 2x + 1$

Gesucht: alle Stellen, an denen ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt

**<u>Lösung</u>**

1. Erste und zweite Ableitung berechnen

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x + 1 \\ f'(x) &= -2x + 2 \\ f''(x) &= -2 \end{aligned}$$

2. Alle Stellen $x$ mit $f'(x) = 0$ finden (horizontale Tangente)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x + 2 &= 0 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Es gibt nur eine Stelle mit horizontaler Tangente, nämlich $x = 1$. Diese Stelle muss nun mit Hilfe der zweiten Ableitung geprüft werden.

3. Prüfe die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \\ f''(1) &= -2 < 0 \end{aligned}$$

Also liegt bei $x = 1$ ein lokales *Maximum* vor. Übrigens befindet sich dort natürlich der Scheitelpunkt der Parabel.

**Beispiel 3**

Gegeben: kubische Parabel $y = x^3 - 3x$

Gesucht: alle Stellen, an denen ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt

**Lösung**

1. Erste und zweite Ableitung berechnen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

2. Alle Stellen $x$ mit $f'(x) = 0$ finden (horizontale Tangente)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Stellen mit horizontaler Tangente, nämlich $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Diese Stellen müssen nun mit Hilfe der zweiten Ableitung geprüft werden.

3. Prüfe die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \\ f''(1) &= 6 \cdot 1 = 6 > 0 \end{aligned}$$

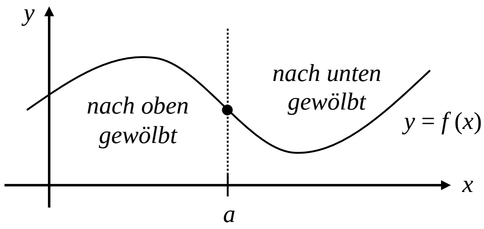
$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$$

Also liegt bei $x_1 = 1$ ein lokales Minimum und bei $x_2 = -1$ ein lokales Maximum vor.

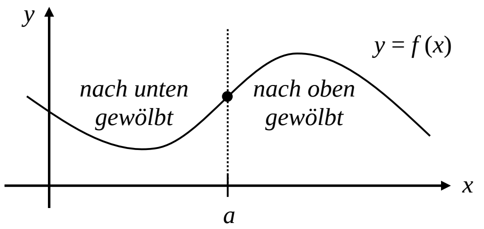
Diese kubische Parabel werden wir später im Rahmen der Kurvendiskussion ausführlicher betrachten und auch zeichnen.

## 4.3 Wendepunkte

In einem Wendepunkt $a$ ändert sich das Wölbungsverhalten einer Funktion:



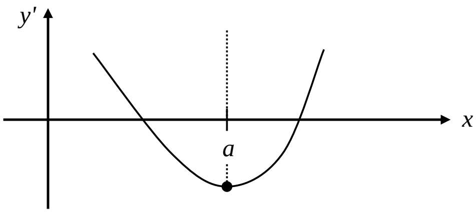

Oder



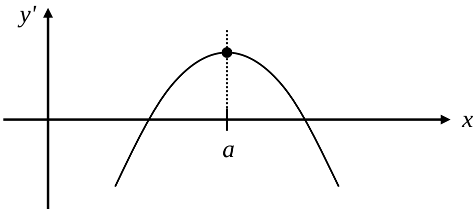

Wir werden nun ein einfaches Kriterium entwickeln, um Wendepunkte zu finden.
Dazu betrachten wir, wie sich die Steigungen in den obigen Skizzen entwickeln (von links nach rechts schauend):

- Ist die Kurve nach oben gewölbt, so nehmen die Steigungen ab.
- Ist die Kurve nach unten gewölbt, so nehmen die Steigungen zu.

Die zugehörigen Ableitungskurven haben also etwa folgende Gestalt:




bzw.




Die Ableitungsfunktion $f'$ hat im Wendepunkt $a$ also ein lokales Minimum bzw. Maximum. Auf $f'$ angewendet, können wir nach unseren Kriterien somit zweierlei feststellen:

1) Wenn $f''(a)=0$ und $f'''(a)>0$, dann hat $f$ einen Wendepunkt in $a$.
2) Wenn $f''(a)=0$ und $f'''(a)<0$, dann hat $f$ einen Wendepunkt in $a$.

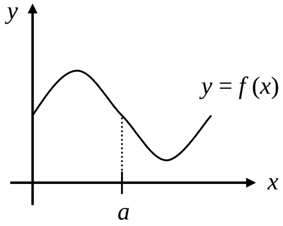
Die Bedingungen, dass $f'''(a)>0$ oder $f'''(a)<0$, kann man als $f'''(a)\neq 0$ zusammenfassen.
Damit ergibt sich folgendes Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes:

**Wenn**

$$f''(a) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(a) \neq 0\,,$$

dann

hat $f$ einen Wendepunkt in $a$.




**<u>Beispiel</u>**

Gegeben: kubische Parabel $y = x^3 - 3x$

Gesucht: alle Stellen, an denen ein Wendepunkt vorliegt

**<u>Lösung</u>**

1. Erste, zweite und dritte Ableitung berechnen

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

2. Alle Stellen $x$ mit $f''(x) = 0$ finden

$$f''(x) = 0$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

Es gibt nur eine Stelle, an der ein Wendepunkte vorliegen könnte, nämlich $x = 0$. Diese Stelle muss nun mit Hilfe der dritten Ableitung geprüft werden.

3. Prüfe die dritte Ableitung

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

Also liegt bei $x = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt vor.

Diese kubische Parabel werden wir später im Rahmen der Kurvendiskussion ausführlicher betrachten und auch zeichnen.

## 4.4 Kurvendiskussion

Mit Hilfe der Ableitungen kann man lokale Maxima und Minima und Wendepunkte bestimmen. Damit hat man wesentliche Aspekte einer Kurve erfasst und kann eine qualitativ hochwertige Skizze anfertigen.
Unter einer „*Kurvendiskussion*“ versteht man die Untersuchung einer Funktion vor allem durch Berechnung der lokalen Maxima und Minima und der Wendepunkte. Oft werden auch noch die Achsenschnittpunkte ermittelt und das Verhalten für betraglich große $x$ (d. h. „im Unendlichen“) untersucht.

Wir betrachten ein Beispiel:

**<u>Beispiel</u>**
Diskutiere und skizziere die Funktion $y = x^3 - 3x$.

**<u>Lösung</u>**

**1. Schnittpunkt mit der *y*-Achse berechnen**

Setze $x = 0$ ein:

$$y = x^3 - 3x$$

$$y = 0^3 - 3 \cdot 0$$

$$y = 0$$

Der Schnittpunkt mit der $y$-Achse ist also: (0; 0).

**2. Schnittpunkte mit der *x*-Achse (Nullstellen)**

Setze $y = 0$ ein:

$$
\begin{aligned}
y &= x^3 - 3x \\
0 &= x^3 - 3x \\
0 &= x(x^2 - 3)
\end{aligned}
$$

Einer der Faktoren muss 0 sein: $x = 0$ oder $x^2 - 3 = 0$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x^2 - 3 &= 0 \\
x^2 &= 3 \\
x_2 &= \sqrt{3} \\
x_3 &= -\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen sind also: (0; 0), ($\sqrt{3}$; 0) und ($-\sqrt{3}$; 0).

**3. Ableitungen berechnen**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x \\
f'(x) &= 3x^2 - 3 \\
f''(x) &= 6x \\
f'''(x) &= 6
\end{aligned}
$$

**4. Lokale Maxima und Minima bestimmen**

Löse die Gleichung $f'(x) = 0$ und prüfe die Lösungen mit Hilfe der zweiten Ableitung:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Prüfe:

$$f''(x) = 6x$$
$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$
$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$$

Berechne die *y*-Koordinaten:

$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$$

Also hat $f$ in $(-1; 2)$ ein lokales Maximum und in $(1; -2)$ ein lokales Minimum.

### 5. Wendepunkte bestimmen

Löse die Gleichung $f''(x) = 0$ und prüfe die Lösungen mit Hilfe der dritten Ableitung:

$$f''(x) = 0$$
$$6x = 0$$
$$x = 0$$

Prüfe:

$$f'''(x) = 6$$
$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

Also liegt bei $x = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt vor.

## 6. Verhalten für betraglich große $x$

Wir formen den Funktionsausdruck um, damit sein Verhalten bei betraglich großen $x$-Werten sichtbar wird. Wir klammern die höchste Potenz von $x$ aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ &= x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Nun wird der Bruch $\frac{3}{x^2}$ verschwindend klein, wenn $x$ betraglich groß wird. Daher:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \\ &\approx x^3 \cdot (1 - 0) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

Ist $x$ positiv und wird betraglich groß („$x \to \infty$“), so ist

$$f(x) \approx x^3$$

ebenfalls positiv und wird betraglich groß.

