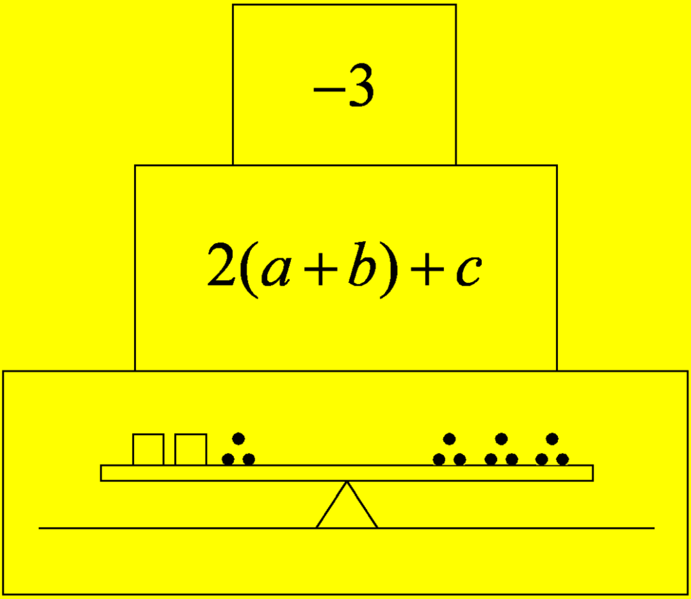
Elementare

Gleichungen

Alexander Roux



Elementare Gleichungen

Elementare
Gleichungen

Mit einer Einführung in das

Rechnen mit negativen Zahlen und Buchstaben

Alexander Roux

Impressum

www.a-roux.de
ISBN: 978-1544165844

Selbstverlag, Alexander Roux
c/o Das Dojo Köln, Luxemburger Straße 291, 50939 Köln

Druck und Vertrieb: Kindle Direct Publishing
Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy,
L-1855 Luxemburg

Vorwort

Dieses kleine Buch verfolgt das Ziel, den Leser mit dem Lösen einfacher Gleichungen vertraut zu machen. Dazu müssen drei wesentliche Aspekte betrachtet werden:

- Das Rechnen mit negativen Zahlen
- Das Rechnen mit Buchstaben (*Terme, Rechenausdrücke*)
- Der Gleichgewichtsgedanke (*Algebra*)

Da hatte es al-Chwarizmi (ca. 780–850) leichter – er, der die große Bedeutung des Gleichgewichtsgedankens als einer der Ersten klar erkannte. Er benutzte keine negativen Zahlen und kannte keine abstrakte Buchstabenrechnung. Die Idee des Gleichgewichts wird bereits im ersten Buch von Euklids berühmten *Elementen* beschrieben (ca. 300 v. Chr.). Die *Grundsätze* 2,3, 6 und 7 zum Beispiel lauten:

> *Gleichem das Gleiche hinzugefügt ergibt Gleiches.*
> *Gleichem das Gleiche weggenommen ergibt Gleiches.*
> *Gleiches verdoppelt ergibt Gleiches.*
> *Gleiches halbiert ergibt Gleiches.*

Hintergründe und Herleitungen werden dem Leser nicht vorenthalten. Sie sind die Voraussetzung für ein wirkliches Verständnis, sind anregend und erweitern den Blick. Seit Thales von Milet (ca. 624–547 v. Chr.) ist die Mathematik eine Wissenschaft, die klare Begriffe und Begründungen verlangt.

Die Lektüre des Buches erfordert nur wenige Vorkenntnisse: Grundrechenarten, gelegentlich auch Dreisatz und Brüche.

Am Ende jedes Kapitels befinden sich Übungsaufgaben zu allen behandelten Themen. Die Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben ist unverzichtbar, wenn man den Stoff lernen möchte.

Es gibt eine ständig steigende Tendenz in den Schulen des Westens, die Grundideen in der Mathematik durch eine Vielzahl von vermeintlich „praktischen“ oder „alltäglichen“ Beispielen zu verdunkeln.
Der vorliegende Text möchte einen Beitrag dazu leisten, die wesentlichen Gedanken wieder deutlich erkennbar zu machen.

Dr. A. Roux
Brühl, Februar 2017

Nachtrag vom 04.03.2025

Dank der Hinweise von Herrn Gunnar Heiden konnten zahlreiche Druckfehler korrigiert werden.

Inhalt

Vorwort 5

Inhalt 7

1. Einführung 9
   Aufgaben 13

2. Negative Zahlen 14
   2.1 Was sind negative Zahlen? 14
   2.2 Negative Zahlen im Alltag 16
   2.3 Addition mit negativen Zahlen 17
   2.4 Subtraktion mit negativen Zahlen 19
   2.5 Verschmelzung von Addition und Subtraktion........23
   2.6 Addition und Subtraktion mehrerer Zahlen 24
   2.7 Klammern subtrahieren und addieren 26
   2.8 Beispiele zur Addition und Subtraktion 28
   2.9 Multiplikation mit negativen Zahlen........................31
   2.10 Division zweier Zahlen 34
   2.11 Potenzen 37
   2.12 Wissenschaftliche Notation von Zahlen 49
   Aufgaben 50

3. Buchstabenrechnung 59
   3.1 Addition und Subtraktion von Buchstaben 60
   3.2 Reine Multiplikation von Buchstaben.......................63
   3.3 Multiplikation von Summen und Differenzen 64
   3.4 Gemischte Beispiele 68
   3.5 Die binomischen Formeln 73
   3.6 Anwendungen der 1. und 2. binomischen Formel ...78
   3.7 Anwendungen der 3. binomischen Formel 80
   Aufgaben 83

4. Gleichungen 90
   4.1 Die Methode 90
   4.2 Beispiele 91
   4.3 Addition von Brüchen mit Hilfe von Gleichungen ..93
   4.4 Bruchgleichungen 95

4.5 Formeln umstellen 101
Aufgaben 104

5. Anwendungen 109
5.1 Textaufgaben 109
5.2 Dreisatz und Verhältnisgleichungen 113
Aufgaben 120

Lösungen 124

Anhang: Zusammenfassungen 143
Zusammenfassung 1: Negative Zahlen 144
Zusammenfassung 2: Buchstabenrechnen 151
Zusammenfassung 3: Gleichungen 155
Zusammenfassung 4: Bruchrechnen 162

1. Einführung

Wir betrachten das folgende Zahlenrätsel: Wenn man eine Zahl verdoppelt und drei hinzufügt, ergibt sich neun. Welche Zahl ist es? In die Formelsprache übersetzt wird daraus

$$2x+3=9.$$

Das ist eine *Gleichung*. Die gesuchte (und zunächst *unbekannte*) Zahl wird mit einem *Buchstaben* bezeichnet. Die Benutzung von Buchstaben in Rechenausdrücken und Gleichungen ist vom französischen Juristen und Mathematiker François Viète (1540–1603) eingeführt worden.

