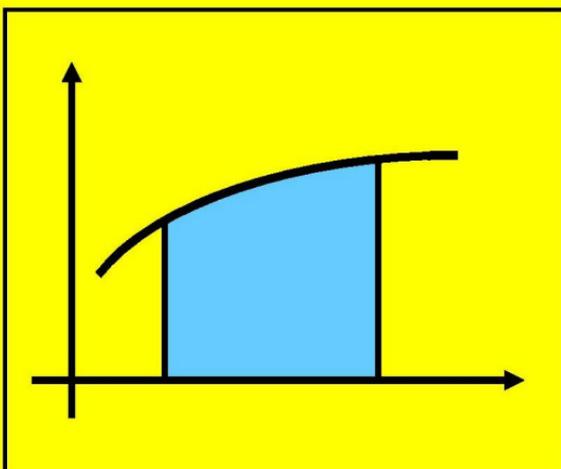


Das kleine Buch der Integralrechnung

Alexander Roux

2. Auflage



Integralrechnung

Das kleine Buch der
Integralrechnung

Alexander Roux

2. Auflage

Impressum

**Copyright: © 2024 Alexander Roux
Alle Rechte vorbehalten**

**Selbstverlag, Alexander Roux
c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln**

**Druck und Vertrieb:
epubli (www.epubli.com) – ein Service der neopubli
GmbH, Köpenicker Straße 154a, 10997 Berlin**

Vorwort

Dieser Text ist eine Einführung in die elementare Integralrechnung. Der Schwerpunkt liegt in der Darstellung der anschaulichen Grundgedanken und der Erläuterung der Rechentechniken.

Das Integral ist die Antwort auf die Frage, wie man den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren berechnen kann. Der Durchbruch bei der Flächenberechnung wurde durch die Erfindung der Koordinatensysteme möglich. Einerseits können beliebige Figuren überhaupt erst beschrieben werden, nämlich durch Gleichungen in Koordinaten, beispielsweise beschreibt $y = 2x - 1$ eine Gerade und $y = x^2$ eine Parabel. Andererseits hat sich die Differentialrechnung daraus entwickelt. Sie ist der Schlüssel bei der praktischen Flächenberechnung über Integrale, denn der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass das Integral gewissermaßen eine Umkehrung der Ableitung ist.

So benötigt der Leser für die Lektüre dieses Büchleins Grundkenntnisse der Differentialrechnung: die Definition der Ableitung und die einfachen Ableitungsregeln. Im Anhang sind einige wichtige Ergebnisse der Differentialrechnung zusammengestellt.

Differential- und Integralrechnung sind grundlegend für zahlreiche Gebiete der verschiedensten Wissenschaften.

Die vorliegende 2. Auflage enthält einige Korrekturen und kleinere Ergänzungen.

Dr. A. Roux

Brühl, November 2023

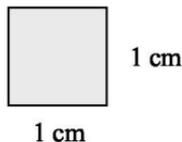
Inhalt

Vorwort.....	5
Inhalt	7
1. Einführung	9
2. Das Integral	25
2.1 Das Integralzeichen	25
2.2 Beispiele	26
3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung..	31
3.1 Die Grundstruktur	31
3.2 Dem Geheimnis von F auf der Spur.....	32
3.3 Beispiele	34
Aufgaben	44
4. Anwendung: Drehkörper	45
Aufgaben	58
5. Integrationsregeln und -techniken	60
5.1 Elementare Integrationsregeln	61
5.2 Partielle Integration	67
5.3 Substitutionsregel	74
Aufgaben	85
6. Unbestimmte Integrale	87
6.1 Definition des unbestimmten Integrals.....	87
6.2 Regeln für unbestimmte Integrale	89
6.3 Beispiele für die Integrationsregeln	91
Aufgaben	102
Lösungen	104
Anhang 1: Differentialrechnung/Abriss	109
Anhang 2: Integralrechnung/Abriss	115

1. Einführung

Der Flächeninhalt eines Rechtecks

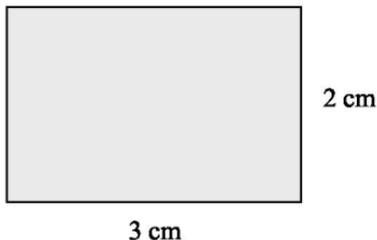
Was ist der Flächeninhalt einer Figur, wie misst man ihn? Zunächst muss man eine Einheit für die Länge wählen, z. B. cm (Zentimeter). Dann kann man als Einheit für den Flächeninhalt ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 cm wählen:



Der Flächeninhalt dieses Quadrates ist 1 cm^2 (ein Quadrat-zentimeter).

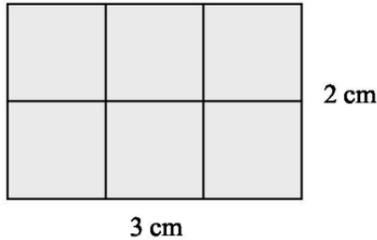
Um den Flächeninhalt einer gegebenen Figur zu bestimmen, muss man prüfen, wie oft dieses kleine Quadrat hineinpasst.

Beispielsweise passen in das Rechteck



genau 6 Quadrate, wie man aus der folgenden Skizze leicht ablesen kann:

Einführung



(2 Etagen mit jeweils 3 Quadraten: $2 \text{ mal } 3 = 6.$)

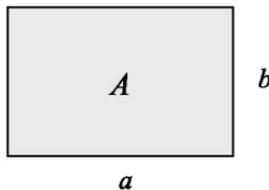
Daraus ergibt sich die bekannte Formel:

Fläche eines Rechtecks = Länge mal Breite



Wenn man nun (wie erstmals François Viète, 1540-1603) *Buchstaben* für *alle* Größen schreibt, nimmt die Formel die uns geläufige Gestalt an:

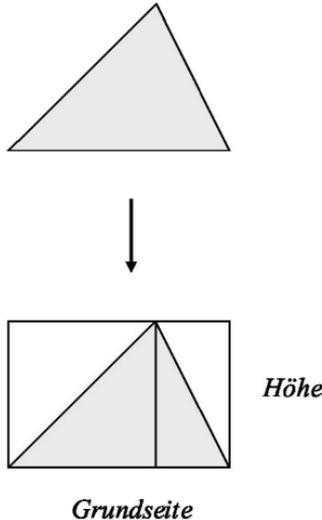
$$A = ab$$



„Fläche“ heißt auf Englisch und Lateinisch „area“. Daher steht ein großes „A“ für die Fläche.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Der Flächeninhalt eines Dreiecks lässt sich auf den Flächeninhalt eines Rechtecks zurückführen. An den beiden Teilrechtecken wird besonders deutlich, dass die Dreiecksfläche halb so groß ist wie die Rechtecksfläche:



Also:

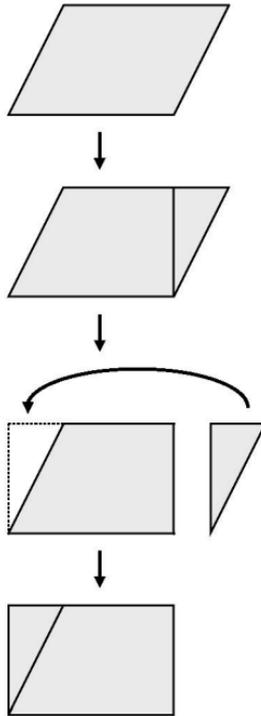
$$\text{Fläche des Dreiecks} = \text{halbe Rechtecksfläche}$$

$$\text{Fläche des Dreiecks} = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms

Auch der Flächeninhalt eines Parallelogramms lässt sich auf den Flächeninhalt eines Rechtecks zurückführen:

Einführung

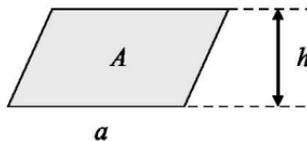


Also:

Fläche des Parallelogramms = Rechtecksfläche
Fläche des Parallelogramms = Grundseite · Höhe

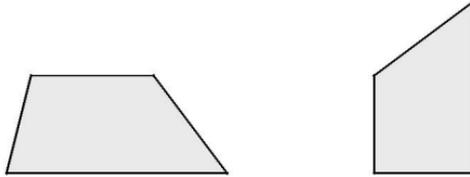
In Buchstaben:

$$A = a \cdot h$$

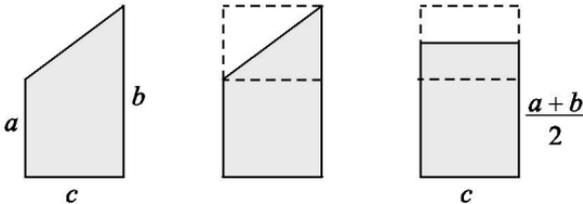


Der Flächeninhalt eines Trapezes

Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten:



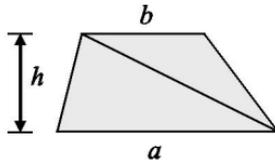
Für das rechte Trapez zeigen die folgenden Bilder, wie man seine Fläche berechnen kann:



Die Fläche A des Trapezes ist so groß wie die eines *Rechtecks* mit gleicher Breite c und dessen Länge der Mittelwert der Längen der beiden parallelen Trapezseiten a und b ist:

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot c$$

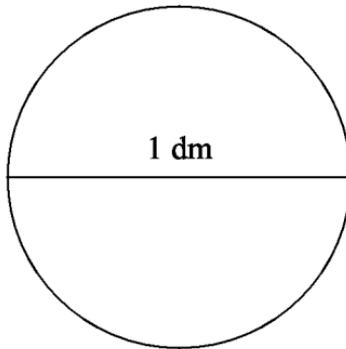
Die Trapezfläche kann auch durch Zerlegung in zwei Dreiecke gewonnen werden:



$$\text{Also: } A = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Der Flächeninhalt eines Kreises

Der Kreis ist nicht geradlinig begrenzt und daher schwieriger zu berechnen. Wir betrachten zunächst den Kreisumfang. Dazu nehmen wir einen Kreis mit dem Durchmesser 1 dm (= 1 Dezimeter = 10 cm), wie er zum Beispiel als Querschnitt einer handelsüblichen Konservendose vorkommt:



Dann messen wir die Länge des Umfanges beispielsweise mit einem Bandmaß aus Papier:

Das Ergebnis ist bei Sorgfältiger Messung ungefähr:

3,14 dm

Der Wert wird als „Pi“ bezeichnet und geschrieben als

$$\pi = 3,14159\dots$$

π ist der kleine griechische Buchstabe Pi. William Jones (1675-1749) hat im Jahre 1706 die Bezeichnung π eingeführt, vermutlich weil π der Anfangsbuchstabe des griechischen Wortes *perimetros* (= Umfang) ist.

Der Umfang eines Kreises mit einem Durchmesser von 1 Dezimeter ist also π .