Ist $x$ negativ und wird betraglich groß („$x \to -\infty$“), so ist

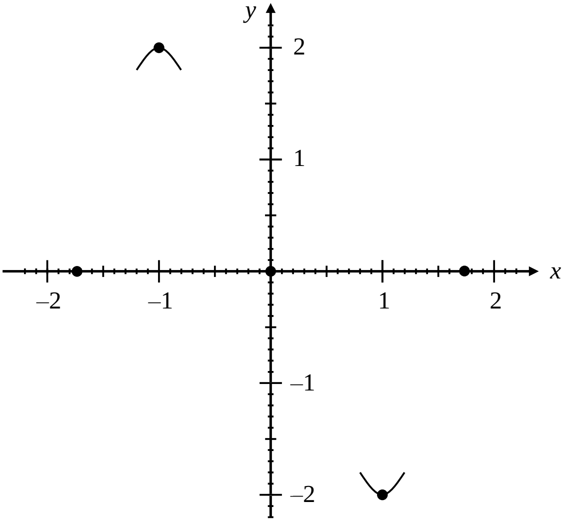
$$f(x) \approx x^3$$

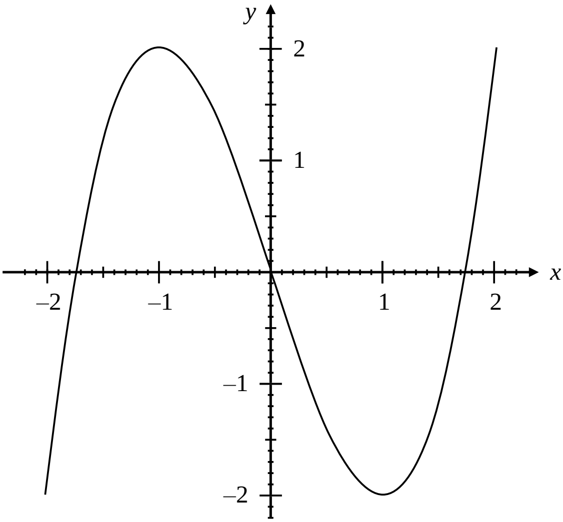
ebenfalls negativ und wird betraglich groß.

Man schreibt für das geschildert Verhalten kurz:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \, .$$

## 6. Skizze



In der ersten (vorläufigen) Skizze sind die berechneten Größen eingetragen. Das lokale Maximum wird als kleiner Hügel dargestellt und das lokale Minimum als kleines Tal.

Daraus ergibt sich die Kurve in der zweiten Skizze durch Verbinden der gegeben Punkt und Kurvenstücke.

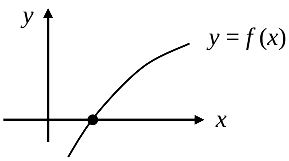
## 4.5 Das Newton-Verfahren

Einfache Gleichungen wie $2x+3=9$ können nach $x$ umgestellt und damit gelöst werden. Quadratische Gleichungen wie $x^2+6x=16$ können im Wesentlichen durch quadratische Ergänzung und Wurzelziehen gelöst werden, was die Altbabylonier vor etwa 4000 Jahren bereits konnten. Erst im 16. Jahrhundert haben die Italiener Tartaglia, Cardano und del Ferro Formeln zur Lösung Gleichungen dritten und vierten Grades (wie $x^3-3x+1=0$ bzw. $x^4-5x^3+7x^2+3x-1=0$) gefunden. Im 19. Jahrhundert erkannten Ruffini, Abel und Galois die Unmöglichkeit, entsprechende Formeln für Gleichungen fünften und höheren Grades zu finden. Es ist aber mit Hilfe von Näherungsverfahren wie dem von Newton möglich, die Lösungen solcher und vieler anderer Gleichungen mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Übrigens sind unsere Wurzelberechnungen auch „nur“ Näherungsverfahren.

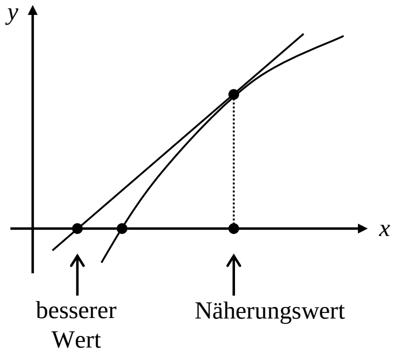
Indem man alle Bestandteile auf eine Seite bringt, kann eine Gleichung stets in die Form

$$f(x)=0$$

gebracht werden. Diese Gleichung $f(x)=0$ zu lösen, bedeutet anschaulich, die Schnittpunkte der Kurve $y=f(x)$ mit der $x$-Achse zu finden.



Mit Hilfe der *Tangenten* hat Newton ein Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen gefunden. Die folgende Skizze enthält die Grundgedanken des Newton-Verfahrens:




Das Vorgehen beim Newton-Verfahren ist folgendes:

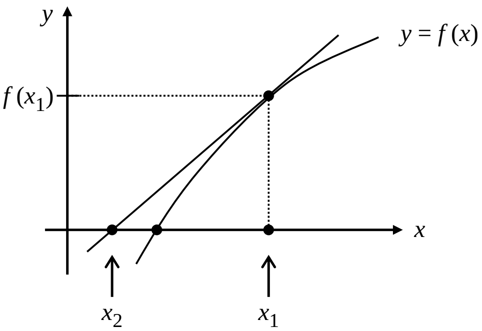
1. Ausgangspunkt ist ein Näherungswert für die Lösung.
2. Die Tangente an dieser Stelle wird als gute Näherung für die Kurve betrachtet. Man berechnet den Schnittpunkt der *Tangente* mit der $x$-Achse und erhält einen verbesserten Näherungswert für die Lösung.
3. Punkt 2 kann mit dem Verbesserten Wert wiederholt werden. Man erhält immer bessere Annäherungen.

Zunächst entwickeln wir die allgemeine Formel zur Berechnung des verbesserten Wertes. Zur Berechnung einer Lösung mit der gewünschten Genauigkeit wird diese Formel mehrfach angewendet; man spricht daher von einer *Iterationsformel*. Dieses newtonsche Iterationsverfahren werden wird in zwei Beispielen anwenden.

## Formel zur Berechnung des Verbesserten Wertes

**Gegeben**: 1) allgemeine Gleichung $f(x) = 0$
2) Näherungswert $x_1$ für eine Lösung

**Gesucht**: verbesserter Näherungswert $x_2$ .




## Lösung

### 1. Geradengleichung für die Tangente bestimmen:

Die Tangente hat die Steigung $a = f'(x_1)$ und geht durch den Punkt $(x_1; y_1) = (x_1; f(x_1))$ .

Die Gleichung der Tangente ist also (Punkt-Steigungs-Problem):

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

### 2. Schnittpunkt der Tangente mit der *x*-Achse:

Setze $y = 0$ ein und löse nach $x$ auf:

$$
\begin{aligned}
y &= f'(x_1)\cdot(x-x_1)+f(x_1)\\
0 &= f'(x_1)\cdot(x-x_1)+f(x_1)\\
-f(x_1) &= f'(x_1)\cdot(x-x_1)\\
-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= x-x_1\\
x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= x
\end{aligned}
$$

**Also:**
Aus dem Näherungswert $x_1$ für eine Lösung von $f(x)=0$ ergibt sich ein verbesserter Wert $x_2$ durch:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Mit der Verbesserungsfunktion (Iterationsfunktion)

$$\boxed{F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

gilt also:

$$\boxed{x_2 = F(x_1)}$$

**Beispiel 1**

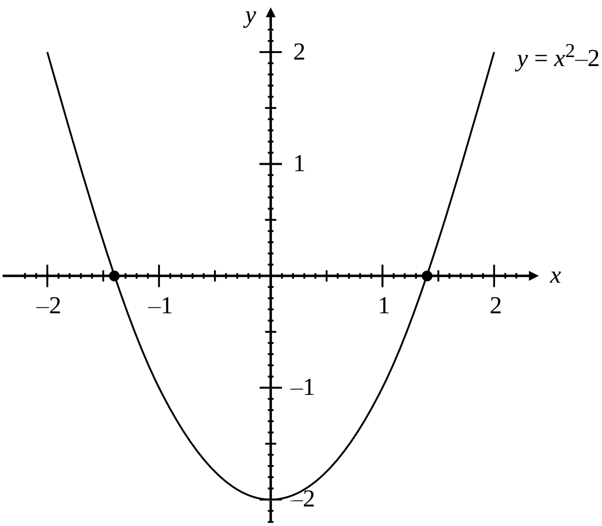
Löse die Gleichung $x^2 - 2 = 0$.

**Lösung**

*Vorbemerkungen:*

Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ sind offenbar $x = \pm\sqrt{2}$. Indem wir diese Gleichung lösen, berechnen wir die Quadratwurzel aus 2. Das Newton-Verfahren stimmt in diesem Fall mit dem Heron-Verfahren (Heron, 200 n. Chr.) überein, das im Wesentlichen den Altbabyloniern schon um 1800 v. Chr. bekannt war.

### A. Überblick durch Skizze der Kurve $y = x^2 - 2$




Die Kurve dieser quadratischen Funktion ist eine Parabel, deren Scheitelpunkt und Aussehen man auch mit einer Kurvendiskussion finden kann.

Der Zeichnung kann man entnehmen, dass die Gleichung zwei Lösungen mit den geschätzten Werten –1,5 und 1,5 besitzt.
Wir werden nur die Lösung zum Näherungswert 1,5 betrachten und bessere Werte für ihn berechnen. Die Berechnung für die andere Lösung überlassen wir dem Leser.

**B. Bestimmung der Iterationsfunktion**

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

Also:

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{x^2 - 2}{2x} \\ &= x - \frac{x^2}{2x} + \frac{2}{2x} \\ &= x - \frac{x}{2} + \frac{2}{2x} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{2}{2x} \\ F(x) &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

**C. Berechnung von verbesserten Näherungswerten**

Startwert: $x_1 = 1{,}5$

Verbesserung 1:

$$x_2 = F(x_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right) \approx 1{,}4166667$$

Verbesserung 2:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}416\ldots + \frac{2}{1{,}416\ldots}\right) \approx 1{,}4142157$$

Verbesserung 3:

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{2}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}414\ldots + \frac{2}{1{,}414\ldots}\right) \approx 1{,}4142136$$

Verbesserung 4:

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{2}{x_4}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}414\ldots + \frac{2}{1{,}414\ldots}\right) \approx 1{,}4142136$$

Es ist im letzten Schritt ***keine Verbesserung*** (bei den betrachteten acht Dezimalstellen) eingetreten.