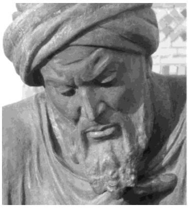
François Viète

Auch *bekannte* Zahlen hat er durch Buchstaben dargestellt und so die uns heute so selbstverständlich erscheinenden allgemeinen Formeln ermöglicht, wie z. B.

$$A = a \cdot b$$

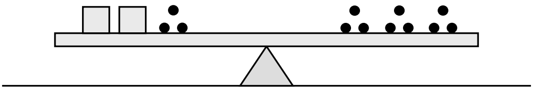
für die Fläche A eines Rechtecks mit der Länge a und der Breite b.

Wie wird nun die obige Gleichung gelöst? Die Grundidee ist verblüffend einfach und anschaulich: der Gleichgewichtsgedanke. Er ist bereits in Euklids *Elementen* formuliert (ca. 300 v. Chr.). Im *kurzgefassten Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen* *und Ausgleichen* von al-Chwarizmi (780 – 853) steht dieser Gleichgewichtsgedanke im Mittelpunkt.

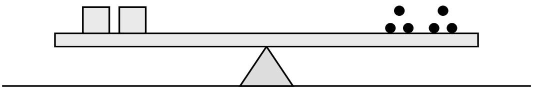


al-Chwarizmi

Anhand einer Waage kann die Methode gut verstanden werden. Wir stellen uns die Zahl 3 als drei Äpfel vor, die Zahl 9 als neun Äpfel und x als eine undurchsichtige Box, die Äpfel enthält. $2x$ kann als zwei in Form und Inhalt identische Boxen gedeutet werden. Die Tatsache, dass $2x+3$ gleich 9 ist, zeigt sich im Gleichgewicht der Waage:

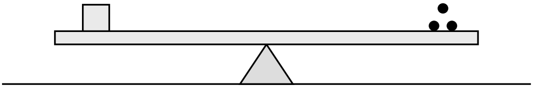


Nimmt man auf beiden Seiten der Waage drei Äpfel weg, so bleibt das Gleichgewicht erhalten:



Wir haben damit einen von Euklids Grundsätzen benutzt: *Gleichem das Gleiche weggenommen ergibt Gleiches*.

Nehmen wir nun auf beiden Seiten jeweils die Hälfte, so bleibt die Waage immer noch im Gleichgewicht:



Wir haben wiederum einen Grundsatz von Euklid angewendet: *Gleiches halbiert ergibt Gleiches*.

Auf der linken Seite befindet sich nur die Box und auf der rechten Seite nur Äpfel, nämlich drei. Die Box muss also drei Äpfel enthalten. In der Formelsprache:

$$x = 3.$$

Es ist immer das strategische Ziel, dass nur eine Box alleine auf einer Seite übrig bleibt. Das Gleichgewicht muss dabei stets erhalten bleiben.

An dieser Stelle könnte der Leser schon einfache Gleichungen selbständig lösen.

Gleichungen können auch negative Zahlen und komplizierte Rechenausdrücke (Terme) enthalten. Beides wird in Kapitel 2 und 3 dargelegt. Im vierten Kapitel werden Gleichungen betrachtet, sowohl einfache als auch kompliziertere. Textaufgaben sind Gegenstand des fünften Kapitels.

Historische Anmerkungen zur Schreibweise

Wir schließen diese Einführung mit Hintergrundinformationen zu einigen mathematischen Symbolen, die bei Gleichungen eine Rolle spielen.

Das **Gleichheitszeichen** = ist eine Erfindung des walisischen Arztes und Mathematikers Robert Recorde (1510 – 1558). Es stellt zwei parallele Strecken dar. An der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens haben die beiden Strecken den *gleichen*

Abstand. Diese Sichtweise führt übrigens auch zwanglos zu den Symbolen < und > (für *kleiner als* bzw. *größer als*).

Robert Recorde

Das **Plus**-Zeichen + ist als Überbleibsel des t von *et* (lat. für *und*) entstanden. Das **Minus**-Zeichen – ist als Abkürzung aus dem lateinischen *minus* (*weniger*) entstanden: Das Wort wurde zunächst als m mit einem Überstrich abgekürzt ($\bar{m}$), davon ist schließlich nur der Strich übrig geblieben.
In gedruckter Form tauchen die Symbole + und – erstmals 1489 in dem Buch *Mercantile Arithmetic* oder *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft* von Johannes Widmann (ca. 1460 – 1498) auf.

Die **Multiplikation** durch nebeneinander Schreiben der Faktoren erscheint erstmals im 8. bis 10. Jahrhundert in Indien.
Der Multiplikationspunkt wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) eingeführt.

Im elementaren Rechnen wird ein Doppelpunkt für die **Division** geschrieben (John Johnson, 1663). Dagegen wird in der abstrakteren Mathematik (François Viète, 1540 – 1603) die Division als Bruch geschrieben. Moderne Brüche wurden im 7. Jahrhundert in Indien eingeführt. Die Araber haben den Bruchstrich zwischen Zähler und Nenner hinzugefügt.

Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen:

1. Löse die Gleichung $2x+4 = 18$.
2. Löse die Gleichung $6x+3 = 33$.
3. Löse die Gleichung $5x+8 = 13$.
4. Löse die Gleichung $3x+9 = 18$.
5. Löse die Gleichung $6x+9 = 45$.
6. Löse die Gleichung $4x+9 = 29$.
7. Löse die Gleichung $7x+4 = 25$.
8. Löse die Gleichung $2x+7 = 11$.
9. Löse die Gleichung $4x+8 = 36$.
10. Löse die Gleichung $6x+4 = 46$.