Beträgt der Kreisdurchmesser nun 2 Dezimeter statt 1 Dezimeter, so verdoppeln sich alle Längen. Der Umfang ist dann:

$$\text{Umfang} = \pi \cdot 2 \text{ Dezimeter}$$

Ist der Kreisdurchmesser 3 Dezimeter statt 1 Dezimeter, so verdreifachen sich alle Längen. Der Umfang ist jetzt:

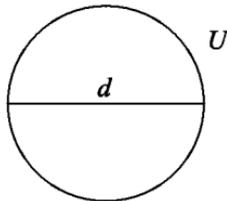
$$\text{Umfang} = \pi \cdot 3 \text{ Dezimeter}$$

Allgemein gilt also:

$$\text{Umfang} = \pi \cdot \text{Durchmesser}$$

In Buchstaben ergibt sich die Formel:

$$U = \pi \cdot d$$



Oft ist nicht der Durchmesser, sondern der Radius des Kreises gegeben. Der Radius ist der halbe Durchmesser. Anders gesagt: der Durchmesser ist der doppelte Radius.
Aus

$$\text{Umfang} = \pi \cdot \text{Durchmesser}$$

Einführung

wird dann

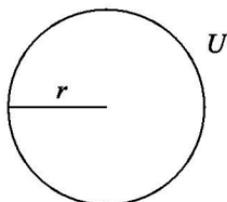
$$\text{Umfang} = \pi \cdot 2 \cdot \text{Radius}$$

In Buchstaben:

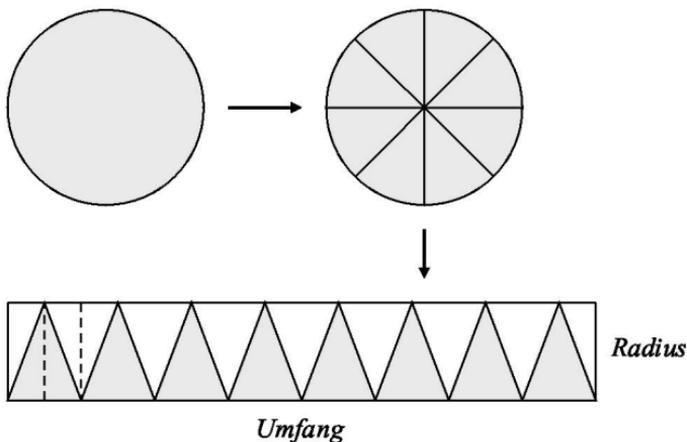
$$U = \pi \cdot 2 \cdot r$$

oder in der üblichen und kurzen Form:

$$U = 2\pi r$$



Nun können wir die Fläche des Kreises berechnen. Dazu zerlegen wir den Kreis in „Dreiecke“ (fast Dreiecke):



Die Kreisfläche ist daher die halbe Rechtecksfläche:

$$\text{Kreisfläche} = \frac{\text{Umfang} \cdot \text{Radius}}{2}$$

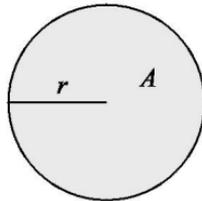
$$\text{Kreisfläche} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot \text{Radius}) \cdot \text{Radius}}{2}$$

Die Zwei kann man kürzen:

$$\text{Kreisfläche} = \pi \cdot \text{Radius} \cdot \text{Radius}$$

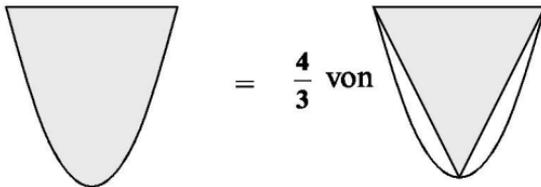
Daraus ergibt sich die bekannte Formel für die Berechnung der Kreisfläche:

$$A = \pi r^2$$



Der Flächeninhalt eines Parabelsegments

Als letztes Beispiel erwähnen wir noch die Parabel. Archimedes (287-212 v. Chr.) war der erste, der die Fläche eines Parabelsegments berechnen konnte. Sein Ergebnis lautet:

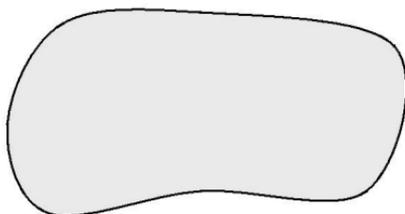


$$\text{Fläche des Parabelsegments} = \frac{4}{3} \text{ der Dreiecksfläche}$$

Die Arbeit von Archimedes über die Parabel ist kompliziert und umfangreich, sie umfasst über 20 Seiten in den gesammelten Werken des Archimedes.

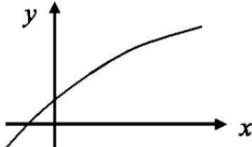
Der Flächeninhalt beliebiger Figuren

Wir betrachten nun ziemlich beliebige, krummlinig begrenzte Figuren:

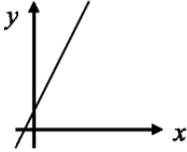
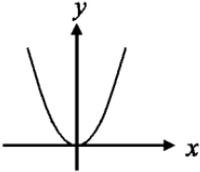
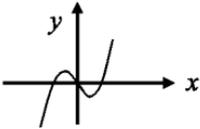
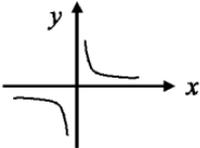


Die Begrenzungskurve kann jetzt nicht durch klassische geometrische Konstruktionen gewonnen werden. Erst die Erfindung der Koordinatensysteme (Nicole d’Oresme, etwa 1323-1382, René Descartes, 1596-1650, und Pierre de Fermat, 1601-1665) hat beliebige Kurven zugänglich gemacht: Zu jeder Kurve gehört eine Gleichung, die oft auch als „Funktionsgleichung“ bezeichnet wird:

Allgemein

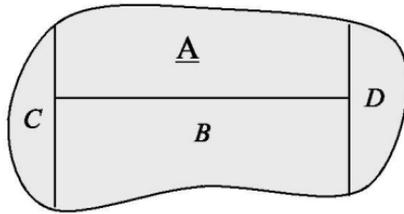
Kurve	Gleichung
	$y = f(x)$ <p>Hierbei steht $f(x)$ für einen Ausdruck in x. (Euler, 1707-1783)</p>

Beispiele

Name der Kurve	Kurve	Gleichung
Gerade		$y = 2x + 1$
Parabel		$y = x^2$
kubische Parabel		$y = x^3 - x$
Hyperbel		$y = \frac{1}{x}$

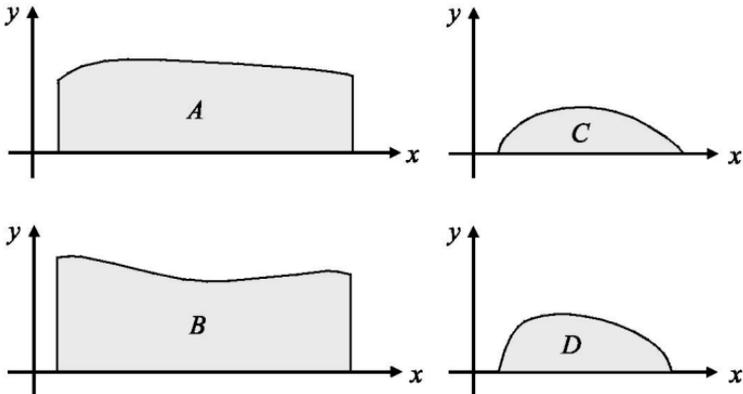
Wir wenden uns nun wieder obiger Figur zu. Sie kann in vier Teile zerlegt werden. Jeder dieser Teile kann bei Wahl eines geeigneten Koordinatensystems durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden.

Einführung

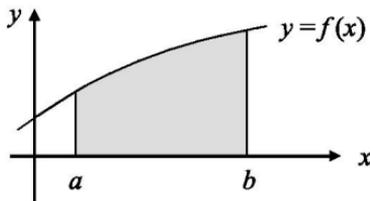


Die Teile im Koordinatensystem sind:

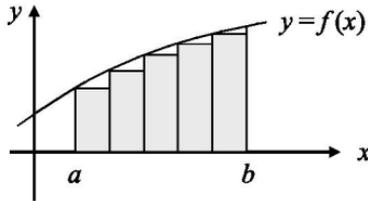
Damit ist unser Problem auf die Berechnung von Flächen der folgenden Art zurückgeführt:



Die Fläche hat links, rechts und unten gerade Begrenzungslinien. Nur oben ist die Begrenzung krumm und wird durch eine Funktionsgleichung beschrieben.



Nachdem die Beschreibung der Figur gelungen ist, kann man nun die Berechnung des Flächeninhalts in Angriff nehmen. Dazu wird die Figur durch viele *dünne* Rechtecke ausgeschöpft. Die Summe der Rechtecksflächen ist dann praktisch der gesuchte Flächeninhalt:



Historische Anmerkungen

Der Ansatz der Ausschöpfung einer Fläche durch Rechtecke oder Dreiecke ist nicht neu und findet sich bereits bei Archimedes (287-212 v. Chr.) und bei Eudoxos (408-355 v. Chr.) und seinen Vorläufern.

Mit der Erfindung der Koordinatensysteme durch Oresme stand eine rechnerische Beschreibung von *beliebigen* Kurven zur Verfügung – und umgekehrt eine Veranschaulichung von rechnerischen Beziehungen.



Nicole d'Oresme
1320-1382

Bischof von Lisieux.
Errungenschaften: Begründer der Nationalökonomie, die Gesetze des freien Falls, Wurzeln als Potenzen mit Brüchen als Hochzahl, Koordinatensysteme

Als Descartes und Fermat nochmals (unabhängig voneinander) die Koordinatensysteme erfanden, stand ihnen die vietasche Buchstabenrechnung zur Verfügung. Die Koordinatensysteme konnten ihre volle Kraft entfalten. Beliebige Kurven sind nun zugänglich, zu jeder Kurve gehört eine Gleichung.

 <p>René Descartes 1596-1650</p>	 <p>Pierre de Fermat 1601-1665</p>
<p>Jurist und Soldat. Errungenschaften: Koordinatensysteme, Begründung des Rationalismus (Philosophie).</p>	<p>Jurist am Parlament von Toulouse. Errungenschaften: Koordinatensysteme, Differentialrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit Pascal), Zahlentheorie, fermatsches Prinzip der Lichtausbreitung: Das Licht nimmt den Weg, auf dem es am wenigsten Zeit benötigt.</p>

So hat Fermat in seiner Abhandlung „*Methoden zur Bestimmung von Maxima und Minima und Tangenten an gekrümmten Kurven*“ die Grundbegriffe der Differentialrechnung entwickelt. Ferner hat er Flächen, die von höheren Parabeln und Hyperbeln berandet werden, berechnet.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wurde erstmals von Gregory formuliert und bewiesen. Newton und Leibniz haben die Differential- und Integralrechnung systematisch ausgebaut. Die heute gebräuchlichen Bezeichnungen der Differential- und Integralrechnung ge-

hen auf Leibniz zurück, der besonderen Wert auf klare und praktische mathematische Symbole legte.



James Gregory
1638 – 1675



Isaac Newton
1643-1727



Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

Die erste präzise formale Definition des Integrals stammt von Riemann. Man spricht daher auch vom „Riemannschen Integral“. Lebesgue hat schließlich den Integralbegriff zum modernen „Lebesgue- Integral“ verallgemeinert.



Bernhard Riemann
1826-1866



Henri Lebesgue
1875-1941

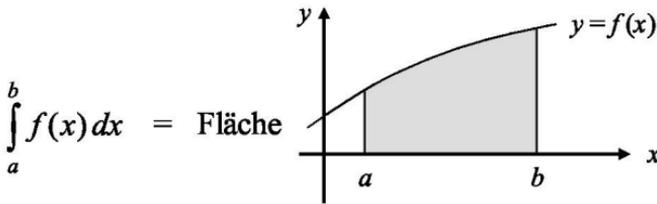
Einführung

2. Das Integral

2.1 Das Integralzeichen

Das Integralzeichen stammt von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Joseph Fourier (1768-1830) hat das Symbol noch um die Integrationsgrenzen ergänzt. Der Name „Integral“ wurde von Johann Bernoulli (1667-1748) im brieflichen Einvernehmen mit Leibniz eingeführt.