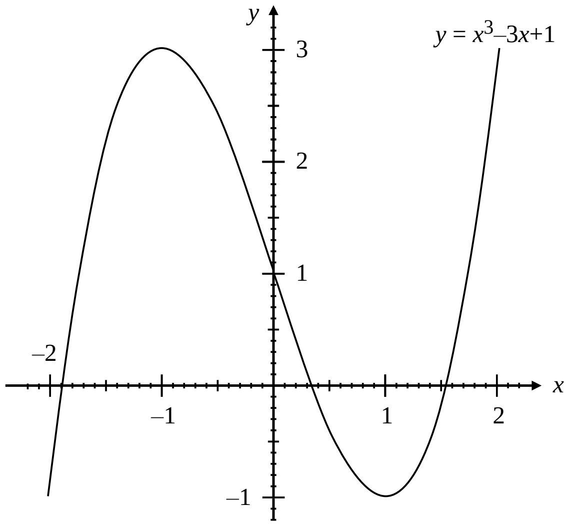
Also:
Die gesuchte Lösung ist $x = 1{,}4142136$ (mit einer Genauigkeit von acht Dezimalstellen).

**Beispiel 2**
Löse die Gleichung $x^3 - 3x + 1 = 0$.

**Lösung**

**A. Überblick durch Skizze der Kurve $y = x^3 - 3x + 1$**

Eine Kurvendiskussion zeigt, dass die Kurve folgendermaßen aussieht:




Die Gleichung hat also drei Lösungen mit den geschätzten Werten $-1{,}9$ , $0{,}3$ und $1{,}5$.
Wir werden bessere Werte nur für die Näherungslösung 1,5 berechnen. Die Berechnung für die zwei anderen Lösungen überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

**B. Bestimmung der Iterationsfunktion**

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= \quad x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3}$$

$$= \quad \frac{3x^3 - 3x}{3x^2 - 3} - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3}$$

$$F(x) \quad = \quad \frac{2x^3 + 1}{3x^2 - 3}$$

## C. Berechnung von verbesserten Näherungswerten

Startwert: $x_1 = 1{,}5$

Verbesserung 1:

$$x_2 = F(x_1) = \frac{2{x_1}^3 - 1}{3{x_1}^2 - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}5^3 - 1}{3 \cdot 1{,}5^2 - 3} \approx 1{,}5333333$$

Verbesserung 2:

$$x_3 = F(x_2) = \frac{2{x_2}^3 - 1}{3{x_2}^2 - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}533\ldots^3 - 1}{3 \cdot 1{,}533\ldots^2 - 3} \approx 1{,}5320906$$

Verbesserung 3:

$$x_4 = F(x_3) = \frac{2{x_3}^3 - 1}{3{x_3}^2 - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}532\ldots^3 - 1}{3 \cdot 1{,}532\ldots^2 - 3} \approx 1{,}5320889$$

Verbesserung 4:

$$x_5 = F(x_4) = \frac{2{x_4}^3 - 1}{3{x_4}^2 - 3} = \frac{2 \cdot 1{,}532\ldots^3 - 1}{3 \cdot 1{,}532\ldots^2 - 3} \approx 1{,}5320889$$

Es ist im letzten Schritt ***keine Verbesserung*** (bei den betrachteten acht Dezimalstellen) eingetreten.

Also:
Die bei $1{,}5$ liegende Lösung der Gleichung $x^3 - 3x + 1 = 0$ ist $x = 1{,}5320889$ (mit einer Genauigkeit von acht Dezimalstellen).

# 4.6 Reihen

Wir betrachten folgende Themen:

1. Geometrische Reihen
2. Die Arkustangensreihe
3. Logarithmusreihen
4. Die Exponentialreihe
5. Sinus- und Kosinusreihe
6. Berechnung von $\pi$

**1. Geometrische Reihen**

Schriftliche Divisionen gehen nicht immer glatt auf. So ist zum Beispiel

$$1 : 3 \; = \; 0{,}333...$$

Das *exakte Divisionsergebnis* enthält *unendlich viele* Dreien nach dem Komma. Die Schreibweise "0,333 ..." bedeutet aufgeschlüsselt nichts anderes als

$$0{,}333\ldots \;=\; \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots$$

Dies ist eine Summe von unendlich vielen Zahlen (die immer kleiner werden). Der Leser ist also sicherlich schon als Kind mit der Summe unendlich vieler Zahlen umgegangen, vielleicht ohne es zu wissen.
Der Ausdruck

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots$$

ist ein Beispiel für eine *(unendliche) geometrische Reihe*. "Reihe" bedeutet hier einfach "Summe". Das Adjektiv "geometrisch" bezeichnet das besondere Bildungsgesetz der Summanden. Aus jedem Summenden ergibt sich der nachfolgende Summand durch Multiplikation mit einer festen Zahl, im Beispiel ist dieser Faktor $\frac{1}{10}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \frac{3}{10} \arrow[rr, bend left, "\cdot\frac{1}{10}"] & + & \frac{3}{100} \arrow[rr, bend left, "\cdot\frac{1}{10}"] & + & \frac{3}{1000} \arrow[rr, bend left, "\cdot\frac{1}{10}"] & + & \frac{3}{10.000} & + \ldots \end{tikzcd}$$

Man bezeichnet $\frac{1}{10}$ auch als den *Quotienten* der Reihe, da er als Quotient aufeinanderfolgender Summanden aufgefasst werden kann.

Allgemein sieht eine geometrische Reihe so aus:

$$s \;=\; a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots$$

Hierbei ist $a$ der erste Summand und $q$ der Quotient der Reihe.

Wir berechnen nun den Wert $s$ der allgemeinen geometrischen Reihe. Dazu multiplizieren wir die obige Gleichung mit $q$ und subtrahieren diese Gleichung von der ursprünglichen. Es heben sich dabei unendliche viele Summanden weg und man bekommt einen einfachen Ausdruck für $s$:

$$\begin{aligned}
s &= a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots \\
sq &= \phantom{a +{}} aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots \\
s - sq &= a \\
s(1-q) &= a \\
s &= \frac{a}{1-q}
\end{aligned}$$

Also:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \qquad (-1 < q < 1)$$

Man beachte dabei, dass die Reihe kein sinnvolles Ergebnis liefert, wenn $q \geq 1$ oder $q \leq -1$ ist. Zwei Beispiele dazu:

Für $a = 1$ und $q = 1$ ergibt sich die Reihe:

$$1+1+1+1+1+\ldots$$

Die Summe wächst unbegrenzt und ergibt keine Zahl.

Für $a = 1$ und $q = -1$ ergibt sich die Reihe:

$$1-1+1-1+1-1+-\ldots$$

Die Summe springt zwischen 0 und 1:

$$\begin{aligned}
&1 - 1 = 0 \\
&1 - 1 + 1 = 1 \\
&1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\
&1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1
\end{aligned}$$

und so weiter.

Liest man die Formel für den Wert der geometrischen Reihe rückwärts, so ergibt sich:

$$\frac{a}{1-q} \;=\; a \;+\; aq \;+\; aq^2 \;+\; aq^3 \;+\dots \qquad (-1<q<1)$$

Diese bemerkenswerte Formel drückt die links stehende *Division* durch bloße Additionen und Multiplikationen aus.

## 2. Die Arkustangensreihe

Die Ableitung der Arkustangensfunktion

$$(\arctan x)' \;=\; \frac{1}{1+x^2}$$

lässt sich als geometrische Reihe mit $a=1$ und $q=-x^2$ auffassen:

$$\begin{aligned}(\arctan x)' \;&=\; \frac{1}{1-(-x^2)}\\ &=\; 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+-\dots\end{aligned}$$

Diese *Potenzreihe* kann ihrerseits auch als Ableitung einer Potenzreihe betrachtet werden:

$$\left(c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\dots\right)' \;=\; 1-x^2+x^4-x^6+-\dots$$

Daher:

$$\arctan x \;=\; c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\dots$$

Da $\arctan 0 = 0$, muss $c = 0$ sein. Wir erhalten so die Arkustangensreihe:

$$\arctan x \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots,$$

die für $-1 \leq x \leq 1$ gültig ist.

Diese Reihe kann zur Berechnung von $\arctan x$ benutzt werden.
Für $x = 1$, ergibt sich (da $\tan 45° = \tan \frac{\pi}{4} = 1$) eine Reihendarstellung für $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$$

Setzt man näherungsweise

$$\frac{\pi}{4} \;\approx\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11},$$

so ist die Abweichung $R$ (Restglied) vom wirklichen Wert:

$$\begin{aligned} R \;&=\; \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + - \ldots \\ &=\; \frac{1}{13} + \left( -\frac{1}{15} + \frac{1}{17} \right) + \left( -\frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right) + \ldots \\ &\leq\; \frac{1}{13} \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, weil die Klammern negativ sind.

Wir erhalten nun folgende konkrete Ergebnisse zu $\pi$:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+R \\ &= 0{,}74401154\ldots+R \\ \pi &= 2{,}97604617\ldots+4R\end{aligned}$$

Hierbei ist die Abweichung $4R \le \frac{4}{13} = 0{,}30769230 \ \ldots$

Da $R$ positiv ist, muss $\pi$ also zwischen

2,976... und 2,976...+ 0,307... = 3,283...

liegen. Nehmen wir den Mittelwert, so bekommen wir:

$$\pi \approx 3{,}13$$

mit einer maximalen Abweichung von etwa 0,15.

## 3. Logarithmusreihen

Die Ableitung der Funktion ln(1–$x$) ist nach der Kettenregel

$$(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$$

und lässt sich als geometrische Reihe mit $a=-1$ und $q=x$ auffassen:

$$(\ln(1-x))' = -1-x-x^2-x^3-x^4-\ldots$$

Diese *Potenzreihe* kann ihrerseits auch als Ableitung einer Potenzreihe betrachtet werden:

$$\left(c - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\right)' = -1 - x - x^2 - x^3 - \ldots$$

Daher:

$$\ln(1-x) = c - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Da $\ln(1-0) = 0$, muss $c = 0$ sein. Wir erhalten so die Logarithmusreihe:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

die für $-1 \le x < 1$ gültig ist.