2. Negative Zahlen

Die *natürlichen* Zahlen 1, 2, 3, 4, usw. sind gewissermaßen naturgegeben; selbst Papageien, Raben und Menschenaffen können mit ihnen umgehen. Die *negativen* Zahlen wie –1, –2, –3, –4, usw. sind Erfindungen des Menschen, die den Zahlenbereich erweitern. Bei der Frage, wie man in dem erweiterten Zahlenbereich rechnen soll, lassen wir uns mehr oder weniger stillschweigend vom *Permanenzprinzip* von Hermann Hankel (1839 – 1873) leiten.

Hermann Hankel

Dieses Prinzip besagt Folgendes: Die allgemeinen Regeln, die im ursprünglichen Bereich gelten, sollen auch im erweiterten Bereich gültig sein.

2.1 Was sind negative Zahlen?

Negative Zahlen sind eine Erfindung des Inders Brahmagupta (598 – 668). Er stellte sie sich als **Schulden** vor, die normalen positiven Zahlen als Guthaben. Die negativen Zahlen hat er mit Querstrich geschrieben, so bedeutet z. B. $\overline{9}$ einen Schuldbetrag von neun Euro. Heute schreiben wir -9 statt $\overline{9}$. Der Querstrich wird heute noch in der Elementarteilchenphysik zur Bezeichnung von Antiteilchen benutzt. Zur Vermeidung sinnloser Rechenausdrücke wie $4+-9$ oder $4\cdot-9$ werden negative Zahlen oft in **Klammern** geschrieben: $4+(-9)$ bzw. $4\cdot(-9)$.

Das Wort *negativ* ist lateinischen Ursprungs und bedeutet *verneinend*. Es ist die Übersetzung der indischen Bezeichnung, die Brahmagupta eingeführt hat.

Seit den 1920er Jahren gibt es noch eine andere einfache Möglichkeit, die negativen Zahlen zu deuten. Der englische Physiker Paul Dirac (1902 – 1984) hat damals die Existenz der sogenannten

Paul Dirac

Antimaterie vorhergesagt. Zu jedem Teilchen gibt es ein Antiteilchen, das umgekehrte Ladungen hat. So hat das elektrisch positiv geladen Proton p das negativ geladene Antiproton $\overline{\mathrm{p}}$ als Antiteilchen. Treffen Teilchen und das zugehörige Antiteilchen aufeinander, so zerstrahlen sie. Genauso wie sich Guthaben und Schulden aufheben. Man kann sich heutzutage eine negative Drei als drei Antimaterie-Äpfel vorstellen.

Das Rechnen beruht auf den vier Grundrechenarten:

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division

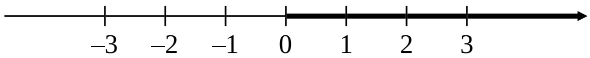
Wir müssen also vor allem diese vier Grundrechenarten mit den negativen Zahlen betrachten. Ferner werden wir noch Potenzen behandeln.

2.2 Negative Zahlen im Alltag

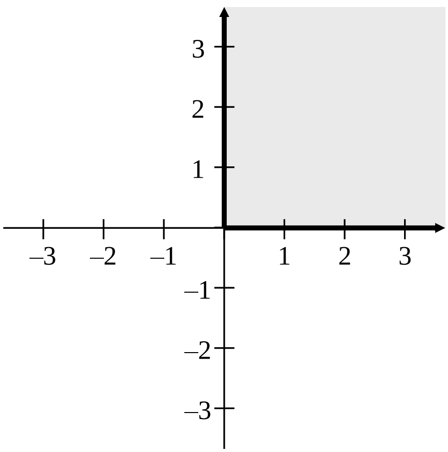
Die Schulden sind die wohl bekanntesten negativen Zahlen. Man sagt, dass man „im Minus“ steht, wenn das Konto überzogen ist. Aber auch bei den Temperaturen im Winter haben wir es mit negativen Zahlen zu tun, z. B. Frost bei –3° Celsius.

Kellergeschosse werden gelegentlich mit negativen Zahlen bezeichnet. Das zweite Kellergeschoss wäre dann die Etage –2.

In der Geometrie wäre der Zahlenstrahl ohne die negativen Zahlen nur ein Halbstrahl:



Und bei einem zweidimensionalen Koordinatensystem hätte man beim Verzicht auf die negativen Zahlen nur ein Viertel der Ebene erfasst:



2.3 Addition mit negativen Zahlen

Stellt man sich die negativen Zahlen als Schulden vor und die normalen positiven als Guthaben, so kann die Addition gut verstanden werden. Wir fassen zunächst alle vier möglichen Fälle ins Auge:

1. Guthaben + Guthaben
2. Guthaben + Schulden
3. Schulden + Guthaben
4. Schulden + Schulden

Die Fälle 2 und 3 sind identisch, da sie sich lediglich in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden. Die Summen sind gleich.
Der erste Fall betrifft die wohlbekannte Situation der Addition zweier positiver Zahlen.

Es müssen also folgende zwei Fälle genauer untersucht werden:

a) Guthaben + Schulden
b) Schulden + Schulden

a) Guthaben + Schulden

Beispiel 1 (mehr Guthaben als Schulden)

$3\,€$ Guthaben $+\ 2\,€$ Schulden $=\ 1\,€$ Guthaben

Anders geschrieben:

$3+\overline{2} = 1$ (abstrakt, altindische Schreibweise)

$3+(-2) = 1$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Die Schulden bringen einen Teil des Guthabens zum Verschwinden, man rechnet also:

$$3+(-2) = 3-2 = 1.$$

Man hat $2\,€$ *Guthaben* von $3\,€$ Guthaben *abgezogen*. Es gilt offenbar also die allgemeine Regel:

Schulden hinzufügen ist das gleiche wie Guthaben abziehen.