Das Integralzeichen steht für die schraffierte Fläche:



In diesem Zeichen stecken die folgenden drei konkreten Informationen:

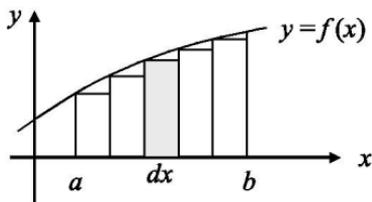
rechte (große) **Begrenzung**
des Flächenstückes

linke (kleine) **Begrenzung**
des Flächenstückes

Das Integralzeichen $\int_a^b f(x) dx$ ist dargestellt. Ein Pfeil zeigt von der rechten Begrenzung b nach oben zum Text 'rechte (große) Begrenzung'. Ein weiterer Pfeil zeigt von der linken Begrenzung a nach oben zum Text 'linke (kleine) Begrenzung'. Ein dritter Pfeil zeigt von der Kurve $f(x)$ nach unten zum Text 'gibt die Kurve an: $y = f(x)$ '.

gibt die **Kurve** an:
 $y = f(x)$

Die anderen Bestandteile des Integralzeichens beziehen sich auf die Berechnung des Integrals durch die Addition vieler „schmaler“ Rechtecksflächen. Die Grundseite dieser Rechtecke ist dx und die Höhe $f(x)$.



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Summe aller Rechtecksflächen } f(x) dx$$

Das Zeichen \int ist ein stilisiertes, lang gezogenes großes lateinisches „S“ und steht für „Summe“. Die Grundseite dx kann man sich als **D**ifferenz zweier benachbarter Werte auf der x-Achse vorstellen. Das „d“ in dx steht also für „Differenz“.

2.2 Beispiele

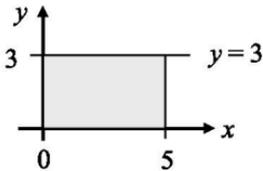
Wir betrachten nun fünf Beispiele. Der Leser kann sich mit ihnen an das Integral gewöhnen. Die Beispiele vermitteln aber auch wichtige Einsichten auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Beispiel 1

Berechne $\int_0^5 3 dx$.

Lösung

Das Integral ist nichts weiter als die Fläche eines Rechtecks mit der Grundseite 5 und der Höhe 3.

$$\begin{aligned} \int_0^5 3 dx &= \text{Fläche} \\ &= 5 \cdot 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$


The graph shows a Cartesian coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A shaded rectangle is drawn in the first quadrant. The bottom-left corner of the rectangle is at the origin (0,0). The bottom-right corner is at (5,0) on the x-axis. The top-right corner is at (5,3). The top-left corner is at (0,3). A horizontal line segment at y=3 extends from the y-axis to the right edge of the rectangle, labeled 'y=3'. The x-axis has tick marks at 0 and 5. The y-axis has a tick mark at 3.

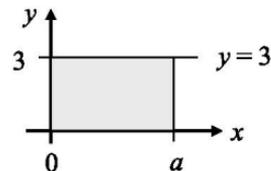
Also: $\int_0^5 3 dx = 15$

Beispiel 2

Berechne $\int_0^a 3 dx$.

Lösung

Das Integral ist nichts weiter als die Fläche eines Rechtecks mit der Grundseite a und der Höhe 3.

$$\begin{aligned} \int_0^a 3 dx &= \text{Fläche} \\ &= a \cdot 3 \\ &= 3a \end{aligned}$$


The graph shows a Cartesian coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A shaded rectangle is drawn in the first quadrant. The bottom-left corner of the rectangle is at the origin (0,0). The bottom-right corner is at (a,0) on the x-axis. The top-right corner is at (a,3). The top-left corner is at (0,3). A horizontal line segment at y=3 extends from the y-axis to the right edge of the rectangle, labeled 'y=3'. The x-axis has tick marks at 0 and a. The y-axis has a tick mark at 3.

Also: $\int_0^a 3 dx = 3a$

Beispiel 3

Berechne $\int_a^b 3 dx$.

Lösung

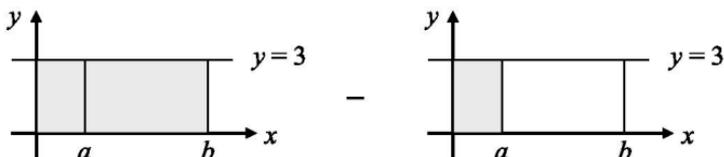
Das Integral entspricht der folgenden Fläche:



Der Flächeninhalt dieses Rechtecks mit der Grundseite $b-a$ und der Höhe 3 ist $3(b-a) = 3b - 3a$. Also:

$$\int_a^b 3 dx = 3b - 3a.$$

Das Integral kann man auch als Differenz zweier Integrale der in Beispiel 2 betrachteten Art auffassen:



Das führt zu folgendem Rechenweg:

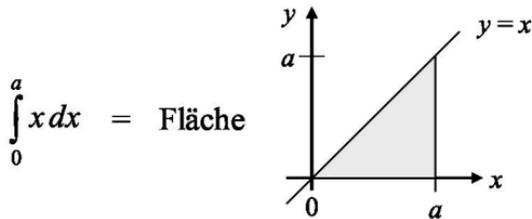
$$\int_a^b 3 dx = \int_0^b 3 dx - \int_0^a 3 dx = 3b - 3a$$

Beispiel 4

Berechne $\int_0^a x dx$.

Lösung

Das Integral ist die Fläche eines Dreiecks mit der Grundseite a und der Höhe ebenfalls a .



$$\int_0^a x dx = \text{Fläche}$$

$$= \frac{a \cdot a}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

Also: $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$

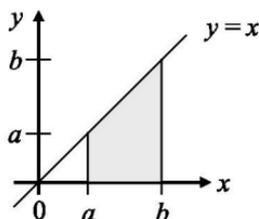
Beispiel 5

Berechne $\int_a^b x dx$.

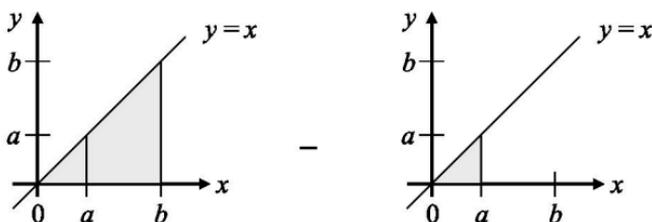
Lösung

Das Integral entspricht im vorliegenden Fall dem Flächeninhalt eines Trapezes. Wir werden nicht die Formel für die Fläche eines Trapezes bemühen. Stattdessen fassen wir die Fläche als Differenz von Dreiecksflächen auf und greifen auf Beispiel 4 zurück:

Das Integral



Das Integral kann man als Differenz zweier Integrale auffassen:



Das führt zu folgender Rechnung:

$$\int_a^b x dx = \int_0^b x dx - \int_0^a x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Also: $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

3.1 Die Grundstruktur

Wir betrachten die Beispiele 3 und 5 aus dem vorangehenden Kapitel:

$\int_a^b 3 dx = 3b - 3a$
$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

Auf der rechten Seite steht jeweils eine Differenz gleichartiger Ausdrücke:

$$3b - 3a$$

$$\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Hier kommt b vor.

Hier ist b durch a ersetzt.

Allgemein formuliert ist die Struktur folgende:

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

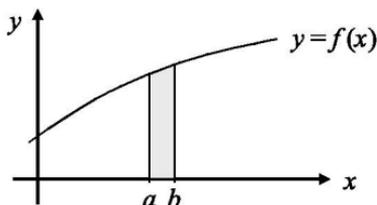
Es bleibt die Frage, welche Gestalt F hat und wie man es berechnen kann.

3.2 Dem Geheimnis von F auf der Spur

Wir betrachten den Fall, dass b nahe bei a liegt:

$$a \approx b$$

Die Fläche $\int_a^b f(x) dx$ ist dann sehr schmal und auch oben praktisch geradlinig begrenzt, also ein Trapez:



Daher ist:

$$\int_a^b f(x) dx = (\text{Mittelwert der Höhen}) \cdot \text{Grundseite}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

Und wegen

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

erhält man

$$F(b) - F(a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a).$$

Teilt man durch $(b - a)$, so ergibt sich:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Wenn nun b sehr nahe bei a liegt ($b \rightarrow a$), steht links die **Ableitung** von F an der Stelle a , und man kann rechts $f(b)$ durch $f(a)$ ersetzen:

$$F'(a) = \frac{f(a) + f(a)}{2}.$$

Und damit

$$F'(a) = f(a)$$

F ist also dadurch gekennzeichnet, dass seine *Ableitung* der Integrand f ist. Dieses Ergebnis ist als **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bekannt. Der Satz ist der Schlüssel zur Berechnung von Integralen:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

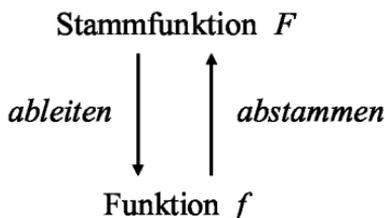
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Hierbei gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

(F heißt *Stammfunktion* von f .)

Der Ausdruck „Stammfunktion“ ist angesichts der Bezeichnung „Ableitung“ einleuchtend:



Die Berechnung eines Integrals besteht vor allem im Auffinden einer Stammfunktion. Daher wird das Integrieren oft auch als Umkehrung des Differenzierens (Ableitens) bezeichnet.

3.3 Beispiele

Beispiel 1

Berechne $\int_0^5 3 dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?)' = 3$$

$$(3x)' = 3$$

Also ist

$$F(x) = 3x$$

eine Stammfunktion von $f(x) = 3$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^5 3 dx &= F(5) - F(0) \\ &= 3 \cdot 5 - 3 \cdot 0 \\ &= 15 - 0 \\ &= 15\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^5 3 dx = 15.$$

Beispiel 2

Berechne $\int_1^3 x dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?)' = x$$

Wir wissen:

$$(x^2)' = 2x$$

Damit beim Ableiten nicht $2x$, sondern x herauskommt, teilen wir x^2 durch 2. Dann ist:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = x$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned}\int_1^3 x dx &= F(3) - F(1) \\ &= \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{2} = 4\end{aligned}$$

Also:

$$\int_1^3 x dx = 4.$$

Beispiel 3

Berechne $\int_0^1 x^2 dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?)' = x^2$$

Wir wissen:

$$(x^3)' = 3x^2$$

Damit beim Ableiten nicht $3x^2$, sondern x^2 herauskommt, teilen wir x^3 durch 3. Dann ist:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \, dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{0}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 4

Berechne $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?)' = -x^2 + 4x - 3$$

Man kann jeden Summanden einzeln betrachten und dann jeweils wie in den vorangehenden Beispielen vorgehen (konstante Faktoren bleiben dabei erhalten):

$$\left(-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right)' = -x^2 + 4x - 3.$$

Daher ist

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

eine Stammfunktion von $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned} \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx &= F(3) - F(1) \\ &= -\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) \\ &= -9 + 18 - 9 - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Also:

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \frac{4}{3}.$$

Bemerkung

Die Flächenberechnung bei Parabeln in den letzten zwei Beispielen 3 und 4 hat bei uns jeweils etwa eine Seite erfordert. Die „Quadratur der Parabel“ des Archimedes umfasst mehr als zwanzig Seiten.

Die nachfolgenden Beispiele sind für uns nicht wesentlich schwieriger, obwohl sie sicherlich jenseits der Reichweite der Methoden des Archimedes liegen.

Beispiel 5

Berechne $\int_0^1 (x - x^3) dx$.

Lösung

1. Stammfunktion finden

$$\begin{aligned} (?)' &= x - x^3 \\ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)' &= x - x^3 \end{aligned}$$

Daher ist

Der Hauptsatz

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = x - x^3$.