Diese Reihe kann zur Berechnung von $\ln(1-x)$ benutzt werden.

Ersetzt man in der Reihe $x$ durch $-x$, so erhält man:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \qquad (-1 < x \le 1).$$

Aus beiden Reihen kann man die praktischere Reihe

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \qquad (-1 < x < 1)$$

gewinnen. Nimmt man beispielsweise $x = \frac{1}{3}$, so ergibt sich mit Hilfe der ersten beiden Reihenglieder $\ln 2 \approx 0{,}691$ .

## 4. Die Exponentialreihe

Wir haben gesehen, dass die Division, der Arkustangens und der Logarithmus durch Potenzreihen ausgedrückt werden können. Das legt nahe, dass auch die Exponentialfunktion als Potenzreihe geschrieben werden kann:

$$e^x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

Die Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ müssen wir nun noch berechnen.

Zur Berechnung von $c_0$ setzen wir oben $x = 0$ ein:

$$\begin{aligned} e^0 &= c_0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots \\ e^0 &= c_0 \\ c_0 &= 1 \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $c_1$ bilden wir die Ableitung und setzen dann $x = 0$ ein:

$$\begin{aligned} (e^x)' &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots)' \\ e^x &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots \\ e^0 &= c_1 \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $c_2$ bilden wir nochmals die Ableitung und setzen dann $x = 0$ ein:

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= (c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots)' \\
e^x &= 2c_2 + 2{\cdot}3{\cdot}c_3x + 3{\cdot}4{\cdot}c_4x^2 + \ldots \\
e^0 &= 2c_2 \\
c_2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $c_3$ leiten wir abermals ab und setzen dann wieder $x = 0$ ein:

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= (2c_2 + 2{\cdot}3{\cdot}c_3x + 3{\cdot}4{\cdot}c_4x^2 + \ldots)' \\
e^x &= 2{\cdot}3{\cdot}c_3 + 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}c_4x + \ldots \\
e^0 &= 2{\cdot}3{\cdot}c_3 \\
c_3 &= \frac{1}{2{\cdot}3}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $c_4$ bilden wir nochmals die Ableitung und setzen wieder $x = 0$ ein:

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= (2{\cdot}3{\cdot}c_3 + 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}c_4x + \ldots)' \\
e^x &= 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}c_4 + \ldots \\
e^0 &= 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}c_4 \\
c_4 &= \frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4}
\end{aligned}$$

Die Fortsetzung des Verfahrens liefert offenbar das allgemeine Ergebnis:

$$c_n \;=\; \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}\,.$$

Die Zahl

$$n! \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

wird als „$n$ Fakultät“ bezeichnet. Man definiert übrigens $0! = 1$ und $1! = 1$.

Mit dieser Abkürzung lautet die Exponentialreihe:

$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Für $x = 1$, ergibt sich eine Reihendarstellung für $e$:

$$e \;=\; 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Setzt man näherungsweise

$$e \;\approx\; 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\,,$$

so ist die Abweichung $R$ (Restglied) vom wirklichen Wert:

$$R \;=\; \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \ldots$$

Durch Vergrößerung kann diese Reihe in eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{1}{7}$ überführt werden. So gewinnen wir folgende Abschätzung für das Restglied $R$:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \ldots \\
&< \frac{1}{6!} + \frac{1}{6!\cdot 7} + \frac{1}{6!\cdot 7\cdot 7} + \frac{1}{6!\cdot 7\cdot 7\cdot 7} + \ldots \\
&= \frac{1}{6!}\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 7\cdot 7} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}} \\
&= \frac{1}{6!}\cdot\frac{7}{6} = 0{,}0016\ldots
\end{aligned}$$

Wir erhalten nun folgendes konkrete Ergebnis zu $e$:

$$\begin{aligned}
e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \\
e &\approx 2{,}71666\ldots
\end{aligned}$$

Hierbei ist die Abweichung $R \le 0{,}0016\ldots$

## 5. Die Reihen von Maclaurin und Taylor

Die Methode zur Bestimmung der Exponentialreihe kann auf eine allgemeine Funktion übertragen werden. Wir schreiben $f(x)$ als Potenzreihe:

$$f(x) \;=\; c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

Setzen wir $x=0$ ein so erhalten wir $c_0 = f(0)$. Leiten wir immer wieder ab und setzen $x=0$ ein, so erhalten wir alle Koeffizienten:

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ldots$$

Allgemein formuliert: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Die Reihendarstellung von $f(x)$ lautet also:

$$\boxed{f(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots}$$

Sie ist als *Maclaurin-Reihe* bekannt. Damit die Reihe Ergebnisse liefert, muss der $x$ oft auf kleine Werte (d. h. nahe bei 0) eingeschränkt werden. In diesem Sinne beschreibt die Maclaurin-Reihe die Funktion in einer **Umgebung von 0**.

Um die Funktion in der Umgebung einer anderen Stelle $a$ zu beschreiben, modifizieren wir etwas und schreiben:

$$f(a+x) \;=\; c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

Wenn $x$ klein ist, liefert die Reihe Ergebnisse (sie *konvergiert*, sagt man) und außerdem ist $a+x$ nahe bei $a$.

Setzen wir $x = 0$ ein, so erhalten wir $c_0 = f(a)$. Leiten wir fortgesetzt ab und setzen $x = 0$, bekommen wir alle Koeffizienten:

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots$$

Allgemein gesagt: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Dies setzen wir in den obigen Ansatz ein und erhalten:

$$\boxed{f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \ldots}$$

Dies ist die Esta es la *Taylor-Reihe*. Sie beschreibt die Funktion in der **Umgebung eines beliebigen Punktes *a***.

## 6. Sinus- und Kosinusreihe

Wir wenden die Maclaurin-Reihe die Sinus- und Kosinusfunktion an.

Für den Sinus haben wir:

$f(x) = \sin x$, also $f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$, also $f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$, also $f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$, also $f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$, also $f^{(4)}(0) = 0$
usw.

Die vierte Ableitung ist wieder die Sinusfunktion; der Viererblock wiederholt sich also immer wieder. Die Sinusreihe lautet also:

$$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

Analog gelangt man zur Kosinusreihe:

$$\cos x \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Man kann diese Reihen zur Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten benutzen. Die Abschätzung des Restgliedes kann wie bei der Arkustangensreihe gemacht werden. Das wechselnde (alternierende) Vorzeichen in diesen Reihen bewirkt, dass das Restglied betraglich höchstens so groß ist wie das erste ausgelassene Reihenglied.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der, dass die Reihenentwicklungen nur die Grundrechenarten enthalten und so auch in erweiterten Zahlenbereiche (wie den der komplexen Zahlen, s. Anhang 3) eingesetzt werden können. Für die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ gilt $i^2 = -1$. Mit Hilfe der Exponential-, Sinus- und Kosinusreihe kann man die berühmte eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

einfach herleiten, s. Anhang 4. Aus Sicht der komplexen Zahlen sind die Exponentialfunktion sowie Sinus- und Kosinusfunktion eng miteinander verbunden.

## 7. Die Berechnung von $\pi$

Der Sinus von $30° = \pi/6$ ist 0,5. Dies können wir benutzen, um $\pi/6$ als Lösung der Gleichung

$$\sin x \;=\; 0{,}5$$

mit Hilfe des Newton-Verfahrens zu berechnen. Die dabei erforderlichen Sinus- und Kosinuswerte werden wir durch die entsprechenden Reihen bestimmen.

Die zu lösende Gleichung ist

$$f(x) \;=\; \sin x - 0{,}5 \;=\; 0$$

Die zugehörige Iterationsfunktion ist

$$F(x) \;=\; x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$F(x) \;=\; x - \frac{\sin x - 0{,}5}{\cos x}$$

Wir berechnen $\sin x$ und $\cos x$ mit Hilfe der Näherungsformeln:

$$\sin x \;\approx\; x \;-\; \frac{x^3}{3!} \;+\; \frac{x^5}{5!} \;-\; \frac{x^7}{7!} \;+\; \frac{x^9}{9!}$$

$$\cos x \;\approx\; 1 \;-\; \frac{x^2}{2!} \;-\; \frac{x^4}{4!} \;+\; \frac{x^6}{6!} \;-\; \frac{x^8}{8!} \;+\; \frac{x^{10}}{10!}$$

Die bei unseren Berechnungen auftretenden Werte von $x$ sind alle positiv und kleiner als 0,55. Daher ergeben sich folgende Restgliedabschätzungen:

Für die Sinus-Näherung:

$$|R| \leq \frac{x^{11}}{11!} \leq \frac{0{,}55^{11}}{11!} = 0{,}000.000.000.0349...$$

und für die Kosinus-Näherung:

$$|R| \leq \frac{x^{12}}{12!} \leq \frac{0{,}55^{12}}{12!} = 0{,}000.000.000.00159...$$

Da $\pi/6 \approx 0{,}5$, nehmen wir den Startwert $x_1 = 0{,}5$ und erhalten (mit 10 Nachkommastellen):

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}5 \\
x_2 &= F(0{,}5) = 0{,}5234444738 \\
x_3 &= F(0{,}5234444738) = 0{,}5235987687 \\
x_4 &= F(0{,}5235987687) = 0{,}5235987756 \\
x_5 &= F(0{,}5235987756) = 0{,}5235987756
\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}523.598.7756$$

und daher

$$\pi \approx 3{,}1415926536\,.$$

## 8. Abschätzungen des Restes

Die Abschätzungen der bisher betrachteten Reihen fassen wir hier zusammen und verallgemeinern sie. Im Wesentlichen handelt sich um die folgenden zwei Fälle.

**Fall 1.**
Die Methode, die bei der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

benutzt worden ist.