Bildlich ausgedrückt:

$$\square + \text{Schulden} \quad = \quad \square - \text{Guthaben}$$

$$\square + (-2) \quad = \quad \square - 2$$

Beispiel 2 (mehr Schulden als Guthaben)

$3\,€\ \text{Guthaben} + 7\,€\ \text{Schulden} = 4\,€\ \text{Schulden}$

Anders geschrieben:

$3+\overline{7} = \overline{4}$ (abstrakt, altindische Schreibweise)

$3+(-7) = -4$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Das Guthaben bringt einen Teil der Schulden zum Verschwinden, man rechnet also:

$$7-3 = 4.$$

Es bleibt aber bei *Schulden*, die 4 ist also mit einem Minuszeichen zu versehen.

b) Schulden + Schulden

Beispiel

$4\,€\ \text{Schulden} + 5\,€\ \text{Schulden} = 9\,€\ \text{Schulden}$

Anders geschrieben:

$\overline{4}+\overline{5} = \overline{9}$ (abstrakt, altindische Schreibweise)

$-4+(-5) = -9$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Wir fassen zusammen:

$$\text{Guthaben} + \text{Schulden} \;=\; \begin{cases} \text{Guthaben, wenn Guthaben überwiegt} \\ \text{Schulden, wenn Schulden überwiegen} \end{cases}$$

$$\text{Schulden} + \text{Schulden} \;=\; \text{Schulden}$$

Beispiele :

$3 + (-2) \;=\; 1$

$3 + (-7) \;=\; -4$

$-4 + (-5) \;=\; -9$

Regel

Schulden addieren $=$ Guthaben abziehen

$$3 + (-2) \;=\; 3 - 2$$

2.4 Subtraktion mit negativen Zahlen

Wir stellen uns die negativen Zahlen wieder als Schulden vor und die normalen positiven Zahlen als Guthaben. Nun gehen wir alle vier möglichen Fälle durch, vom einfachen zum schwierigen:

a) Guthaben – Guthaben
b) Schulden – Guthaben
c) Schulden – Schulden
d) Guthaben – Schulden

a) Guthaben – Guthaben

Beispiel 1 (kleines Guthaben wird abgezogen)

$5\,€ \text{ Guthaben} - 3\,€ \text{ Guthaben} \;=\; 2\,€ \text{ Guthaben}$

Anders (abstrakt) geschrieben:

$$5-3 = 2$$

Beispiel 2 (großes Guthaben wird abgezogen)

5 € Guthaben $-\,9$ € Guthaben $=$ 4 € ***Schulden***

Anders geschrieben:

$5-9 = \overline{4}$ (abstrakt, altindische Schreibweise)

$5-9 = -4$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Das Guthaben von 5 € fällt weg, die restlichen 4 €, die noch abgezogen werden müssten, sind Schulden. Man rechnet also:

$$9-5 = 4.$$

Da es sich um *Schulden* handelt, muss die 4 mit einem Minuszeichen versehen werden.

b) Schulden – Guthaben

Beispiel

4 € Schulden $-\,3$ € Guthaben $=$ 7 € Schulden

Anders geschrieben:

$\overline{4}-3 = \overline{7}$ (abstrakt, altindische Schreibweise)

$-4-3 = -7$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Schulden von 4 € liegen vor, *zusätzlich* werden noch 3 € abgezogen, die Schulden vergrößern sich damit. Man rechnet also:

$$4+3 = 7.$$

Eine andere Erklärung ist mithilfe der oben besprochenen Regel

$$\text{Schulden addieren} = \text{Guthaben abziehen}$$

möglich:

$$-4-3 = -4+(-3) = -7,$$

wobei nun zwei Schuldbeträge zu addieren sind.

c) Schulden – Schulden

Beispiel 1 (kleine Schulden werden abgezogen)

$9\,€ \text{ Schulden} - 4\,€ \text{ Schulden} = 5\,€ \text{ Schulden}$

Anders geschrieben:

$\overline{9} - \overline{4} = \overline{5}$ (abstrakt, altindische Schreibweise)

$-9 - (-4) = -5$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Es werden 4 € Schulden weggenommen, erlassen. Man rechnet also:

$$9 - 4 = 5\,.$$

Wichtige Bemerkung:
Es ist einerlei, ob man 4 € Schulden abzieht, d. h. einen Schuldenerlass gewährt, oder ob man 4 € hinzufügt, d. h. ein Geschenk gibt. Ein Schuldenerlass ist ja in der Tat ein Geschenk. Also gilt offenbar die allgemeine Regel:

***Schulden abziehen* = *Guthaben hinzufügen*.**

Bildlich ausgedrückt:

$$\boxed{} - \text{Schulden} \quad = \quad \boxed{} + \text{Guthaben}$$

$$\boxed{} - (-2) \quad = \quad \boxed{} + 2$$

Beispiel 2 (große Schulden werden abgezogen)

$$\begin{aligned} 3\,€ \text{ Schulden} - 7\,€ \text{ Schulden} &= 3\,€ \text{ Schulden} + 7\,€ \text{ Guthaben} \\ &= 4\,€ \textit{ Guthaben} \end{aligned}$$

Anders geschrieben:

$\overline{3} - \overline{7} = \overline{3} + 7 = 4$ (abstrakt, altindisch)

$-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Bei der Berechnung haben wir die soeben besprochene Regel

Schulden abziehen = Guthaben hinzufügen.

angewendet.

d) Guthaben – Schulden

Nach der Regel haben wir:

$$\text{Guthaben} \mathbf{-\,Schulden} = \text{Guthaben} \mathbf{+\,Guthaben}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} 5\,€\ \text{Guthaben} - 3\,€\ \text{Schulden} &= 5\,€\ \text{Guthaben} + 3\,€\ \text{Guthaben} \\ &= 8\,€\ \text{Guthaben} \end{aligned}$$

Anders geschrieben:

$5 - \overline{3} = 5 + 3 = 8$ (abstrakt, altindische Schreibweise)

$5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ (abstrakt, moderne Schreibweise)

Wir fassen zusammen:

Subtraktion mit negativen Zahlen

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Guthaben} - \text{kleines Guthaben} &= \text{Guthaben} \\ \text{Guthaben} - \text{großes Guthaben} &= \text{Schulden} \\[1ex] \text{Schulden} - \text{Guthaben} &= \text{Schulden} \\[1ex] \text{Schulden} - \text{kleine Schulden} &= \text{Schulden} \\ \text{Schulden} - \text{große Schulden} &= \text{Guthaben} \\[1ex] \text{Guthaben} - \text{Schulden} &= \text{Guthaben} \end{aligned}}$$

Subtraktion mit negativen Zahlen (Forts.)