2. Integral berechnen

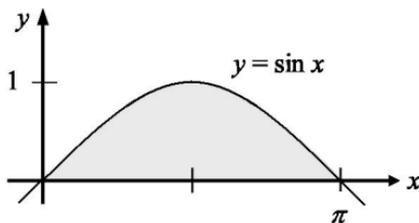
$$\begin{aligned}\int_0^1 (x - x^3) dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - (0 - 0) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4}$$

Beispiel 6

Berechne $\int_0^\pi \sin x dx$.



Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?)' = \sin x$$

Wir wissen: $(\cos x)' = -\sin x$. Damit wir beim Ableiten $\sin x$ (statt $-\sin x$) bekommen, nehmen wir $-\cos x$:

$$(-\cos x)' = \sin x$$

Daher ist

$$F(x) = -\cos x$$

eine Stammfunktion von $f(x) = \sin x$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= F(\pi) - F(0) \\ &= -\cos \pi - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) - (-1) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2.$$

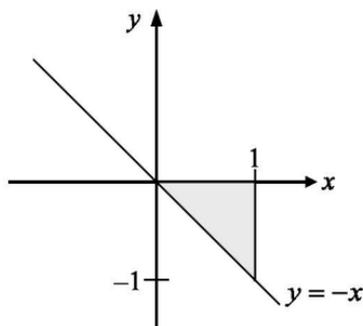
Bemerkung

Das Ergebnis ist überraschend glatt, wenn man bedenkt, dass $\pi = 3,14,159 \dots$ „krumm“ ist und der Sinus etwas Kompliziertes.

Es folgt nun ein Beispiel, bei dem die Kurve *unterhalb* der x -Achse verläuft. Die y -Werte $f(x)$ sind also negativ. So leuchtet es ein, dass dann die Produkte $f(x)dx$ negativ sind, ebenso ihre Summe. Das Integral ergibt in diesem Fall die *negative* Fläche zwischen Kurve und x -Achse.

Beispiel 7

Berechne $\int_0^1 (-x) dx$.



Lösung

1. Stammfunktion finden

$$(\ ?)' = -x$$

$$\left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -x$$

Daher ist

$$F(x) = -\frac{x^2}{2}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = -x$.

2. Integral berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-x) dx &= F(1) - F(0) \\ &= -\frac{1^2}{2} - \left(-\frac{0^2}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + 0 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^1 (-x) dx = -\frac{1}{2}.$$

Dies ist wie erwartet der negative Flächeninhalt des schraffierten Dreiecks.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale elementargeometrisch und mit Hilfe des Hauptsatzes:

a) $\int_0^3 (3x+2) dx$ b) $\int_1^4 (2x-1) dx$ c) $\int_0^a (3x+2) dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes:

a) $\int_0^5 (1+x) dx$ b) $\int_0^a (1+x) dx$ c) $\int_{-1}^0 x dx$

d) $\int_{-1}^1 x dx$ e) $\int_{-1}^1 x^2 dx$ f) $\int_{-2}^2 x^3 dx$

g) $\int_0^1 (x^5 + 4x^2 + 1) dx$ h) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$

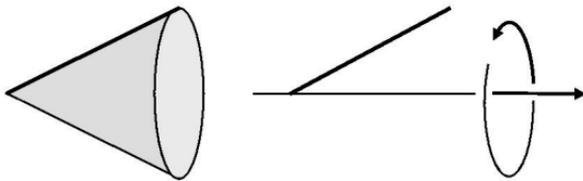
j) $\int_0^1 e^x dx$ k) $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$ l) $\int_1^2 \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} dx$

m) $\int_2^5 (2x-1) dx$ n) $\int_0^b (8x+5) dx$

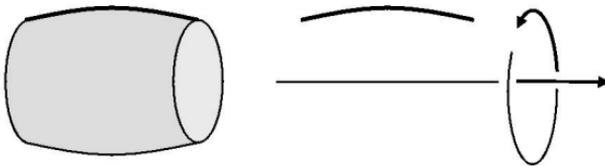
4. Anwendung: Drehkörper

Einige interessante Körper wie Kegel, Fässer und Kugeln sind Drehkörper, sie entstehen aus der Drehung einer Kurve um eine Achse.

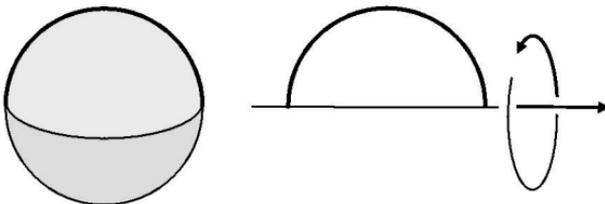
Ein Kegel entsteht durch die Drehung einer geraden Strecke um 360° :



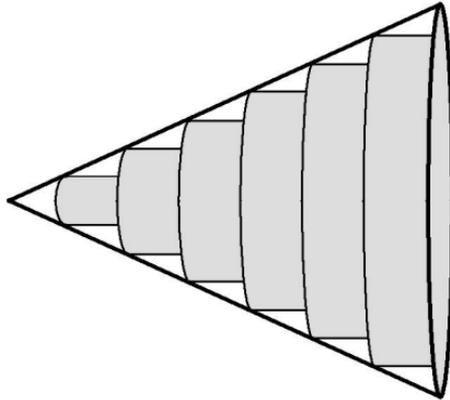
Ein Fass entsteht durch die Drehung eines Parabelstückes um 360° :



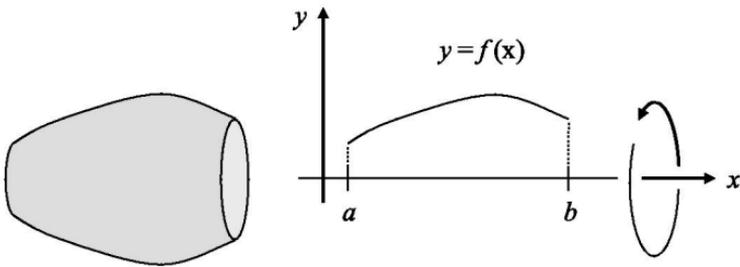
Eine Kugel entsteht durch die Drehung einer Halbkreislinie um 360° :



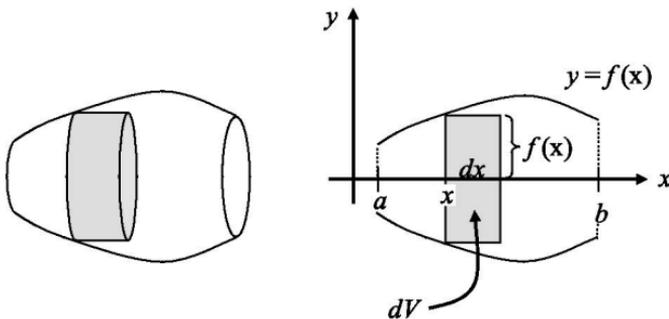
Das Volumen der Drehkörper kann mit Hilfe unserer Integrale berechnet werden. Die Grundidee ist die Zerlegung des Körpers in viele flache **Zylinder**.



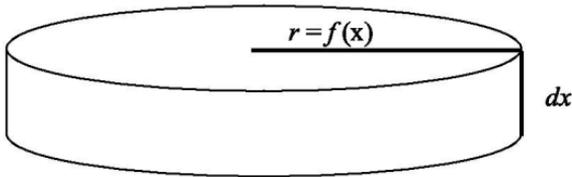
Wir betrachten eine allgemeine Kurve, die um die x -Achse gedreht wird:



Wir zerlegen den Körper nun in viele flache Zylinder und betrachten den Zylinder an der Stelle x :



Das (kleine) Volumen dV dieses Zylinders



ist nun:

$$dV = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

$$dV = \pi \cdot r^2 \cdot dx$$

$$dV = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

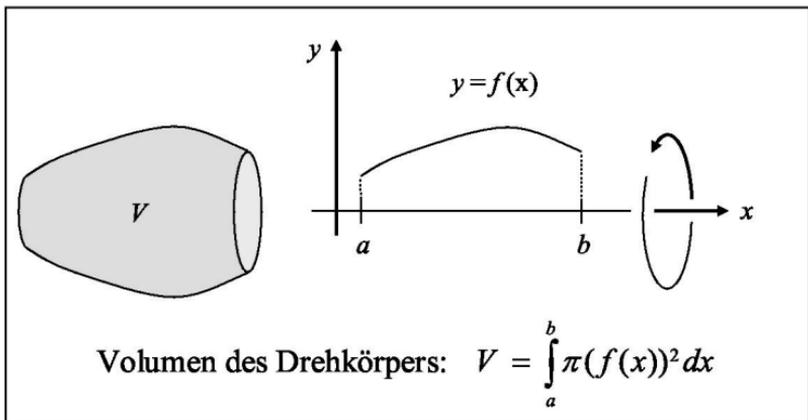
Das gesamte Volumen des Drehkörpers ist die Summe der Volumina dV aller flachen Zylinder:

$$V = \text{Summe aller } dV$$

$$V = \text{Summe aller } \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

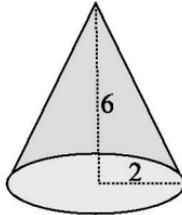
Wir fassen zusammen:



Als Beispiele berechnen wir nun das Volumen von Kegel, Fass und Kugel.

Beispiel 1: Kegel

Gegeben: Kegel mit der Höhe $h = 6$ cm und dem Radius $r = 2$ cm.

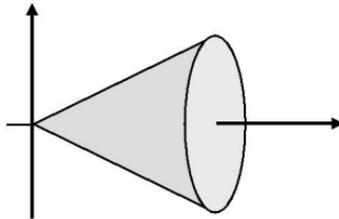


Gesucht: Volumen V .

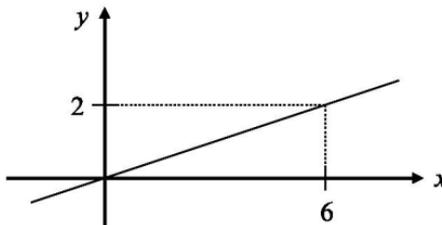
Lösung:

1. Der Kegel als Drehkörper

Wir legen den Kegel so in das Koordinatensystem:



Die zu drehende Gerade ist dann:



Die allgemeine Form der Geradengleichung lautet:

$$y = mx + n$$

Die Gerade geht durch den Ursprung (0; 0) und den Punkt (6; 2). Es liegt ein Zwei-Punkte-Problem vor.

Da die Gerade durch den Ursprung geht, ist für $x=0$ also auch $y=0$. Dies in die Geradengleichung eingesetzt ergibt:

$$y = mx + n$$

$$0 = m \cdot 0 + n$$

$$0 = 0 + n$$

$$n = 0$$

Also vereinfacht sich die Geradengleichung zu:

$$y = mx$$

Die Gerade geht durch den Punkt mit den Koordinaten $x=6$ und $y=2$. Dies in die Geradengleichung eingesetzt ergibt:

$$y = mx$$

$$2 = m \cdot 6$$

$$m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333\dots$$

Die Geradengleichung ist also konkret:

$$y = \frac{1}{3}x$$

Die Gerade ist im Bereich zwischen $x=0$ und $x=6$ zu betrachten, um beim Drehen den gewünschten Kegel zu bekommen.

2. Das Volumen des Kegels als Integral

Mit

$$f(x) = \frac{1}{3}x,$$

$$a = 0 \text{ und } b = 6$$

erhalten wir aus

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

konkret

$$V = \int_0^6 \pi \left(\frac{1}{3}x\right)^2 dx$$

$$V = \int_0^6 \frac{\pi}{9} x^2 dx$$

3. Berechnung des Integrals

Stammfunktion:

$$(\ ?)' = \frac{\pi}{9} x^2$$

$$\left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \right)' = \frac{\pi}{9} x^2$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{\pi}{27} x^3$$

eine Stammfunktion von $g(x) = \frac{\pi}{9} x^2$.

Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^6 \frac{\pi}{9} x^2 dx &= F(6) - F(0) \\ &= \frac{\pi}{27} 6^3 - \frac{\pi}{27} 0^3 \\ &= \frac{\pi}{27} 6^3 \\ &= 25,1327412\dots\end{aligned}$$

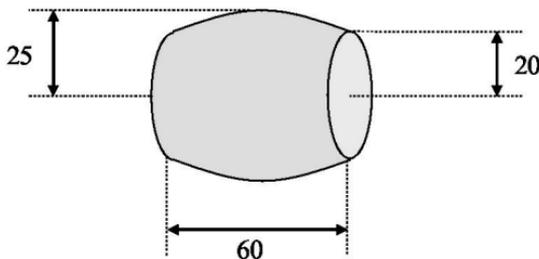
Da unsere Längeneinheit cm ist, ist unsere Volumeneinheit cm^3 . Der Kegel hat also ein Volumen von:

$$V \approx 25,1327 \text{ cm}^3.$$

Beispiel 2: Fass

Gegeben: Fass mit kleinem Radius $r = 20 \text{ cm}$, großem Radius $R = 25 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 60 \text{ cm}$.

Gesucht: Volumen V .

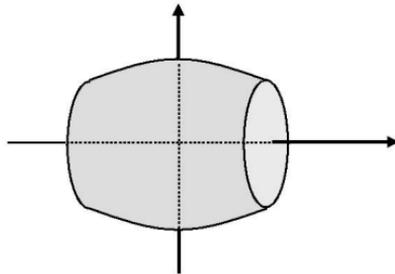


Lösung:

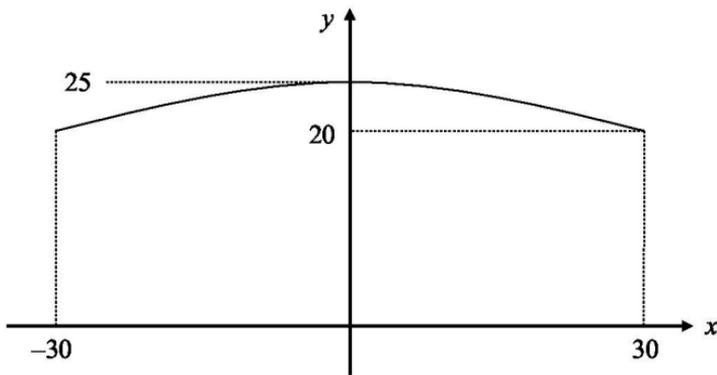
1. Das Fass als Drehkörper

Wir legen das Fass wie folgt in das Koordinatensystem:

Anwendung: Drehkörper



Wir benutzen einen Ansatz von Johannes Kepler (1571-1630), der besagt, dass ein Fass aus der Drehung einer Parabel hervor geht. Für nicht stark gekrümmte Fässer ist das eine sehr gute Näherung.



Der Scheitelpunkt der Parabel liegt auf der y -Achse, und zwar bei $y = 25$. Die Parabelgleichung hat also die Gestalt:

$$y = cx^2 + 25$$

Es ist nun c zu berechnen.

Die Parabel geht durch den Punkt mit den Koordinaten $x = 30$ und $y = 20$. Dies in die Parabelgleichung eingesetzt und nach c aufgelöst, ergibt:

$$y = cx^2 + 25$$

$$20 = c \cdot 30^2 + 25$$

$$20 = 900c + 25$$

$$-5 = 900c$$

$$c = -\frac{5}{900} = -\frac{1}{180} = -0,00555\dots$$

Die konkrete Parabelgleichung lautet also:

$$y = -\frac{1}{180}x^2 + 25$$

Die Parabel ist im Bereich zwischen -30 und 30 zu betrachten, um beim Drehen das gewünschte Fass zu liefern.

2. Das Volumen des Fasses als Integral

Wir setzen

$$f(x) = -\frac{1}{180}x^2 + 25,$$

$$a = -30, \quad b = 30$$

in

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

ein und quadrieren die Klammer:

$$V = \int_{-30}^{30} \pi \cdot \left(-\frac{1}{180}x^2 + 25\right)^2 dx$$

$$V = \int_{-30}^{30} \pi \cdot \left(\frac{1}{32.400}x^4 - \frac{5}{18}x^2 + 625\right) dx$$

3. Berechnung des Integrals

Stammfunktion:

Durch Ableiten bestätigt man, dass

$$F(x) = \pi \cdot \left(\frac{1}{162.000} x^5 - \frac{5}{54} x^3 + 625x \right)$$

eine Stammfunktion ist von

$$g(x) = \pi \cdot \left(\frac{1}{32.400} x^4 - \frac{5}{18} x^2 + 625 \right).$$

Integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-30}^{30} \pi \cdot \left(\frac{1}{32.000} x^4 - \frac{5}{18} x^2 + 625 \right) dx \\ &= F(30) - F(-30) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{1}{162.000} 30^5 - \frac{5}{54} 30^3 + 625 \cdot 30 \right) \\ &\quad - \pi \cdot \left(\frac{1}{162.000} (-30)^5 - \frac{5}{54} (-30)^3 + 625(-30) \right) \end{aligned}$$

Mit $\pi \approx 3,14159$ gerechnet, bekommt man:

$$V \approx 103\,044$$

Da unsere Längeneinheit cm ist, ist unsere Volumeneinheit cm^3 . Das Fass hat also ein Volumen von etwa:

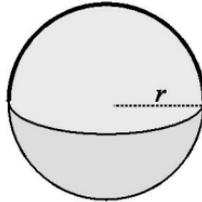
$$103\,044 \text{ cm}^3 = 103,044 \text{ Liter.}$$

Als letztes Beispiel eines Drehkörpers betrachten wir die Kugel. Wir nehmen eine allgemeine Kugel mit einem beliebigen Radius.

Beispiel 3: Kugel

Gegeben: Kugel mit Radius r .

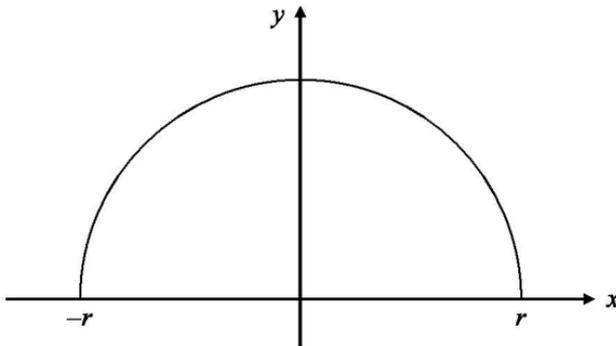
Gesucht: Volumen V .



Lösung:

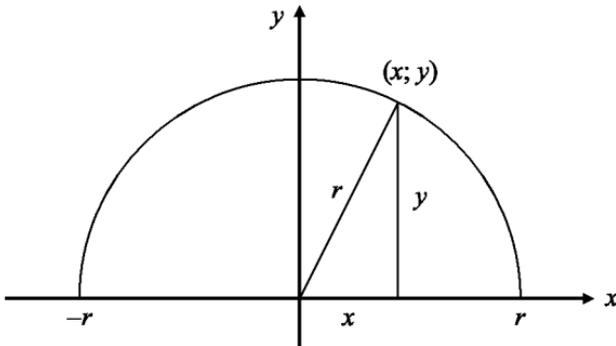
1. Die Kugel als Drehkörper

Wir legen den Mittelpunkt der Kugel in den Ursprung des Koordinatensystems. Die zu drehende Kurve ist dann der obere Halbkreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt:



Die Punkte $(x; y)$, die auf der Kreislinie liegen, haben alle den Abstand r vom Koordinatenursprung. In der Skizze treten die Koordinaten x und y als Katheten und der Radius r als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks auf. Der Satz des Pythagoras liefert dann:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Wir lösen die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ nach y auf und erhalten:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Auf dem oberen Halbkreis sind die y -Werte stets ≥ 0 , die negative Wurzel scheidet aus und es bleibt:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Halbkreislinie befindet sich im x -Bereich zwischen $-r$ und r .

2. Das Volumen der Kugel als Integral

Wir setzen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$a = -r, \quad b = r$$

in

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

ein und quadrieren die Klammer:

$$\begin{aligned}V &= \int_{-r}^r \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\ &= \int_{-r}^r \pi \cdot (r^2 - x^2) dx\end{aligned}$$

3. Berechnung des Integrals

Stammfunktion:

Durch Ableiten bestätigt man, dass

$$F(x) = \pi \cdot \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)$$

eine Stammfunktion ist von

$$g(x) = \pi \cdot (r^2 - x^2).$$

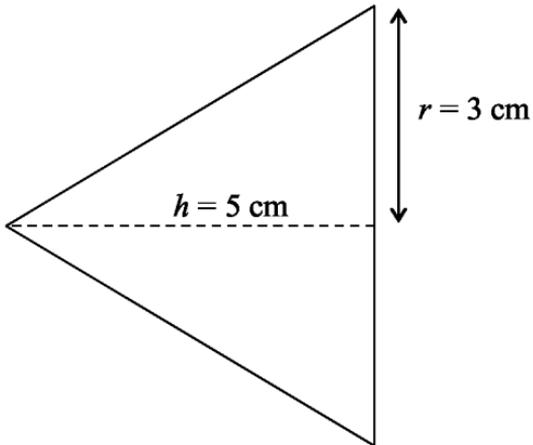
Integral:

$$\begin{aligned}V &= \int_{-r}^r \pi \cdot (r^2 - x^2) dx \\ &= F(r) - F(-r) \\ &= \pi \cdot \left(r^2r - \frac{r^3}{3}\right) - \pi \cdot \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3}\right) \\ &= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \pi \cdot \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \pi \cdot \frac{2r^3}{3} + \pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3\end{aligned}$$

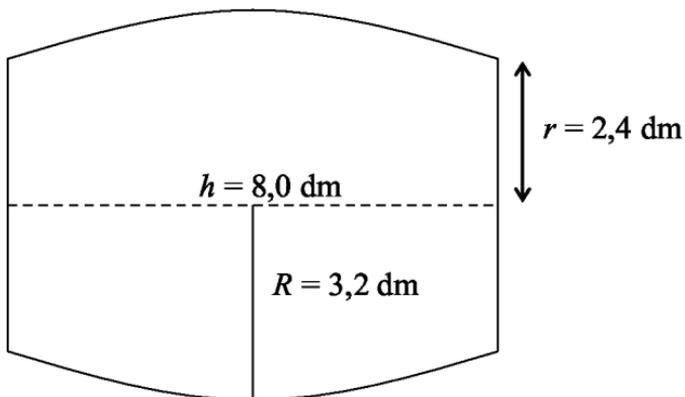
Also ist das Volumen der Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Aufgaben

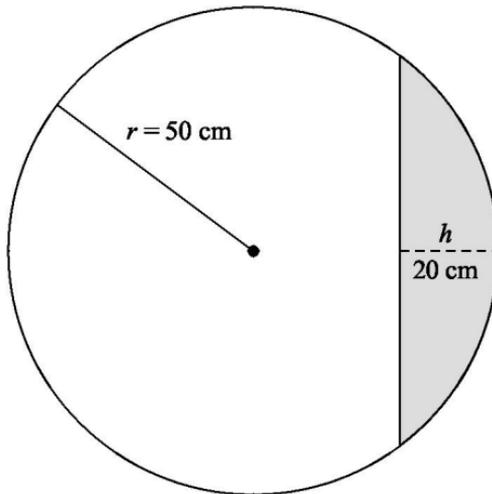
1. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Kegels:



2. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Fasses:



3. Berechnen Sie das Volumen des skizzierten Kugelabschnittes (schattiert dargestellt):



5. Integrationsregeln und -techniken

Mit Hilfe des Hauptsatzes haben wir viele Integrale berechnet. In den betrachteten Fällen war eine Stammfunktion relativ einfach zu finden. Bei komplizierten Kurven versucht man, die Integrale auf einfache Integrale zurückzuführen (gemäß dem klassischen Motto „Teile und herrsche!“). Dazu benötigt man die Integrationsregeln. Dies ist die immer wiederkehrende Strategie, die auch den Ableitungsregeln zugrunde liegt.