Die Idee besteht in der **Vergrößerung** des Restes, um eine **geometrische Reihe** zu bekommen. Dies funktioniert auch bei geometrischen und Logarithmus-Reihen.

Wir betrachten zum Beispiel die Exponentialreihe. Bei der Näherung

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Ist der Rest:

$$R = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Die Summanden hängen wie folgt zusammen:

$$\frac{x^4}{4!} \xrightarrow{\cdot \frac{x}{5}} \frac{x^5}{5!} \xrightarrow{\cdot \frac{x}{6}} \frac{x^6}{6!} \xrightarrow{\cdot \frac{x}{7}} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Die Faktoren werden immer kleiner:

$$\frac{x}{5} \geq \frac{x}{6} \geq \frac{x}{7} \geq \ldots$$

Wenn man nun alle Faktoren durch den größten ersetzt, also durch $\frac{x}{5}$, wächst der Rest und wird zu einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{x}{5}$:

$$\begin{aligned} R &= \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &\le \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{x}{5} + \frac{x^4}{4!} \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \frac{x^4}{4!} \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{5}} \end{aligned}$$

Daher haben die folgende Abschätzung für den Rest:

$$R \le \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{5}}$$

**Fall 2.**
Die Methode, die bei den Reihen

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots$$

angewendet wurde. Die Terme haben wechselnde Vorzeichen, ihre Beträge nehmen ab und gehen gegen 0:

$$s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \dots$$
$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$$
$$a_n \to 0$$

Dann ist der Wert (*Betrag* oder *Absolutwert*, der positiv genommene Wert) des Restes kleiner als der Betrag des ersten weggelassenen Terms. Beispielsweise:

$$s \approx a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$
$$R = a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + - \dots \leq a_5$$

denn

$$\begin{aligned} R &= a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + - \dots \\ &= a_5 + \underbrace{(-a_6 + a_7)}_{\text{negativ}} + \underbrace{(-a_8 + a_9)}_{\text{negativ}} + - \dots \\ &\leq a_5 \end{aligned}$$

Der Fall 2 geht auf Leibniz zurück.

# Aufgaben

## Lokale Extrema und Wendepunkte

1. Finde die lokalen Extrema und Wendepunkte der nachfolgenden Funktionen. Skizziere die Funktionen.
a) $f(x) = x^2 - 1$
b) $g(x) = -x^2 + 1$

2. Finde die lokalen Extrema und Wendepunkte der nachfolgenden Funktionen. Berechne ferner die Achsenschnittpunkte und skizziere die Funktion.
a) $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$
b) $g(x) = -0{,}25x^2 + x$

3. Finde die lokalen Extrema und Wendepunkte der Funktion $f(x) = x^3 - 6x$. Berechne außerdem die Achsenschnittpunkte und skizziere die Funktion.

4. Finde die lokalen Extrema und Wendepunkte der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$. Berechne auch die Achsenschnittpunkte und skizziere die Funktion.

5. Finde die lokalen Extrema und Wendepunkte der Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2$. Berechne außerdem die Achsenschnittpunkte und skizziere die Funktion.

## Extremwertaufgaben

1. Aus einem rechteckigen Pappstück ($a$ = 30 cm, $b$ = 20 cm) soll eine Schachtel mit maximalem Volumen

hergestellt werden.

2. Bestimme die minimalen und maximalen Werte von $f(x)$ in dem angegebenen Bereichen („abgeschlossenen Intervallen“). Wo werden sie angenommen?

a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2;\quad 2 \le x \le 6$

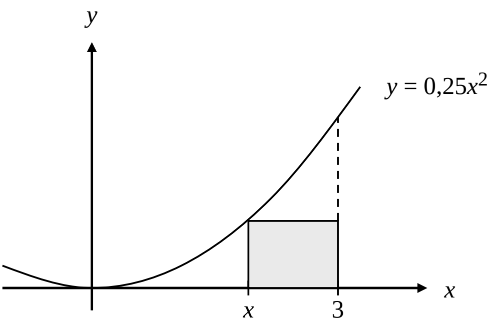
b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2;\quad 1 \le x \le 3$

c) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 1;\quad -1 \le x \le 2$

d) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 1;\quad 1 \le x \le 3$

e) $f(x) = x + 2\cos x;\quad 0 \le x \le \pi$

3. Wie muss $x$ gewählt werden, damit das skizzierte Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat?




4. Dem Abschnitt der Parabel $y = 6 - 0{,}25x^2$, der oberhalb der $x$-Achse liegt, soll ein Rechteck a) größten Umfanges, b) größten Inhalts einbeschrieben werden. Die Grundseite des Rechtecks soll dabei auf der $x$-Achse liegen.

5. Welcher Punkt auf der Geraden $y = -x + 2$ hat den kleinsten Abstand zum Punkt $(2{,}5;\ 4)$?

6. Zerlege die Zahl 24 so in zwei Summanden, dass ihr Produkt möglichst groß wird.

7. Welches Rechteck hat unter allen Rechtecken mit einem Umfang von 72 cm die größte Fläche? Berechne seine Kantenlängen.

8. Zerlege die Zahl 24 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird.

## Newton-Verfahren

1. Löse die Gleichung: $x^3 = -x + 1$.

2. Löse die Gleichung: $x = \cos x$

3. Löse die Gleichung: $2 + \cos x = e^x$.

4. Finde alle Lösungen der Gleichung $\sin x = \cos x$ im Bereich zwischen $0$ und $2\pi$.

## Reihen

1. Berechne näherungsweise 1:0,98 und 1:1,06 mit Hilfe der geometrischen Reihen:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ und}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots$$

2. Für kleine Werte von $x$ und $y$ ist das Produkt $xy$ noch kleiner und es ergibt sich die Näherungsformel:

$$(1+x)\cdot(1+y)\approx 1+x+y\,.$$

Folgere daraus:

$$(1+x)^2 \approx 1+2x \quad \text{und} \quad \sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}\,.$$

Berechne näherungsweise $1{,}07^2$ und $\sqrt{1{,}03}$.

3. Berechne $\ln 1{,}5$ bis auf vier Nachkommastellen.

4. Berechne $\mathrm{e}^{0,2}$ bis auf vier Nachkommastellen.

5. Berechne $\sin 0{,}1$ und $\cos 0{,}1$ bis auf vier Nachkommastellen. Wie lautet der Winkel $0{,}1$ in Grad?

6. Der Sinus hyperbolicus sinh und der Kosinus hyperbolicus cosh sind definiert durch:

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,.$$

a) Finde Reihenentwicklungen für $\sinh x$ und $\cosh x$.
b) Rechne nach, dass $(\cosh x)^2-(\sinh x)^2 = 1$.

# Lösungen

## Die Ableitung

1.
a) $f'(x) = 3$, $y = 3x + 1$
b) $f'(x) = 0$, $y = c$
c) $f'(x) = 3x^2$, $y = 3x - 2$

2. $y = 4x - 4$, $x = 1$

3.
a) $f'(x) = 8x + 5$
b) $8x + 5 = 0$ (waagerechte Tangente),
Scheitel: (–0,625; 1,4375 ).

4. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $y = -4x + 4$, $y = -x + 2$, $y = -0{,}25x + 1$

5.
a) $f'(x) = x - 2$
b) $y = 2x - 7$
c) $y = 2{,}25x - 8$

6.
a) $(\sqrt{2}\,; 0)$, $(-\sqrt{2}\,; 0)$
b) $f'(x) = 2x$
c) $y = 2x - 3$
d) $x = 1{,}5$

7.

a) $(\sqrt{3}\,; 0), (-\sqrt{3}\,; 0)$

b) $f'(x) = 2x$

c) $y = 2x - 4$

d) $x = 2$

8. a) (–3; 3) b) (–2; –1) c) (3; –1,5)

9. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $y = -0{,}25x + 0{,}75$

10. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y = 0{,}25x + 1$

## Grundlegende Ableitungen

1.

a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = 4x^3$

c) $f'(x) = 25x^{24}$

d) $f'(x) = 5x^4$

e) $f'(x) = 13x^{12}$

2.

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ $\quad \left[= -\dfrac{1}{2(\sqrt{x})^3} = -\dfrac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right]$

3.

a) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $f'(x) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{13}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^{15}}}$ oder $f'(x) = -6{,}5x^{-7{,}5}$

d) $f'(x) = \dfrac{83}{30}\cdot x\cdot\sqrt[30]{x^{23}}$ oder $f'(x) = \dfrac{83}{30}\cdot\sqrt[30]{x^{53}}$

## Ableitungsregeln

### Summen- und Faktorregel

1.

a) $f'(x) = 4$

b) $f'(x) = -16x + 5$

c) $f'(x) = 56x^7 - 15x^4 + 6x^2 - 5$

d) $f'(x) = -0{,}5 + 7x - 18x^2$

e) $f'(x) = 12x^2 + 14x - 3$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$

g) $f'(x) = 1 + x + x^2$

h) $f'(x) = 51x^{16} - 36x^8 + 24x^2$

i) $f'(x) = 3\pi x^2 - 2 - \dfrac{10}{x^3}$

j) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$

2.

a) $f'(x) = 6x + 5$

b) $f'(x) = 35x^4 + 24x^3 + 24x^2 - 6x + 5$

c) $f'(x) = 18x + 30$

d) $f'(x) = 24x^2 + \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 3x^2 - 3$

## Produktregel

1.

a) $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

b) $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$

c) $f'(x) = (1+x)\,e^x$

d) $f'(x) = (3x^2 + x^3) \cdot e^x$

e) $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

2.

a) $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$

b) $f'(x) = 5x^4\cos(x) - x^5\sin(x)$

c) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

d) $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

e) $f'(x) = 2e^{2x}$

3.