Beispiele :

$5-3 = 2$
$5-9 = -4$

$-4-3 = -4+(-3) = -7$

$-9-(-4) = -5$
$-3-(-7) = -3+7 = 4$

$5-(-3) = 5+3 = 8$

Regel
Schulden abziehen = Guthaben addieren

$$3-(-2) = 3+2$$

2.5 Verschmelzung von Addition und Subtraktion

Durch die Erfindung der negativen Zahlen kann eine Rechenaufgabe gleichzeitig eine Additions- und eine Subtraktionsaufgabe sein. Beispielsweise können wir nach der Regel

Schulden addieren = Guthaben abziehen

eine Subtraktion auch als Addition auffassen:

$$5-3 = 5+(-3)\,.$$

Deutlicher erscheint das Beispiel in altindischer Schreibweise der negativen Zahl:

$$5-3 = 5+\overline{3}\,.$$

Auch das Abziehen einer negativen Zahl lässt sich als Addition auffassen, nach der Regel

$$\text{Schulden abziehen} = \text{Guthaben addieren},$$

zum Beispiel

$$5-(-3) = 5+3.$$

Oder (die negative Zahl wieder altindisch geschrieben):

$$5-\overline{3} = 5+3.$$

Alle Subtraktionen können also als Additionen aufgefasst werden. Das Addieren ist verständlicher, es ist ein bloßes Zusammenfügen. Anschaulich bedeutet dies, dass man lediglich Äpfel und Antimaterie-Äpfel zusammenlegen muss, wobei sich jeweils ein Apfel und ein Anti-Apfel gegenseitig auslöschen.

Diese anschaulichen Ansätze werden beim Verständnis der Addition und Subtraktion von mehreren Zahlen nützlich sein.

2.6 Addition und Subtraktion mehrerer Zahlen

Möchte man mehrere normale positive Zahlen addieren, so kann man schrittweise vorgehen, und, von links nach rechts gehend, jeweils zwei Zahlen addieren:

$$\begin{aligned} 2+3+7+1 &= 5+7+1 \\ &= 12+1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Dieser Ansatz funktioniert auch, wenn sowohl Additionen als auch Subtraktionen vorkommen:

$$\begin{aligned} -3+2-6+8 &= -1-6+8 \\ &= -7+8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Man kann die Aufgabe auch auf andere Weise lösen. Um diese Methode zu verstehen, schreiben wir die Subtraktionen als Addition der entsprechenden negativen Zahlen (nach der Regel $\text{Guthaben abziehen} = \text{Schulden addieren}$):

$$-3+2-6+8 = (-3)+2+(-6)+8$$

Nun erscheint die Aufgabe als reine Additionsaufgabe. Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig. Wir werden zuerst die positiven Zahlen zusammenzählen, dann die negativen Zahlen. Aus beidem werden wir das Endergebnis berechnen:

$$\begin{aligned} -3+2-6+8 &= (-3)+2+(-6)+8 \\ &= 2+8+(-3)+(-6) \\ &= 10+(-9) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Das Vorgehen kann man kurz auch so notieren:

$$\begin{aligned} -3+2-6+8 &= 2+8-3-6 \\ &= 10-9 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Wir fassen die beiden Lösungswege in einem Beispiel zusammen:

Beispiel
Berechne $2-7-3+5-9+4$.

Lösung 1 (von links nach rechts)

$$\begin{aligned} 2-7-3+5-9+4 &= -5-3+5-9+4 \\ &= -8+5-9+4 \\ &= -3-9+4 \\ &= -12+4 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Lösung 2 (positive und negative Zahlen getrennt rechnen)
Der Übersichtlichkeit wegen werden die Zahlen zunächst nach Vorzeichen geordnet (erst positive Zahlen, dann negative Zahlen):

$$\begin{aligned} 2-7-3+5-9+4 &= 2+5+4-7-3-9 \\ &= 11-19 \\ &= -8 \end{aligned}$$

2.7 Klammern subtrahieren und addieren

Klammern werden benutzt, um mehrere Zahlen zu einem Block zusammenzufassen, der dann eine Einheit bildet. Zieht man eine Klammer (den Block) ab, so bedeutet dies also, dass alle Bestandteile der Klammer abgezogen werden müssen (wer eine gefüllte Einkaufstasche verliert, hat damit auch alle darin enthaltenen Artikel verloren):

$$\begin{aligned} 8-(2+3) &= 8-2-3 \\ &= 8-5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tauchen in der Klammer auch Subtraktionen auf, so können wir diese zum besseren Verständnis als Addition schreiben (wie bei $2-3 = 2+(-3)$):

$$8-(2-3+1-4) = 8-\big(2+(-3)+1+(-4)\big).$$

Nun werden die in der Klammer stehenden Summanden abgezogen:

$$8-\big(2+(-3)+1+(-4)\big) = 8-2-(-3)-1-(-4).$$

Die Regel $\textit{Schulden abziehen} = \textit{Guthaben addieren}$ liefert:

$$8-2-(-3)-1-(-4) = 8-2+3-1+4.$$

Wir ordnen nun, fassen die positiven und negativen Zahlen jeweils zusammen und erhalten so das Endergebnis:

$$\begin{aligned} 8-2+3-1+4 &= 8+3+4-2-1 \\ &= 15-3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Aus dem gerade betrachteten Beispiel kann eine allgemeine Regel abgelesen werden:

> Beim Auflösen einer *abzuziehenden* Klammer werden die *Vorzeichen* der Summanden in der Klammer *umgekehrt*.
>
> $$8-(2-3+1-4) = 8\underbrace{-2+3-1+4}_{\substack{\text{umgekehrte}\\ \text{Vorzeichen}}}.$$

Die vorangehenden Überlegungen lassen sich auf den Fall übertragen, dass eine Klammer *addiert* wird. Die entsprechende Regel lautet:

> Beim Auflösen einer zu *addierenden* Klammer werden bleiben die *Vorzeichen* der Summanden in der Klammer gleich.
>
> $$8+(2-3+1-4) = 8\underbrace{+2-3+1-4}_{\substack{\text{gleiche}\\ \text{Vorzeichen}}}.$$

Praktisch muss also nur die Klammer weggelassen werden.