Wir betrachten folgende Regeln:

1. Elementare Integrationsregeln
 - * Regel über die Integrationsgrenzen
 - * Summenregel
 - * Faktorregel
2. Partielle Integration
3. Substitutionsregel

Diese Integrationsregeln betreffen die drei Aspekte:

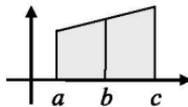
- * Integrationsgrenzen
- * Grundrechenarten
- * Ersetzung eines Ausdrucks durch einen Buchstaben (eine neue Variable)

5.1 Elementare Integrationsregeln

Wir betrachten eine Regel über Integrationsgrenzen, die Summenregel und die Faktorregel. Die Regeln werden formuliert, anschließend erläutert und in Beispielen angewendet.

(1) Regel über Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



(2) Die Summenregel

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

(3) Die Faktorregel

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Erläuterung zur Regel (1)

Die Gleichheit kann direkt aus der Skizze abgelesen werden. Eine analoge Situation findet man bei einer Reise mit Zwischenstopp:

Reise von Berlin nach Paris + Reise von Paris nach Madrid =
Reise von Berlin nach Madrid.

Erläuterung zur Regel (2)

Möchte man alle Zahlen, die in zwei Spalten stehen, addieren, so kann man zeilenweise oder spaltenweise addieren. Dies ist der Grundgedanke der folgenden Begründung zur Summenregel.

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \text{Summe aller } [f(x) + g(x)] dx \\ &= \text{Summe aller } f(x) dx + g(x) dx \\ &= \text{Summe aller } f(x) dx + \\ &\quad \text{Summe aller } g(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

Erläuterung zur Regel (3)

Die Faktorregel entspricht dem üblichen Ausklammern:

$$\begin{aligned}\int_a^b c f(x) dx &= \text{Summe aller } c \cdot f(x) dx \\ &= c \cdot \text{Summe aller } f(x) dx \\ &= c \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Zu jeder der drei dargelegten Regeln folgt nun ein Beispiel.

Beispiel 1 (Integrationsgrenzen)

$$\int_0^2 (x-1) dx$$

Lösungsweg 1:

$F(x) = 0,5x^2 - x$ ist eine Stammfunktion von $x-1$.

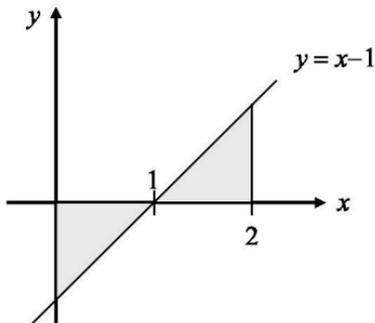
Also:

$$\int_0^2 (x-1) dx = F(2) - F(0) = 0,5 \cdot 2^2 - 2 - 0 = 0.$$

Das Integral ist überraschenderweise Null:

$$\int_0^2 (x-1) dx = 0$$

Lösungsweg 2:



Im Bereich 0 bis 1 verläuft die Gerade unterhalb der x -Achse, und im Bereich von 1 bis 2 oberhalb. Daher ergibt sich beim Integral eine negative und eine positive Fläche, die sich im vorliegenden Fall sogar aufheben und Null ergeben.

$F(x) = 0,5x^2 - x$ ist eine Stammfunktion von $x-1$. Daher:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x-1) dx &= \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= F(1) - F(0) + F(2) - F(1) \\ &= 0,5 \cdot 1 - 1 - 0 + 0,5 \cdot 4 - 4 - (0,5 \cdot 1 - 1) \\ &= -0,5 + 0,5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Beispiel 2 (Summenregel)

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx$$

Lösung:

Nach der Summenregel ist:

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx.$$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ ist eine Stammfunktion von x^2 ,

$G(x) = \frac{x^2}{2}$ ist eine Stammfunktion von x .

Daher:

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Also

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \frac{5}{6}$$

Schreibweise:

Beim vorigen Beispiel wurde das Integral auf *zwei* Integrale zurückgeführt. Bei ihrer Berechnung sind zwei Stammfunktionen zu betrachten. Um Stammfunktionen direkt (ohne Buchstaben wie F und G) hinschreiben zu können, hat sich folgende Schreibweise bewährt und weitgehend durchgesetzt:

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

Die Stammfunktion steht hier ausdrücklich da, ohne einen Namen (wie den Buchstaben F) für sie einzuführen.

Allgemein:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel 3 (Faktorregel)

$$\int_0^1 5x^2 dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 5x^2 dx &= 5 \cdot \int_0^1 x^2 dx \\ &= 5 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Also

$$\int_0^1 5x^2 dx = \frac{5}{3}$$

5.2 Partielle Integration

Die partielle Integration ist eine Formel, die auf der Produktregel der Differentialrechnung beruht. Der Name „partielle“ (= „teilweise“) Integration rührt daher, dass von einem Produkt zunächst nur ein Faktor integriert (eine Stammfunktion gebildet) wird.

Wir leiten zunächst die Formel für die partielle Integration her und betrachten dann drei typische Beispiele. Diese Beispiele decken so gut wie alle Fälle ab, die in der Praxis vorkommen.

Herleitung der partiellen Integration

Die Produktregel besagt, dass man ein Produkt ableitet, indem man jeweils einen Faktor ableitet und die Produkte addiert:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Bilde nun das Integral auf beiden Seiten:

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Nach dem Hauptsatz ist das links stehende Integral:

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b,$$

da $f(x) \cdot g(x)$ eine Stammfunktion von $(f(x) \cdot g(x))'$ ist.

Man erhält also:

$$\left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Nach dem ersten Integral aufgelöst, ergibt sich:

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Erläuterung zur partiellen Integration

Bei der partiellen Integration wird das Integral eines Produktes von zwei Faktoren betrachtet.

$$\int_a^b \underbrace{f'(x)} \cdot \underbrace{g(x)} dx = \left[\underbrace{f(x)} \cdot \underbrace{g(x)} \right]_a^b - \int_a^b \underbrace{f(x)} \cdot \underbrace{g'(x)} dx$$

Stammfunktion bilden
ableiten

Zunächst wird zu einem der Faktoren eine Stammfunktion gesucht. (Der Faktor wird „integriert“. Daher kommt die Bezeichnung „partielle Integration“.) Das neue Produkt wird an den Stellen a und b berechnet, und die Differenz gebildet.

In einem zweiten Schritt wird beim neuen Produkt der andere (unverändert gebliebene) Faktor abgeleitet. Von diesem Produkt wird das Integral genommen.

Beispiel 1 (Faktor loswerden durch Ableiten)

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx$$

Lösung:

Wenn man den Faktor x ableitet, vereinfacht er sich zu 1. Daher empfiehlt es sich, den zweiten Faktor zu integrieren. Eine Stammfunktion für e^x ist e^x selber. Also:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^x dx &= [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot e^x dx \\ &= [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx \\ &= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e^1 - e^0) \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

Somit:

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = 1$$

Beispiel 2 (Produkt erzeugen durch den Faktor 1)

$$\int_1^2 \ln x \, dx$$

Lösung:

(Vorbemerkungen: Auf den ersten Blick scheint die partielle Integration hier nicht anwendbar, denn im Integral taucht kein Produkt auf. Man kann aber

$$\ln x = 1 \cdot \ln x$$

schreiben, und dann steht doch ein Produkt da.)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x \, dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx \\ &= [x \cdot \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot (\ln x)' \, dx \\ &= 2 \cdot \ln 2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \ln 2^2 - \int_1^2 1 \, dx \\ &= \ln 4 - [x]_1^2 \\ &= \ln 4 - (2-1) \\ &= \ln 4 - 1 \\ &\approx 0,38629 \end{aligned}$$

Also: $\int_1^2 \ln x \, dx \approx 0,38629$

Beispiel 3 (Eine Gleichung für das Integral bekommen)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin x \, dx \\ &= [(-\cos x) \cdot \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot (\sin x)' \, dx \\ &= [-\cos x \cdot \sin x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= 0 + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

Also

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx .$$

Dieses Ergebnis ist zunächst sehr enttäuschend, denn

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

ist grundsätzlich nicht einfacher als das ursprüngliche Integral. Wir lösen die Beziehung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

die nichts anderes ist als der Satz von Pythagoras in trigonometrischem Gewande, nach $\cos^2 x$ auf:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Wir setzen das Ergebnis ein:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx - \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

Das gesuchte Integral kann nun als *Unbekannte* in dieser Gleichung aufgefasst werden. Wir lösen nach dem Integral auf:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx - \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 \, dx$$

Integralrechnung

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [x]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} (\pi - 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \approx 1,57080$$

5.3 Substitutionsregel

Substitutionen zur Vereinfachung

In der Mathematik kommen „Substitutionen“ (Ersetzungen) öfter vor. Beispielsweise kann der unangenehm kompliziert aussehende Ausdruck

$$(2x+1)e^{2x+1} \sin(2x+1)$$

durch die Abkürzung (Ersetzung, Substitution):

$$z = 2x+1$$

vereinfacht werden zu:

$$ze^z \sin z .$$

Substitutionen bei Integralen

Wir möchten nun bei einem Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

eine Substitution $x = g(t)$ durchführen. Das hat Auswirkungen auf:

- den Integranden $f(x)$,
- die kleine Differenz dx ,
- die Integrationsgrenzen a, b .

Der Integrand

Wir ersetzen: $f(x) \rightarrow f(g(t))$

Die kleine Differenz

Nach Definition der Ableitung (= Steigung der Tangente \approx Steigung der Sekante = Differenzenquotient) ist:

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

Also

$$dx = g'(t) dt$$

Wir ersetzen: $dx \rightarrow g'(t) dt$

Die Integrationsgrenzen

Die Variable x läuft von a bis b . Wir wählen t_a und t_b so, dass

$$a = g(t_a)$$

$$b = g(t_b)$$

Dann läuft t im Bereich von t_a bis t_b . Wir ersetzen also:

$$a \rightarrow t_a$$

$$b \rightarrow t_b$$

Alle Ersetzungen vorgenommen, ergibt sich die Substitutionsregel für Integrale:

Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Für die praktische Anwendung braucht man diese Formel nicht auswendig zu wissen. Man betrachtet, wie oben vorgeführt, den Integranden, das dx und die Integrationsgrenzen getrennt und setzt ein.

Es gibt grundsätzlich zwei Arten, die Substitution anzuwenden:

A

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{gegebenes Integral}} = \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt}_{\text{Stellt sich als einfacheres Integral heraus}}$$

B

$$\underbrace{\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt}_{\text{Gegebenes Integral, Integrand ist ein Produkt der Gestalt: (Ausdruck in } g) \cdot g'}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{einfacheres Integral}}$$

Diese Anwendungen werden nun in mehreren Beispielen vorgeführt.

Beispiel 1 (Typ A)

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Lösung:

Vorbemerkungen:

Aus der bereits erwähnten Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ folgt $\cos t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 t}$. Der Kosinus ist im betrachteten Bereich zwischen 0 und $\pi/6$ positiv, daher scheidet das negative Vorzeichen aus, somit: $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$.