a) $f'(x) = 2e^{2x}$

b) $f'(x) = 2e^{x}(\sin x + \cos x)$

c) $f'(x) = (x^2+5x+7)\cos x - (x^2+x+1)\sin x$

d) $f'(x) = (12+9x+35e^{x})\sin x +$
$(-9+12x+5e^{x})\cos x$

e) $f'(x) = 4(x^2-1)\cos x \cdot \sin x - 2x(1+2\cos^2 x)$

4.

a) $f'(x) = e^{x}((2x+x^2)\sin x + x^2\cos x)$

b) $f'(x) = e^{x}((1+x)\cos x - x\sin x)$

c) $f'(x) = e^{x}((2x+x^2)\sin x + x^2\cos x) + 3x^2\cos x -$
$x^3\sin x$

d) $f'(x) = 4(\sin x)^3\cos x$

e) $f'(x) = 10x(1+x^2)^4$

f) $f'(x) = -10(1+\cos x)^9\sin x$

## Quotientenregel

1.

a) $f'(x) = -\dfrac{2}{5x^2}$

b) $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

c) $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-2x - 4x^3 + 2x^5}{(1 + x^4)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $f'(x) = -\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$

## Kettenregel

1.

a) $f'(x) = 3\cos(3x+5)$

b) $f'(x) = -7\sin(7x+4)$

c) $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$

d) $f'(x) = -\ e^x \sin\ e^x$

e) $f'(x) = 300(3x+5)^{99}$

f) $f'(x) = -(35x^4 + 24x^2 + 5) \sin(7x^5 + 8x^3 + 5x + 13)$

g) $f'(x) = 4e^{4x}$

h) $f'(x) = e^x\ \cos\ e^x$

i) $f'(x) = 13 \cos x \sin^{12} x$

j) $f'(x) = -e^{\cos x} \sin x$

k) $f'(x) = -e^{-x}$

l) $f'(x) = -\dfrac{x}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3}$

2.

a) $f'(x) = e^{4x}\ (\ 4\cos(7x+3) - 7\sin(7x+3)\ )$

b) $f'(x) = -18x \sin(x^2+1) \cos^8(x^2+1)$

c) $f'(x) = 60x^2 \cos(x^3+1) \sin^{19}(x^3+1)$

d) $f'(x) = e^{x\sin(2x)}(\sin(2x) + 2x\cos(2x))$

e) $f'(x) = 280x\,(7x^2+3)^{19}$

f) $f'(x) = 90(3x+5)^{29}$

g) $f'(x) = \cos(x^2e^{3x}) - (2x^2+3x^3)\,e^{3x}\sin(x^2e^{3x})$

h) $f'(x) = -210\,(2-7x)^{29}$

## Gemischte Ableitungsregeln

1.

a) $f'(x) = (\ln 2)\,2^x$

b) $f'(x) = (\ln a)\,a^x$

c) $f'(x) = (1+\ln x)\,x^x$

d) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

e) $f'(x) = -\tan x$

f) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

g) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

h) $f'(x) = \ln x$

i) $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

j) $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x\ \cos x}$

# Anwendungen

## Lokale Extrema und Wendepunkte

1.

a) Kein lokales Ma$x$imum, lokales Minimum: (0; –1), kein Wendepunkt

b) Lokales Ma$x$imum (0; 1), lokales Minimum, kein Wendepunkt

2.

a) Kein lokales Ma$x$imum, lokales Minimum: (–1; –2), kein Wendepunkt; Achsenschnitte: (1; 0), (–3; 0) und (0; –1,5)

b) Lokales Ma$x$imum (2; 1), kein lokales Minimum, kein Wendepunkt; Achsenschnitte: (0; 0), (4; 0)

3.

Lokales Ma$x$imum: (–1,41; 5,66), lok. Mini. (1,41; –5,66),
Wendepunkt: (0; 0),
Achsenschnitte: (0; 0), (2,45; 0), und (–2,45; 0)

4.

Lokales Ma$x$imum: (–0,67; 0,15) , lokales Minimum: (0; 0),
Wendepunkt: (–0,33; 0,07),
Achsenschnitte: (0; 0), (–1; 0)

5.

Lokales Ma$x$imum: (0; 0),
lokale Minima: (–1,22;–2,25) und (1,22;–2,25),
Wendepunkte: (0,71; –1,25), (–0,71; –1,25),
Achsenschnitte: (0; 0), (1,73; 0), (–1,73; 0)

## Extremwertaufgaben

1. Höhe: 3,92 cm; Volumen: 1056,31 $cm^3$

2.
a) Min.: $f(2) = -8$, Max.: $f(6) = 216$
b) Min.: $f(2) = -8$, Max.: $f(3) = 0$
c) Min.: $f(-1) = -25$, Max.: $f(2) = 29$
d) Min.: $f(0{,}5) = 2$, Max.: $f(3) = 127$
e) Min.: $f(0) = 2$, Max.: $f(\pi/6) \approx 2{,}25565$

3. x = 2, $f(x) = 0{,}25x^2(3-x)$

4.
a) Grundseite: 8, Höhe: 2, $f(x) = 2\left[(6-0{,}25x^2)+2x\right]$
b) Grundseite: 5,6569, Höhe: 4, $f(x) = (6-0{,}25x^2)\cdot 2x$

5. Punkt: (0,25; 1,75), $f(x) = (x-2{,}5)^2 + (-x+2-4)^2$

6. 12+12 = 24, $f(x) = x\cdot(24-x)$

7. Quadrat mit $a$ = 18 cm, $f(x) = \frac{72-2x}{2}\cdot x$

8. 12+12 = 24, $f(x) = x^2 + (24-x)^2$

## Newton-Verfahren

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|
| 1,00000000000 | 1,00000000000 | 1,00000000000 | 1,00000000000 |
| 0,75000000000 | 0,75036386784 | 0,95000228052 | 0,78204190154 |
| 0,68604651163 | 0,73911289091 | 0,94881541247 | 0,78539817600 |
| 0,68233958260 | 0,73908513339 | 0,94881475558 | 0,78539816340 |
| 0,68232780395 | 0,73908513322 | **0,94881475558** | **0,78539816340** |
| 0,68232780383 | **0,73908513322** | | |
| **0,68232780383** | | | 3,00000000000 |
| | | | 4,33248811798 |
| | | | 3,90319977158 |
| | | | 3,92699530669 |
| | | | 3,92699081699 |
| | | | **3,92699081699** |

## Reihen

1. $1:0,98 = \dfrac{1}{1-0,02} \approx 1+0,02 = 1,02$

   $1:1,06 = \dfrac{1}{1+0,06} \approx 1-0,06 = 0,94$

2. $1,07^2 = (1+0,07)^2 \approx 1+2\cdot 0,07 = 1,14$

   $\sqrt{1,03} = \sqrt{1+0,03} \approx 1+\dfrac{0,03}{2} = 1,015$

3. $\ln 1,5 = \ln \dfrac{1+0,2}{1-0,2} \approx 2(x + x^3/3 + x^5/5) \approx 0,4055$

   Hierbei ist 0,2 die Lösung von $\dfrac{1+x}{1-x} = 1,5$.

4. $e^{0,2} \approx 1 + 0,2 + (0,2)^2/2 + (0,2)^3/6 + (0,2)^4/24$
   $e^{0,2} \approx 1,2214$

5. $\sin 0{,}1 \approx 0{,}1 - (0{,}1)^3/6 \approx 0{,}09983$
   $\cos 0{,}1 \approx 1 - (0{,}1)^2/2 \approx 0{,}9950$
   $0{,}1 \approx 5{,}7°$.

6. Wie die Sinus- bzw. Kosinusreihe, jedoch nur positive Vorzeichen:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

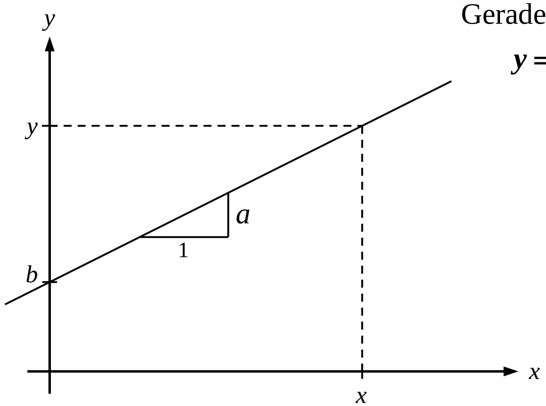
**Hinweis**: Ergebnisse, die nicht glatt aufgehen, sind in der Regel *gerundet* angegeben.

# Anhang 1: Geraden

Wir fassen hier die für die Differentialrechnung wichtigsten Tatsachen über Geraden zusammen.

## 1. Die allgemeine Geradengleichung

Die Geradengleichung liefert die $y$-Koordinate eines beliebigen Punktes auf der Geraden, wenn die $x$-Koordinate gegeben ist.




Geradengleichung:

$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

Hierbei haben $a$ (Vorzahl von $x$) und $b$ (Konstante ohne $x$) die folgenden geometrischen Bedeutungen :

$a$ = ***Steigung*** der Geraden
(1 Schritt nach rechts und $a$ nach oben, bzw. nach unten, wenn $a$ negativ ist.)