Bemerkung
Bei den vorangehenden Beispielen hätte man die Klammern *berechnen* können, statt sie aufzulösen:

$$8-(2-3+1-4) = 8-(2+1-3-4)$$

$$\begin{aligned} 8-(2+1-3-4) &= 8-(3-7) \\ &= 8-(-4) \\ &= 8+4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Stehen in der Klammer *Buchstaben* statt konkreter Zahlen, so kann die Klammer nicht berechnet werden, sie kann nur aufgelöst werden.

2.8 Beispiele zur Addition und Subtraktion

Nun werden wir die bisher entwickelten Einsichten zur Addition und Subtraktion negativer Zahlen praktisch anwenden.

Beispiele 1

a) $5-2 = 3$

b) $5-9 = -4$

c) $-3+7 = 4$

d) $-3+1 = -2$

e) $-4-5 = -9$

Beispiele 2

a) $5+(-2) = 3$

b) $5+(-9) = -4$

c) $-4+(-5) = -9$

Beispiele 3

a) $6-(-1) = 6+1 = 7$

b) $-7-(-2) = -7+2 = -5$

c) $-7-(-10) = -7+10 = 3$

Beispiel 4

$-2+8+3-4+1-7 = ?$

Lösung 1 (von links nach rechts)

$$\begin{aligned}-2+8+3-4+1-7 &= 6+3-4+1-7\\ &= 9-4+1-7\\ &= 5+1-7\\ &= 6-7\\ &= -1\end{aligned}$$

Lösung 2 (positive Zahlen addieren, negative Zahlen addieren)

$$\begin{aligned}-2+8+3-4+1-7 &= 8+3+1-2-4-7\\ &= 12-13\\ &= -1\end{aligned}$$

Beispiel 5 (einfache Klammer)

$5-(2-4+8) = ?$

Lösung 1 (Klammer ausrechnen)

$$\begin{aligned}5-(2-4+8) &= 5-(2+8-4)\\ &= 5-(10-4)\\ &= 5-(6)\\ &= 5-6\\ &= -1\end{aligned}$$

Lösung 2 (Klammer auflösen)

$$\begin{aligned}5-(2-4+8) &= 5-2+4-8\\ &= 5+4-2-8\\ &= 9-10\\ &= -1\end{aligned}$$

Beispiel 6 (Klammer addieren)

$6+(-3+7-5) = ?$

Lösung 1 (ausführlich)

$$\begin{aligned} 6+(-3+7-5) &= 6+\big((-3)+7+(-5)\big) \\ &= 6+(-3)+7+(-5) \\ &= 6-3+7-5 \\ &= 6+7-3-5 \\ &= 13-8 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Lösung 2 (Klammer weglassen, Vorzeichen bleiben)

$$\begin{aligned} 6+(-3+7-5) &= 6-3+7-5 \\ &= 6+7-3-5 \\ &= 13-8 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Beispiel 7 (verschachtelte Klammern)

$8-\big(3-(5-7)\big) = ?$

Lösung 1 (Klammern ausrechnen)

$$\begin{aligned} 8-\big(3-(5-7)\big) &= 8-\big(3-(-2)\big) && |\text{ innere Klammer berechnet} \\ &= 8-\big(3+2\big) && |\ -2 \text{ subtrahieren} = 2 \text{ addieren} \\ &= 8-5 && |\text{ Klammer berechnet} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Lösung 2 (Klammern auflösen)

$$\begin{aligned} 8-\big(3-(5-7)\big) &= 8-\big(3-5+7\big) && |\text{ innere Klammer aufgelöst} \\ &= 8-3+5-7 && |\text{ Klammer aufgelöst} \\ &= 8+5-3-7 \\ &= 13-10 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2.9 Multiplikation mit negativen Zahlen

Wir werden nun anhand von Bespielen untersuchen, wie man zwei Zahlen, von denen mindestens eine negativ ist, multipliziert. Die drei möglichen Fälle sind folgende:

1. positive Zahl mal negative Zahl
2. negative Zahl mal positive Zahl
3. negative Zahl mal negative Zahl

Beispiel 1 (positive Zahl mal negative Zahl)

$2 \cdot (-3) = ?$

Lösung

$2 \text{ mal } 3\,€ \text{ Schulden} = 6\,€ \text{ Schulden}$

Also

$2 \cdot (-3) = -6$

Bei der Multiplikation von normalen positiven Zahlen kann man die Reihenfolge ändern, das Ergebnis bleibt dasselbe. Das *Permanenzprinzip* von Hankel besagt in unserer Situation, dass diese Vertauschbarkeit auch dann noch gelten sollte, wenn man negative Zahlen einbezieht. Davon werden wir nun Gebrauch machen, um die Multiplikation anschaulich und berechenbar zu machen.

Beispiel 2 (negative Zahl mal positive Zahl)

$(-2) \cdot 3 = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} (-2) \cdot 3 &= 3 \cdot (-2) && |\,\text{Faktoren vertauscht} \\ &= -6 && |\,3 \text{ mal } 2\,€ \text{ Schulden} \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir ein Zwischenfazit ziehen: Wenn die zwei Faktoren *unterschiedliche* Vorzeichen haben, so ist das

Produkt *negativ*.

Beispiel 3 (negative Zahl mal negative Zahl)
$(-2)\cdot(-3) = ?$

Lösung 1

Wir nehmen gewissermaßen Anlauf und ersetzen den Faktor -2 durch den positiven Faktor 3. Dann nähern wir uns schrittweise (in Einer-Schritten) der -2. Unterwegs können wir eine Gesetzmäßigkeit erkennen, die uns zeigt, wie es weitergeht, und so zum richtigen Ergebnis führt.

$$\begin{array}{rcll}
3\cdot(-3) &=& -9 & \\
 & & & \big\downarrow +3 \\
2\cdot(-3) &=& -6 & \\
 & & & \big\downarrow +3 \\
1\cdot(-3) &=& -3 & \\
 & & & \big\downarrow +3 \\
0\cdot(-3) &=& 0 & \\
 & & & \big\downarrow +3 \\
(-1)\cdot(-3) &=& 3 & \\
 & & & \big\downarrow +3 \\
(-2)\cdot(-3) &=& 6 & \\
 & & & \big\downarrow +3 \\
(-3)\cdot(-3) &=& 9 &
\end{array}$$

Gesetzmäßigkeit ablesbar:
3 addieren.