Diese Formel legt die Substitution $x = \sin t$ nahe, denn der Wurzelausdruck $\sqrt{1 - x^2}$ kann dadurch vereinfacht werden.

Substitution:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t, \text{ also } dx = \cos t dt$$

$$x = 0 = \sin 0, \text{ also } t_a = 0$$

$$x = 0,5 = \sin \pi/6, \text{ also } t_b = \pi/6$$

Daher:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos t} \cos t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/6} 1 dt \\ &= [t]_0^{\pi/6} = \pi/6 - 0 = \pi/6 \end{aligned}$$

Also: $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi/6$

Beispiel 2 (Typ A)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Lösung:

Substitution:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t, \text{ also } dx = \cos t dt$$

$$x = 0 = \sin 0, \text{ also } t_a = 0$$

$$x = 1 = \sin \pi/2, \text{ also } t_b = \pi/2$$

Also:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dx$$

Wir berechnen $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dx$ durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= [\cos t \cdot \sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin t) \cdot \sin t \, dt \\ &= 0 + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 \, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt\end{aligned}$$

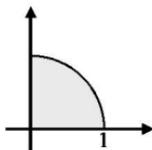
Daher:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\ 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

Das berechnete Integral ist ein Viertel der Fläche des Kreises mit Radius 1:



Beispiel 3 (Typ A)

$$\int_0^1 e^{3x+2} dx$$

Lösung:

Substitution:

$$3x+2 = t$$

$$\frac{dt}{dx} = (3x+2)' = 3, \text{ also } dx = \frac{1}{3} dt$$

$$x = 0, \text{ also } t = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$x = 1, \text{ also } t = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

Eingesetzt:

$$\int_0^1 e^{3x+2} dx = \int_2^5 e^t \frac{1}{3} dt = \left[\frac{1}{3} e^t \right]_2^5 = \frac{1}{3} e^5 - \frac{1}{3} e^2 \approx 47,01$$

Also:

$$\int_0^1 e^{3x+2} dx \approx 47,01$$

Beispiel 4 (Typ B)

$$\int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx$$

Lösung:

Der Ausdruck in der Wurzel hat als Ableitung den Faktor vor der Wurzel: $(1+x^2)' = 2x$.

$$\int_0^1 \underbrace{2x}_{\text{Ableitung}} \underbrace{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z = 1+x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = (1+x^2)' = 2x, \text{ also } dz = 2x dx$$

$$x = 0, \text{ also } z = 1+0^2 = 1$$

$$x = 1, \text{ also } z = 1+1^2 = 2$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2} 2x dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{z} dz \\ &= \int_1^2 z^{0,5} dz \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{z^{0,5+1}}{0,5+1} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{z^{3/2}}{3/2} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2}{3} \sqrt{z^3} \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{8} - \frac{2}{3}$$

$$\approx 1,219$$

Also:

$$\int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx \approx 1,219$$

Beispiel 5 (Typ B)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$$

Lösung:

Die Ableitung von Sinus ist Kosinus:

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^2}_{\text{Ableitung}} \cos x dx$$

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z = \sin x$$

$$\frac{dz}{dx} = (\sin x)' = \cos x, \text{ also } dz = \cos x \, dx$$

$$x = 0, \text{ also } z = \sin 0 = 0$$

$$x = \pi/2, \text{ also } z = \sin \pi/2 = 1$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx &= \int_0^1 z^2 \, dz \\ &= \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}$$

Eine weitere Herleitung der Substitutionsregel

Wir betrachten nun eine weitere Begründung der Substitutionsregel. Sie beruht auf dem Hauptsatz.

Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion $f(x)$. Dann besagt der Hauptsatz:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Wir berechnen auch das Integral

$$\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad (\text{wobei } a = g(t_a) \text{ und } b = g(t_b))$$

mit Hilfe des Hauptsatzes. Dazu müssen wir eine Stammfunktion von $f(g(t)) \cdot g'(t)$ finden. Nun ist nach der Kettenregel:

$$(F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Daher ist $F(g(t))$ eine Stammfunktion von $f(g(t)) \cdot g'(t)$.

Also:

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt &= F(g(t_b)) - F(g(t_a)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Die Integrale

$$\int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x) dx$$

sind daher gleich (beide sind $F(b) - F(a)$).

Die Substitutionsregel ist damit bewiesen.

Aufgaben

Einfache Integrationsregeln

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^2 (2x^4 + 3x^7 - 2x) dx$

b) $\int_1^4 \left(3x + \frac{2}{x^2} \right) dx$

c) $\int_{-1}^0 (x + 5e^x) dx$

d) $\int_{-1}^1 (2 \sin x + 4 \cos x) dx$

e) $\int_0^{\pi} (0,5e^x + 3 \sin x) dx$

f) $\int_0^a (x^2 - 2 \sin x) dx$

Partielle Integration

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

c) $\int_0^{0,5} \arcsin x dx$

d) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

e) $\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^a x \cos x \, dx$ b) $\int_0^a x^2 \cos x \, dx$ c) $\int_0^a e^x \cos x \, dx$

d) $\int_0^a \cos^3 x \, dx$ e) $\int_0^a \cos^4 x \, dx$ f) $\int_1^a \frac{\ln x}{x} \, dx$

g) $\int_1^a x \ln x \, dx$ h) $\int_1^a x^n \ln x \, dx$

Substitution

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^1 (x+1)^{10} \, dx$ b) $\int_0^1 (2x+3)^{10} \, dx$

c) $\int_0^1 \cos(3x+1) \, dx$ d) $\int_0^1 e^{5x+2} \, dx$

e) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos x \, dx$ f) $\int_1^2 \frac{3x^2}{1+x^3} \, dx$

g) $\int_0^1 x\sqrt{x+1} \, dx$ h) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$

6. Unbestimmte Integrale

6.1 Definition des unbestimmten Integrals

Der Hauptsatz besagt, dass die Berechnung eines Integrals im Wesentlichen darauf hinausläuft, eine *Stammfunktion* zu finden.

Das „**unbestimmte Integral**“ ist ein Symbol für eine Stammfunktion und wird als Integral ohne Integrationsgrenzen geschrieben:

$$\int f(x) dx = \text{Stammfunktion von } f(x)$$

Es ist ein praktisches Symbol bei der Berechnung von Stammfunktionen. Die lästigen Integrationsgrenzen kann man sich dabei ersparen.

Leider sind Stammfunktionen nicht eindeutig bestimmt. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so kann man noch eine beliebige Konstante C addieren. Man bekommt wieder Stammfunktion von $f(x)$:

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

Das unbestimmte Integral

$$\int f(x) dx$$

ist eine *beliebige* Stammfunktion des Integranden $f(x)$.
Deswegen schreibt man:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Hierbei ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, und C eine Konstante, die sogenannte „Integrationskonstante“.

6.2 Regeln für unbestimmte Integrale

Für unbestimmte Integrale gelten analoge Regeln wie bei den üblichen Integralen. Auch ihre Anwendung ist entsprechend.

Integrationsregeln

1. Die Summenregel

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2. Die Faktorregel

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

3. Die partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

4. Die Substitutionsregel

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad (\text{wo } x = g(t), \\ dx = g'(t) dt)$$

Begründungen der Regeln 1, 2 und 3

Wir prüfen, ob die rechte Seite eine Stammfunktion des Integranden im linken Integral ist. Wir führen dies exemplarisch für die Faktorregel durch:

$$(c \int f(x) dx)' = c (\int f(x) dx)' = c f(x)$$

Also ist $c \int f(x) dx$ eine Stammfunktion von $c f(x)$.

Begründung der Substitutionsregel

Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann wird die linke Seite der Substitutionsregel:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Im Hinblick auf die rechte Seite (die bloß mit der Variablen t zu tun hat) drücken wir x durch t aus. Dazu setzen wir $x = g(t)$ ein:

$$\int f(x) dx = F(g(t)) + C$$

Es ist nun zu zeigen, dass:

$$F(g(t)) + C = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

Wir müssen also nachzuweisen, dass $F(g(t)) + C$ eine Stammfunktion des Integranden $f(g(t)) \cdot g'(t)$ ist.

Dazu leiten wir ab, wobei wir die Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned} (F(g(t)) + C)' &= (F(g(t)))' + 0 \\ &= F'(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= f(g(t)) \cdot g'(t) \end{aligned}$$

Damit ist die Substitutionsregel bewiesen.

6.3 Beispiele für die Integrationsregeln

Beispiel 1 (Summenregel)

$$\int (x^2 + x) dx$$

Lösung:

Nach der Summenregel ist:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x) dx &= \int x^2 dx + \int x dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 + \frac{x^2}{2} + C_2 \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \quad (C = C_1 + C_2)\end{aligned}$$

Also

$$\int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

Bemerkung zu den Integrationskonstanten:

Um eine unübersichtliche Flut von Integrationskonstanten zu vermeiden, kann man sich auf eine einzige Integrationskonstante beschränken, die man erst am Schluss (nach Auflösen des letzten Integrals) schreibt. Das Integral aus Beispiel 1 kann daher wie folgt berechnet werden:

$$\int (x^2 + x) dx = \int x^2 dx + \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

Beispiel 2 (Faktorregel)

$$\int 5x^2 dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int 5x^2 dx &= 5 \int x^2 dx \\ &= 5 \cdot \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{5}{3} x^3 + C\end{aligned}$$

Also:

$$\int 5x^2 dx = \frac{5}{3} x^3 + C$$

Beispiel 3 (partielle Integration)

$$\int x \cdot e^x dx$$

Lösung:

Wenn man den Faktor x ableitet, vereinfacht er sich zu 1. Daher empfiehlt es sich, den zweiten Faktor zu integrieren. Eine Stammfunktion für e^x ist e^x selber. Also:

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x dx \\ &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= x \cdot e^x - \int e^x dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + C \\ &= (x-1) \cdot e^x + C\end{aligned}$$

$$\text{Daher: } \int x \cdot e^x dx = (x-1) \cdot e^x + C$$

Beispiel 4 (partielle Integration)

$$\int \ln x dx$$

Lösung:

Vorbemerkungen:

Auf den ersten Blick scheint eine partielle Integration hier nicht anwendbar, denn im Integral taucht kein Produkt auf. Man kann aber jeden Term als Produkt mit dem Faktor 1 auffassen. Insbesondere kann man

$$\ln x = 1 \cdot \ln x$$

schreiben.