$b$ = Schnittpunkt mit der $y$-Achse

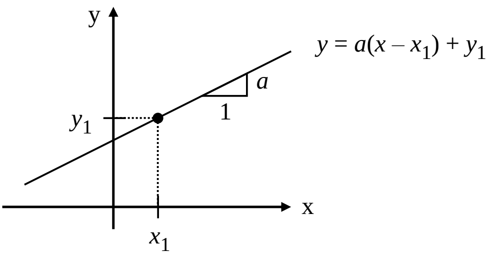
## 2. Die Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung

Die Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung ist die Antwort auf das Punkt-Steigungs-Problem:

Gegeben: ein Punkt $(x_1; y_1)$ auf einer Geraden, die Steigung $a$ der Geraden

Gesucht: Geradengleichung

Lösung:




Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung:

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

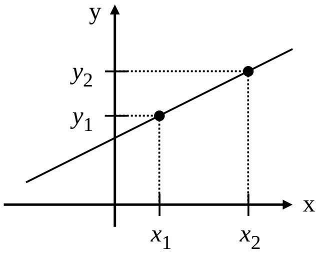
## 3. Die Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung

Die Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung ist die Antwort auf das Zwei-Punkte-Problem:

Gegeben: zwei Punkte $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ auf einer Geraden

Gesucht: Geradengleichung

Lösung:




Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Hierbei ist die Steigung der Geraden gegeben durch:

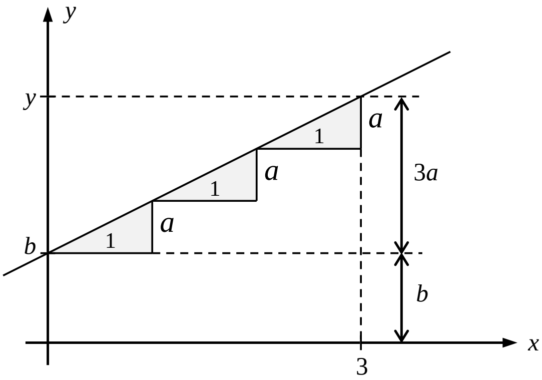
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## 4. Herleitung der allgemeinen Geradengleichung

Wir betrachten zwei Herleitungen. Die erste ist intuitiv und anschaulich, aber nicht ganz allgemein. Die zweite ist geometrisch und allgemein, sie beruht auf ähnlichen Dreiecken (gleiche Winkel).

### Erste Herleitung

Die Überlegungen setzen voraus, dass $x$ eine natürliche Zahl ist. Zum besseren Verständnis wählen wir $x = 3$. Nun müssen wir das zugehörige $y$ finden, also die Höhe der Geraden an der Stelle $x = 3$.




Im Bild sieht man, dass

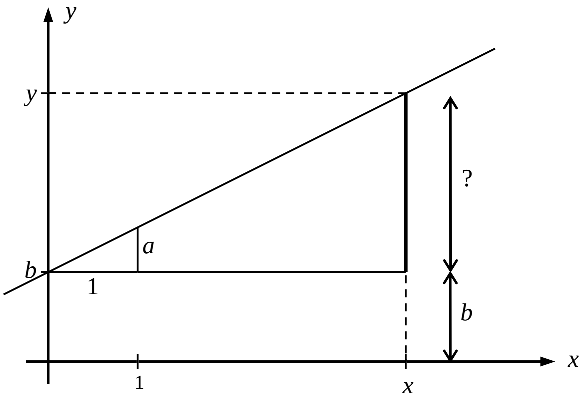
$$\begin{aligned} y &= \text{Höhe der Geraden} \\ &= \text{3-mal die Höhe der kleinen Dreiecke} + b \\ &= 3a + b \end{aligned}$$

Dies erklärt die Geradengleichung, wenn $x$ eine natürliche Zahl ist:

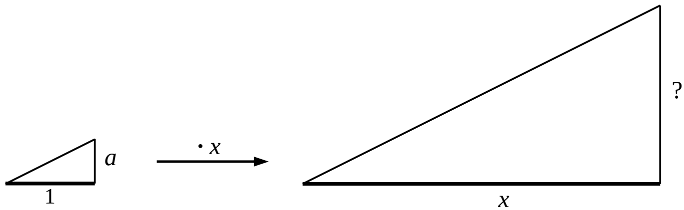
$$\begin{aligned} y &= \text{Höhe der Geraden} \\ &= x\text{-mal die Höhe der kleinen Dreiecke} + b \\ &= ax + b \end{aligned}$$

## Zweite Herleitung

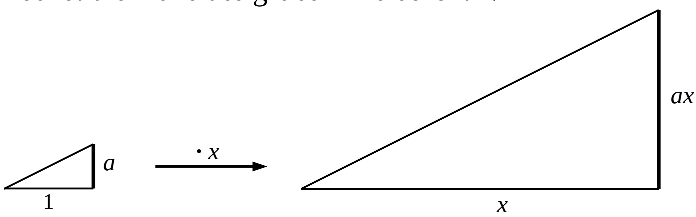
Anstelle der kleinen Steigungsdreicke betrachten wir nur ein großes Dreieck. Die Ähnlichkeit der beteiligten Dreiecke liefert uns die Höhe der Geraden an jeder Position $x$, und somit die Geradengleichung.



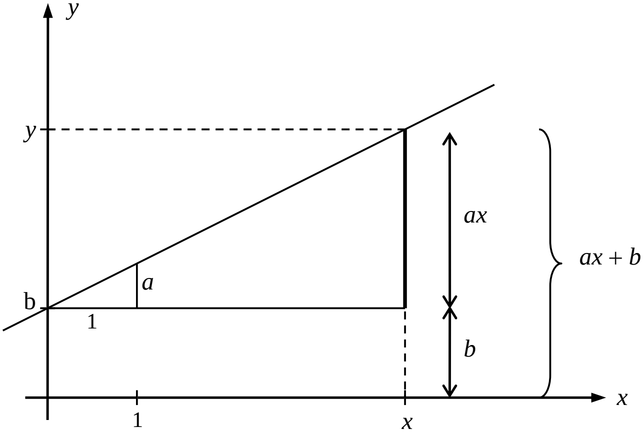

Das Steigungsdreieck und das große Dreieck haben die gleichen Winkel, sind also ähnlich, und das heißt anschaulich, dass das große Dreieck durch einen Vergrößerungsfaktor aus dem Steigungsdreieck hervorgeht. Ein Vergleich der Grundseiten (1 bzw. $x$) zeigt, dass der Faktor $x$ ist:.




Also ist die Höhe des großen Dreiecks $ax$:



Die Höhe $y$ der Geraden lässt sich nun leicht ablesen:




Sie ist: $y = ax + b$.

## 5. Herleitung der Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung

Die allgemeine Form der Geradengleichung ist

$$y = ax + b.$$

Die Steigung $a$ ist gegeben, $b$ muss berechnet werden. Dazu setzen wir die Koordinaten des gegebenen Geradenpunktes $(x_1; y_1)$ in die Geradengleichung ein:

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Nach $b$ aufgelöst, ergibt sich:

$$b = y_1 - ax_1.$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die Geradengleichung ein, ordnen und klammern $a$ aus:

$$
\begin{aligned}
y &= ax + b \\
y &= ax + y_1 - ax_1 \\
y &= ax - ax_1 + y_1 \\
y &= a(x - x_1) + y_1
\end{aligned}
$$

## 6. Rechnerische Herleitung der Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung

Im Hinblick auf die Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung, benötigen wir nur noch die Steigung. Dazu setzen wir die Koordinaten der gegebenen Geraden-Punkte in die allgemeine Form der Geradengleichung ein:

$$
\begin{aligned}
& & y &= ax + b \\
(x_1; y_1): & & y_1 &= ax_1 + b \\
(x_2; y_2): & & y_2 &= ax_2 + b
\end{aligned}
$$

Wir ziehen beide Gleichungen voneinander ab ($b$ hebt sich auf!):

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

klammere $a$ aus und löse nach $a$ auf:

$$
\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= ax_2 - ax_1 \\
y_2 - y_1 &= a(x_2 - x_1) \\
a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}
$$

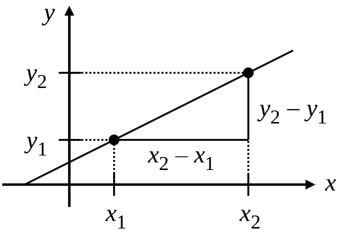
Setze das Ergebnis in die Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung ein:

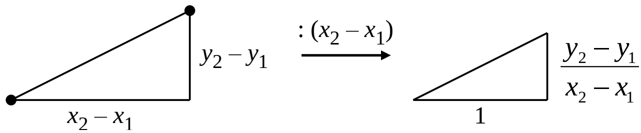
$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

**7. Geometrische Herleitung der Steigung beim Zwei-Punkte-Problem**

Aus den zwei gegebenen Punkten kann ein vergrößertes Steigungsdreieck gebildet werden. Durch eine einfache Division kann dieses in ein normiertes Steigungsdreieck überführt werden (mit der horizontalen Seite der Länge 1):



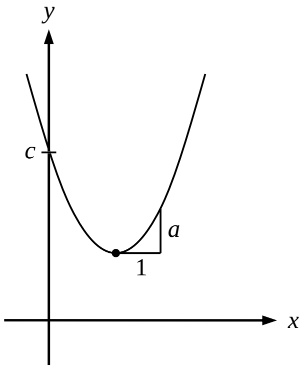

Daher ist die Steigung $a$ der Geraden:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

# Anhang 2: Parabeln/Überblick

**Allgemeine Form** der Parabelgleichung:

$$y = ax^2 + bx + c$$

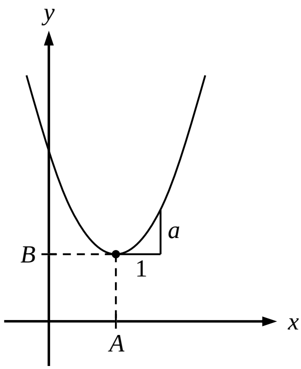



quadratische Ergänzung

ausmulti-plizieren

**Scheitelform** der Parabelgeleichung:

$$y = a(x - A)^2 + B$$



# Anhang 3: Komplexe Zahlen

Einige quadratische Gleichungen haben keine Lösung. So kommt für die einfache Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine der üblichen (*reellen*) Zahlen als Lösung in Frage, denn beim Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst erhält man stets eine positive Zahl oder Null.
Wir erweitern unseren Zahlenbereich durch Hinzufügen einer neuartigen Zahl $i$, die eine Lösung der obigen Gleichung ist:

$$i^2 = -1 .$$

Man bezeichnet $i$ als *imaginäre Einheit*. Sie kann als Wurzel aus –1 aufgefasst werden:

$$i = \sqrt{-1} .$$

Anschaulich betrachtet, gehen wir vom *Zahlenstrahl* zur *Zahlenebene* über. Die imaginäre Einheit entspricht einem Punkt in der Ebene, der außerhalb des Zahlenstrahls liegt.