Gesetzmäßigkeit
anwenden

Also:
$(-2)\cdot(-3) = 2\cdot 3 = 6$

Lösung 2

Wir starten bei der grundlegenden Eigenschaft einer negativen Zahl: Addiert man sie und die zugehörige positive Zahl, so kommt 0 heraus. In unserem Fall haben wir

$$(-3)+3 = 0.$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit -2. Auf der linken Seite muss jeder Bestandteil mit -2 multipliziert werden. Auf der rechten Seite ist das Produkt 0. Somit erhalten wir

$$(-2)\cdot(-3)\ +\ (-2)\cdot 3 = 0\,.$$

Wegen $(-2)\cdot 3 = -6$ haben wir

$$(-2)\cdot(-3)\ +\ (-6) = 0\,.$$

Der Vergleich mit

$$6\ +\ (-6) = 0$$

zeigt, dass

$$(-2)\cdot(-3) = 6\,.$$

Wir fassen die Ergebnisse der drei Beispiele zu einer Vorzeichenregel zusammen:

> Das Produkt zweier Zahlen mit **gleichem** Vorzeichen ist **positiv**.
> Das Produkt zweier Zahlen mit **verschiedenem** Vorzeichen ist **negativ**.

Nun betrachten wir ein Beispiel, das alle bisher untersuchten Grundrechenarten enthält (Addition, Subtraktion und Multiplikation). Derartige Rechenausdrücke sind prinzipiell mehrdeutig, ihre Ergebnisse hängen von der Reihenfolge der durchgeführten Rechenoperationen ab:

$$2\cdot 3+4 = 6+4 = 10 \qquad |\text{ wenn man zuerst multipliziert}$$

$$2\cdot 3+4 = 2\cdot 7 = 14 \qquad |\text{ wenn man zuerst addiert}$$

Zur Herstellung der Eindeutigkeit solcher Rechenausdrücke hat man daher folgende Konvention (Vereinbarung) eingeführt:

Punktrechnung geht vor Strichrechnung

Diese Konvention spiegelt sich übrigens auch optisch wider, wenn man Produkte gedrängt schreibt und Summen und Differenzen eher gedehnt. Dies vergrößert die Übersichtlichkeit und verhindert so manchen Fehler:

$$2 \cdot 3+4 \qquad |\,\text{unübersichtlich, schlecht}$$
$$2{\cdot}3 + 4 \qquad |\,\text{gut, } \textit{Punkt - vor Strichrechnung} \text{ sichtbar}$$

Beispiel 4 (gemischt)

$3{\cdot}(-5) \ + \ (-7){\cdot}(-2) \ - \ (-4){\cdot}3 \ = \ ?$

Lösung

$$\begin{aligned} & 3{\cdot}(-5) \ + \ (-7){\cdot}(-2) \ - \ (-4){\cdot}3 && |\,\text{Produkte berechnen} \\ = \ & -15 \ + \ 14 \ - \ (-12) && |\,\text{Klammer auflösen} \\ = \ & -15 \ + \ 14 \ + \ 12 && |\,\text{pos. Zahlen add.} \\ = \ & -15 \ + \ 26 \\ = \ & 11 \end{aligned}$$

2.10 Division zweier Zahlen

Wir betrachten die drei möglichen Fälle anhand von Beispielen. Der erste Fall ist wieder mit der Schuldenvorstellung verständlich. Bei den anderen zwei Fällen greifen wir zur Begründung auf die *Probe* zurück. Zur Erinnerung sehen wir uns die Divisionsaufgabe

$$6:2 = 3$$

an. Die Probe besteht nun darin, das Ergebnis mit 2 zu multiplizieren und zu prüfen, ob dabei tatsächlich die Ausgangszahl 6 herauskommt:

$$3 \cdot 2 = 6 \quad \checkmark \quad \text{Die Probe geht auf.}$$

Beispiel 1 (negative Zahl durch positive Zahl)

$(-6) : 2 = ?$

Lösung

$6\,€$ Schulden durch $2 = 3\,€$ Schulden

Also

$(-6) : 2 = -3$

Beispiel 2 (positive Zahl durch negative Zahl)

$6 : (-2) = ?$

Lösung

Da die Zahlen unterschiedliche Vorzeichen haben, liegt die Vermutung nahe, dass

$$6 : (-2) = -3.$$

Probe: $(-3) \cdot (-2) = 6 \quad \checkmark$ (Die Probe geht auf.)

Beispiel 3 (negative Zahl durch negative Zahl)

$(-6) : (-2) = ?$

Lösung

Da die Zahlen gleiche Vorzeichen haben, liegt die Vermutung nahe, dass

$$(-6) : (-2) = 3.$$

Probe: $3 \cdot (-2) = -6 \quad \checkmark$ (Die Probe geht auf.)

Man bemerkt, dass für die Division die gleichen Vorzeichenregeln gelten wie bei der Multiplikation:

> Der Quotient zweier Zahlen mit **gleichem** Vorzeichen ist **positiv**.
> Der Quotient zweier Zahlen mit **verschiedenem** Vorzeichen ist **negativ**.

Schreibt man die Division als **Bruch**, so sind die Regeln besonders einfach und eingängig:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-6}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3 \\ \dfrac{6}{-2} = -\dfrac{6}{2} = -3 \end{array}\right\} \text{ Minuszeichen verschiebt sich nach vorne.}$$

$$\left.\dfrac{-6}{-2} = \dfrac{6}{2} = 3 \right\} \text{ die Minuszeichen kürzen sich weg}$$

Wie schließen den Abschnitt mit Beispielen zur Anwendung der Vorzeichenregeln.