Den Faktor 1 kann man leicht integrieren: x ist eine Stammfunktion.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln x - x + C \\ &= x \cdot (\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \int \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$$

Beispiel 5 (partielle Integration)

$$\int \sin^2 x \, dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin x \, dx \\ &= (-\cos x) \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cdot (\sin x)' \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx\end{aligned}$$

Also

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx$$

Wir lösen die Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, die nichts anderes ist als der Satz von Pythagoras in trigonometrischer Verkleidung, nach $\cos^2 x$ auf. Das Ergebnis

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

setzen wir ein in das rechte Integral der Gleichung:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx\end{aligned}$$

Wir erhalten die Gleichung

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx.$$

Das gesuchte Integral kann nun als Unbekannte in dieser Gleichung aufgefasst werden. Wir lösen nach dem Integral auf:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$2 \cdot \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

Also:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

Beispiel 6 (Substitution)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Lösung:

Substitution:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t, \text{ also } dx = \cos t \, dt$$

Also:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, dt$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{\cos t} \cos t \, dt \\ &= \int 1 \, dt \\ &= t + C \end{aligned}$$

Nun muss t wieder durch x ausgedrückt werden. Wegen $x = \sin t$, ist $t = \arcsin x$. Daher:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = t + C = \arcsin x + C$$

Also:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

Beispiel 7 (Substitution)

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Lösung:

Substitution:

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t, \text{ also } dx = \cos t \, dt$$

Also:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt$$

Wir berechnen $\int \cos^2 t \, dx$ durch partielle Integration (vergleiche Beispiel 5):

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \sin t \cdot \cos t - \int \sin t \cdot (-\sin t) \, dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + \int \sin^2 t \, dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + \int (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + \int 1 \, dt - \int \cos^2 t \, dt \\ &= \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt\end{aligned}$$

Also

$$\int \cos^2 t \, dt = \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt.$$

Nach dem Integral aufgelöst:

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t) + C.$$

Damit

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t) + C$$

Nun muss t wieder durch x ausgedrückt werden. Wegen $x = \sin t$, ist $t = \arcsin x$. Daher:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t) + C$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} + t) + C \\ &= \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) + C \end{aligned}$$

Also:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) + C$$

Beispiel 8 (Substitution)

$$\int e^{3x+2} dx$$

Lösung:

Substitution:

$$3x + 2 = t$$

$$\frac{dt}{dx} = (3x + 2)' = 3, \text{ also } dx = \frac{1}{3} dt$$

Eingesetzt:

$$\int e^{3x+2} dx = \int e^t \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C$$

Drücke t wieder durch x aus, $t = 3x + 2$:

$$\begin{aligned} \int e^{3x+2} dx &= \frac{1}{3} e^t + C \\ &= \frac{1}{3} e^{3x+2} + C \end{aligned}$$

Also: $\int e^{3x+2} dx = \frac{1}{3} e^{3x+2} + C$

Beispiel 9 (Substitution)

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx = ?$$

Lösung:

Der Ausdruck in der Wurzel hat als Ableitung den Faktor vor der Wurzel: $(1+x^2)' = 2x$.

$$\int \underbrace{2x}_{\text{Ableitung}} \underbrace{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z = 1 + x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = (1+x^2)' = 2x, \text{ also } dz = 2x dx$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \int 2x\sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+x^2} 2x dx \\ &= \int \sqrt{z} dz \\ &= \int z^{0,5} dz \\ &= \frac{z^{0,5+1}}{0,5+1} + C \\ &= \frac{z^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{z^3} + C \end{aligned}$$

Drücke z wieder durch x aus, $z = 1 + x^2$:

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2} dx &= \frac{2}{3}\sqrt{z^3} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C\end{aligned}$$

Also: $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$

Beispiel 10 (Substitution)

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

Lösung:

Die Ableitung von Sinus ist Kosinus:

$$\int (\underbrace{\sin x}_{\text{Ableitung}})^2 \underbrace{\cos x}_{\text{Ableitung}} dx$$

Daher bietet sich die folgende Substitution an:

$$z = \sin x$$

$$\frac{dz}{dx} = (\sin x)' = \cos x, \text{ also } dz = \cos x dx$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos x dx &= \int z^2 dz \\ &= \frac{z^3}{3} + C\end{aligned}$$

Drücke z wieder durch x aus, $z = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Das Integral ist damit berechnet.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int (x^3 + 5x^2 - 3x) dx$

b) $\int \left(2x + \frac{3}{x^2} \right) dx$

c) $\int (x + 4e^x) dx$

d) $\int (2\sin x + 4\cos x) dx$

e) $\int (3\sin x + 2e^x) dx$

f) $\int (x^2 - 2\sin x) dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x^2 \sin x dx$

b) $\int \arcsin x dx$

c) $\int \cos^2 x dx$

d) $\int \sin x \cos x dx$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x \cos x dx$

b) $\int x^2 \cos x dx$

c) $\int e^x \cos x dx$

d) $\int \cos^3 x dx$

e) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

f) $\int x \ln x dx$

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int (2x + 3)^{10} dx$

b) $\int \cos(3x + 1) dx$

c) $\int e^{5x+2} dx$

d) $\int \sin^4 x \cos x dx$

e) $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$

f) $\int x\sqrt{x+1} dx$

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

c) $\int \frac{1}{1-x} dx$

Lösungen

Der Hauptsatz

1. a) 19,5 b) 12 c) $1,5a^2 + 2a$

2.

a) 17,5 b) $0,5a^2 + a$ c) -0,5 d) 0

e) $\frac{2}{3}$ f) 0 g) 2,5 h) 0

i) 2 j) $e - 1 = 1,718\dots$ k) 0,75 l) 2

m) 18 n) $4b^2 + 5b$

Drehkörper

1. 47,1238898... cm³

2. ca. 217,683 dm³

3. ca. 54,454 dm³

Einfache Integrationsregeln

1. a) 104,8 b) 24 c) 2,6606... d) 6,7317...

e) 17,0703... f) $\frac{a^3}{3} + 2 \cos a - 2$

Partielle Integration

1. a) π b) $\pi^2 - 4$ c) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 = 0,1278\dots$

d) $\frac{\pi}{2} = 1,5707\dots$ e) 0

2.

a) $a \sin a + \cos a - 1$

b) $(a^2 - 2) \sin a + 2a \cos a$

c) $0,5(\sin a + \cos a)e^a - 0,5$

d) $\frac{1}{3}(2 + \cos^2 a) \sin a$

e) $\frac{1}{4} \cos^3 a \sin a + \frac{3}{8}(a + \sin a \cos a)$

f) $\frac{1}{2}(\ln a)^2$

g) $\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$

h) $\frac{a^{n+1}}{n+1} \ln a - \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Substitution

1.

a) 186,090909...

b) 2.211.408,090909...

c) -0,5327578267...

d) 217,8488204659...

e) 0

f) 1,504077396776...

g) 0,643790283299...

h) 0

Unbestimmte Integrale

1.

$$\text{a) } \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$$

$$\text{b) } x^2 - \frac{3}{x} + C$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{2} + 4e^x + C$$

$$\text{d) } -2 \cos x + 4 \sin x + C$$

$$\text{e) } -3 \cos x + 2e^x + C$$

$$\text{f) } \frac{x^3}{3} + 2 \cos x + C$$

2.

$$\text{a) } (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C$$

$$\text{b) } x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\text{c) } \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$\text{d) } \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

3.

$$\text{a) } x \sin x + \cos x + C$$

$$\text{b) } 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C$$

$$\text{c) } \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$$

$$\text{d) } \frac{1}{3}(2 + \cos^2 x) \sin x + C$$

$$\text{e) } \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

f) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

4.

a) $\frac{(2x+3)^{11}}{22} + C$ b) $\frac{1}{3} \sin(3x+1) + C$

c) $\frac{1}{5} e^{5x+2} + C$ d) $\frac{1}{5} \sin^5 x + C$

e) $\ln(1+x^2) + C$ f) $\left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1) \right) \sqrt{x+1} + C$

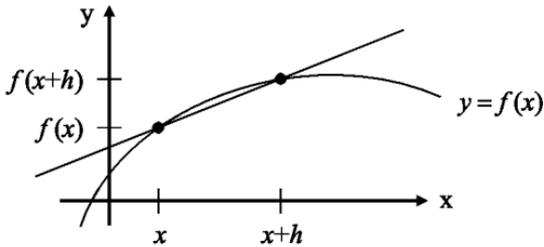
5.

a) $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ b) $\arcsin \frac{x}{a} + C$ c) $-\ln(1-x) + C$

Hinweis: Ergebnisse, die nicht glatt aufgehen, sind in der Regel *gerundet* oder mit Auslassungspunkten (...) angegeben.

Anhang 1:
Differentialrechnung
im Überblick

I. Begriff der Ableitung



$f'(x)$ = Steigung der Tangente an f im Punkte x
= Grenzwert der Steigungen der Sekanten

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

II. Berechnung der Ableitung

Grundlegende Ableitungen

$$(c)' = 0$$

$$(ax+b)' = a$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Ableitungsregeln

Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Faktorregel

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

$$[f(g(x))]'' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Weitere wichtige Ableitungen

Aus den grundlegenden Ableitungen können mithilfe der Ableitungsregeln weitere wichtige Ableitungen berechnet werden:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

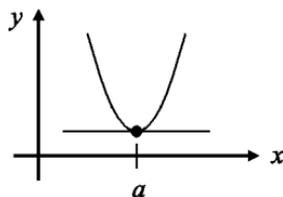
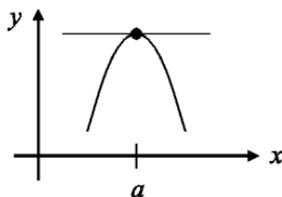
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

III. Anwendungen

Relative Maxima und Minima



1. Wenn f bei a ein relatives Maximum oder Minimum hat, so ist:

$$f'(a) = 0.$$

2. Wenn

$$f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) < 0,$$

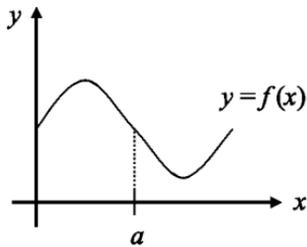
dann hat f bei a ein *lokales Maximum*.

3. Wenn

$$f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) > 0,$$

dann hat f bei a ein *lokales Minimum*.

Wendepunkte

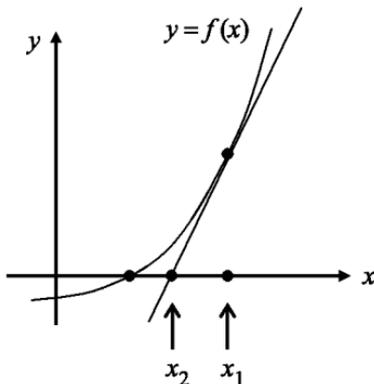


Wenn $f''(a)=0$ und $f'''(a) \neq 0$, dann hat f einen Wendepunkt in a .

Newton-Verfahren

Aus dem Näherungswert x_1 für eine Lösung von $f(x)=0$ ergibt sich ein verbesserter Wert x_2 durch:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



Reihen

Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

Arkustangensreihe

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Logarithmusreihe

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \text{ beliebig})$$

Sinusreihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \text{ beliebig})$$

Kosinusreihe

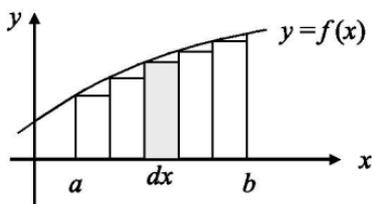
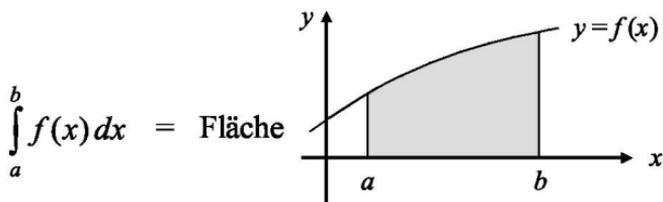
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \text{ beliebig})$$

Maclaurinsche Reihe

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Anhang 2:
Integralrechnung
im Überblick

I. Begriff des Integrals



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Summe aller Rechtecksflächen } f(x) dx$$

II. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Hierbei gilt:

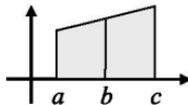
$$F'(x) = f(x)$$

(F heißt *Stammfunktion* von f .)

III. Integrationsregeln

1. Regel über Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



2. Summenregel

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

3. Faktorregel

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

4. Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

5. Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

(wobei $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$, $a = g(t_a)$, $b = g(t_b)$)

IV. Unbestimmte Integrale

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

F ist eine Stammfunktion von f :

$$F'(x) = f(x)$$

C ist eine Konstante (*Integrationskonstante*).

V. Regeln für unbestimmte Integrale

1. Die Summenregel

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2. Die Faktorregel

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

3. Die partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

4. Die Substitutionsregel

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad (\text{wo } x = g(t), \\ dx = g'(t) dt)$$