Wenn man die vier Grundrechenarten mit reelle Zahlen und $i$ durchführt, ergeben sich stets Ausdrücke der Gestalt:

$$a + bi ,$$

beispielsweise $2+3i$, $-4+5i$, $1{,}5+3{,}8i$, usw.

Diese aus reellen Zahlen und der imaginären Einheit zusammengesetzten Größen nennt man *komplexe Zahlen*.

Im Bereich dieser komplexen Zahlen kann die Wurzel aus negativen Zahlen gezogen werden, zum Beispiel ist:

$$\sqrt{-9} = 3i, \text{ denn } (3i)^2 = 9i^2 = -9$$

Lässt man auch komplexe Zahlen zu, so liefert die *p*-*q*-Formel also immer eine Lösung der quadratischen Gleichung. Zum Beispiel hat die Gleichung

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

nun die Lösungen:

$$x_1 = -2 + i \quad \text{und} \quad x_2 = -2 - i\,.$$

Denn

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\, p = 4 \text{ und } q = 5 \text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \qquad |\text{rechnen}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

**Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen**

Man rechnet mit komplexen Zahlen genauso wie mit den üblichen reellen Zahlen und Buchstaben. Es ist lediglich zu beachten, dass $i^2 = -1$ ist.

Wir betrachten zur Verdeutlichung Beispiele zu den vier Grundrechenarten:

***Addition***
$(2+3i) + (5+9i) = 7+12i$

***Subtraktion***
$(2+9i) - (6+3i) = -4+6i$

***Multiplikation***

$$\begin{aligned}(2+3i)\cdot(5+4i) &= 2\cdot 5+2\cdot 4i+3i\cdot 5+3i\cdot 4i\\ &= 10+8i+15i+12i^2 \qquad |\, i^2=-1\\ &= 10+23i-12\\ &= -2+23i\end{aligned}$$

***Division***

$$\begin{aligned}\frac{3+7i}{1+2i} &= \frac{(3+7i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} \qquad |\,\text{3. binomische Formel}\\ &= \frac{17+i}{1-4i^2} \qquad |\, i^2=-1\\ &= \frac{17+i}{1+4}\\ &= \frac{17+i}{5}\\ &= \frac{17}{5}+\frac{1}{5}i\end{aligned}$$

Hier hat man einen oft nützlichen Kunstgriff benutzt, um das $i$ im Nenner $1+2i$ loszuwerden: Zähler und Nenner werden mit der entsprechenden Differenz $1-2i$ multipliziert. Dann wendet man die 3. binomische Formel an , die besagt, dass das Produkt einer Summe und der entsprechenden Differenz die Differenz der Quadrate ist:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Somit erhält man also den neuen Nenner:

$$\begin{aligned}(1+2i)(1-2i) &= 1^2-(2i)^2\\ &= 1-4i^2\\ &= 1-4\cdot(-1)\\ &= 1+4\\ &= 5\end{aligned}$$

## Historisches zu den komplexen Zahlen

Rafael Bombelli (1526 – 1572) hat in seinem Buch *Algebra* als erster die komplexen Zahlen dargelegt und als Lösungen von Gleichungen einbezogen.

Das Wort *imaginär* ist von René Descartes (1596 – 1650) in seiner berühmten *Geometrie* eingeführt worden.
Der Ausdruck *komplexe Zahlen* ist von Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) geprägt worden.

Die Bezeichnung *i* für die imaginäre Einheit geht auf Leonhard Euler (1708 – 1783) zurück.

## Anwendungen der komplexen Zahlen

Bereits am Ende des 19. Jahrhunderts hat der deutsche Elektroingenieur Charles Steinmetz (1865 – 1923) komplexe Widerstände im Wechselstromkreis eingeführt, was zu einer erheblichen Vereinfachung der Berechnungen geführt hat.

Die in den 1920er Jahren entwickelte Quantenmechanik benutzt komplexe Zahlen. Auf einer Inschrift am Grab Erwin Schrödingers (1878 – 1961) steht die berühmte *Schrödingergleichung*:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$$

Sie enthält die imaginäre Einheit *i*.

# Anhang 4: Eulers Zauberformel

Die aufgeführten Reihen enthalten lediglich die vier Grundrechenarten. Daher können sie auch für komplexe Zahlen (siehe Anhang 3) angewendet werden. Durch Einsetzen komplexer Zahlen in die Exponentialreihe ist Leonhard Euler auf die berühmte Zauberformel gestoßen:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist, die eine Zahl jenseits der reellen Zahlen ist und die der Gleichung $i^2 = -1$ genügt.

Die Zauberformel verbindet die Exponentialfunktion mit Sinus und Kosinus, Funktionen die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben. Mit Hilfe der Zauberformel lassen sich viele trigonometrische Beziehungen (wie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus) auf einfache Potenzegeln zurückführen.

### *Herleitung der Zauberformel*

Die Potenzen von $i$ sind:

$$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^5 = i,\ \ i^6 = -1,\ \ \text{etc.}$$

Man sieht, dass die Potenzen mit geradem Exponenten (also von der Gestalt $2n$) abwechselnd $\pm 1$ sind, und bei ungeraden Exponenten (d. h. vom Typ $2n+1$) ergeben sich abwechselnd $\pm i$. In der Tat:

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n = \pm 1$$
$$i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n \cdot i = \pm i$$

Nun berechnen wir $e^{ix}$:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\
&= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \dots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}$$

Also: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Der Fall $x = \pi$ (180°) ist berühmt und sticht hervor, weil fünf wichtige mathematische Konstanten in einer Gleichung vereint sind:

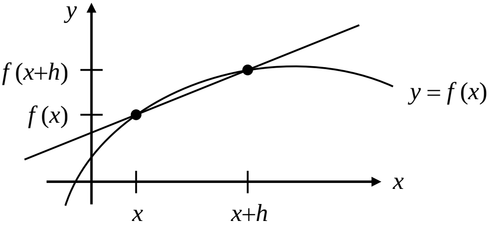
$$\begin{aligned}
e^{i\pi} &= \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \\
&= -1 + 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Das heißt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 .$$

# Anhang 5: Differentialrechnung/Abriss

## I. Begriff der Ableitung




Die **Ableitung** an der Stelle $x$ ist:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \text{Steigung der Tangente an } f \text{ an der Stelle } x \\
&= \text{Grenzwert der Steigung der Sekanten} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

In **Leibniz-Notation** ist die Ableitung:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

## II. Berechnung der Ableitung

### Grundlegende Ableitungen

| | |
|---|---|
| $(c)' = 0$ | $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ |
| $(ax+b)' = a$ | $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ |
| $(x^n)' = nx^{n-1}$ | $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\cos x)' = -\sin x$ | |

### Ableitungsregeln

$$(f+g)' = f' + g'$$ (Summenregel)

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$ (Faktorregel)

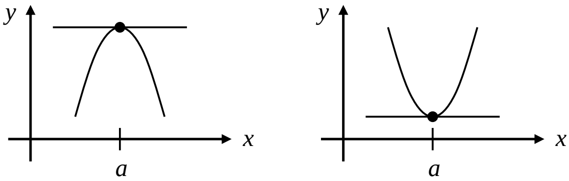
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$ (Produktregel)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$ (Quotientenregel)

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$ (Kettenregel)

## III. Anwendungen 1

### Relative Maxima und Minima




1. Wenn $f$ bei a ein relatives Maximum oder Minimum hat, so ist:

$$f'(a) = 0\,.$$

2. Wenn

$$f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) < 0,$$

dann hat $f$ bei $a$ ein *lokales Maximum*.

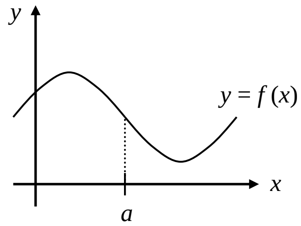
3. Wenn

$$f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) > 0,$$

dann hat $f$ bei $a$ ein *lokales Minimum*

## III. Anwendungen 2

### Wendepunkte

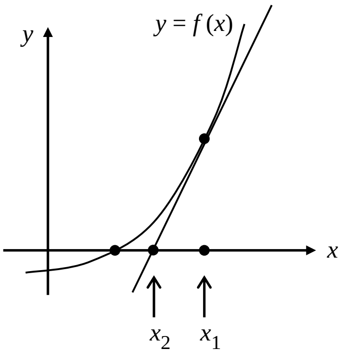



Wenn $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$,
dann hat $f$ einen Wendepunkt in $a$.

### Newton-Verfahren

Aus dem Näherungswert $x_1$ für eine Lösung von $f(x) = 0$ ergibt sich ein besserer Wert $x_2$ durch:

$$x_2 \;=\; x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



| **III. Anwendungen 3: Reihen** | |
|---|---|
| Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$ | $(-1 < x < 1)$ |
| Arkustangensreihe: $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots$ | $(-1 < x < 1)$ |
| Logarithmusreihe: $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots$ | $(-1 < x < 1)$ |
| Exponentialreihe: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ | $(-1 < x < 1)$ |
| Sinusreihe: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots$ | $(-1 < x < 1)$ |
| Kosinusreihe: $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\ldots$ | $(-1 < x < 1)$ |
| Maclaurin-Reihe: $f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$ | |

## III. Anwendungen 3: Reihen (Fortsetzung)

Taylor-Reihe:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

Oder auch in der Form:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$