Beispiel 4

$$\frac{-3+4-8+5}{4-7+1-5+2} = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{-3+4-8+5}{4-7+1-5+2} &= \frac{4+5-3-8}{4+1+2-7-5} \\ &= \frac{9-11}{7-12} \\ &= \frac{-2}{-5} \\ &= \frac{2}{5} = 0,4 \end{aligned}$$

Beispiel 5

$$\frac{2}{-3} - \frac{-5}{11} = ?$$

Lösung

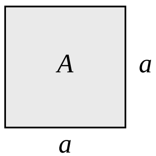
Dies ist eine Aufgabe aus der Bruchrechnung. Das gewohnte Verfahren funktioniert auch bei negativen Zahlen:

$$\begin{aligned}\frac{2}{-3} - \frac{-5}{11} &= \frac{2 \cdot 11}{(-3) \cdot 11} - \frac{(-5) \cdot (-3)}{11 \cdot (-3)} \\ &= \frac{22}{-33} - \frac{15}{-33} \\ &= \frac{7}{-33} \\ &= -\frac{7}{33}\end{aligned}$$

2.11 Potenzen

Nachdem wir die Grundrechenarten betrachtet haben, wenden wir uns den Potenzen zu.

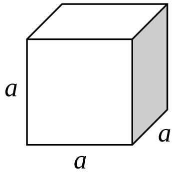
Potenzen sind dem Leser wahrscheinlich schon aus der Geometrie bekannt. Der Flächeninhalt *A* eines Quadrates mit der Seitenlänge *a* ist das Produkt *Länge mal Breite*:



$$A = a \cdot a \quad \text{oder} \quad A = a^2$$

Hierbei ist die Potenz a^2 nur eine Abkürzung für das Produkt $a \cdot a$ von zwei gleichen Faktoren *a*.

Das Volumen *V* eines Würfels mit der Kantenlänge *a* ist das Produkt von *Länge mal Breite (Grundfläche), mal Höhe*:



$$V = a \cdot a \cdot a \quad \text{oder} \quad V = a^3$$

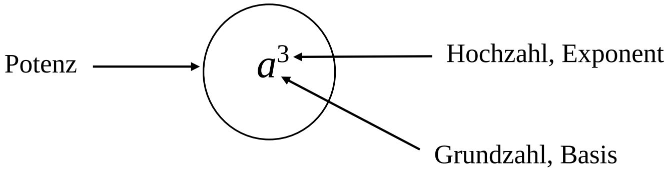
Wieder ist die Potenz a^3 nur eine Abkürzung für $a \cdot a \cdot a$.

In diesem Sinne waren die Potenzen ursprünglich nur praktische Abkürzungen für die Multiplikation einer Zahl mit sich selbst:

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \\ a^4 &= a \cdot a \cdot a \cdot a \\ a^5 &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

usw.

Die Potenzen bestehen aus einer Grundzahl (auch Basis genannt) und einer Hochzahl (auch Exponent genannt). Die Hochzahl gibt an, wie oft die Basis als Faktor bei der Multiplikation auftritt.



Wir werden nun Potenzen betrachten, bei denen Basis und Exponent auch negative Zahlen sein können. Wir nehmen dazu wieder konkrete Beispiele. Wenn nur die Basis negativ ist, lässt sich die Potenz mühelos interpretieren und berechnen. Diesen Fall betrachten wir zuerst:

Beispiele 1 (negative Basis, positiver Exponent)

$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$

$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$

$(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32$

Die negative Basis stellt offenbar keinerlei Hindernis dar. Ist der Exponent eine gerade Zahl, so bilden die Faktoren Paare und die Potenz wird positiv. Andernfalls ist die Potenz negativ.

Wenn der Exponent negativ ist, gibt es ein Problem bei der Interpretation der Potenz: Was bedeutet es beispielsweise, eine Zahl (–2)-mal mit sich selbst zu multiplizieren? Auch Potenzen mit den Exponenten 0 und 1 sind zunächst unklar. Wir werden mehrere Erklärungen anbieten. Zwei von ihnen beruhen auf der Gültigkeit von Potenzregeln auch bei negativen Zahlen (Permanenzprinzip von Hankel). Dazu werden wir zunächst die wichtigsten Potenzregeln herleiten.

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Beispiel: $a^2 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a}_{\substack{2 \\ \text{Faktoren}}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\substack{3 \\ \text{Faktoren}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\substack{2+3=5 \\ \text{Faktoren}}} = a^{2+3} = a^5$

Die Exponenten werden also addiert, wenn man Potenzen mit gleicher Basis multipliziert.

Zur Formulierung der *allgemeinen* Regel, ersetzen wir die konkreten Exponenten 2 und 3 des Beispiels durch *Buchstaben m* und *n*:

Regel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Damit ist die Multiplikationsregel für Potenzen mit gleicher Basis hergeleitet.

Division von Potenzen mit gleicher Basis

Beispiel:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{5\ \text{Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\ \text{Faktoren}}} = \frac{a \cdot a \cdot \overbrace{\cancel{a \cdot a \cdot a}}^{1}}{\underbrace{\cancel{a \cdot a \cdot a}}_{1}} = \frac{a \cdot a \cdot 1}{1} = \underbrace{a \cdot a}_{\substack{5-3=2\\ \text{Faktoren}}} = a^2$$

Durch das Kürzen fallen im Zähler Faktoren weg, und zwar genauso viele wie im Nenner stehen. Die Exponenten werden also subtrahiert, wenn man Potenzen mit gleicher Basis dividiert.

Zur Formulierung der *allgemeinen* Regel, ersetzen wir die konkreten Exponenten 5 und 3 des Beispiels durch *Buchstaben m* und *n*.

Regel: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Damit ist die Divisionsregel für Potenzen mit gleicher Basis hergeleitet.
Man kann die Regel auch ohne Bruchrechnung beweisen, indem man eine Probe für die Division durchführt.
Zu prüfen ist, ob tatsächlich $a^5 : a^3 = a^{5-3}$ ist. Die Probe

$$a^{5-3} \cdot a^3 = a^{5-3+3} = a^5$$

geht auf.

Potenzierung einer Potenz

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\left(a^2\right)^3 &= \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{3\ \text{Faktoren}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \ \cdot \ a \cdot a \ \cdot \ a \cdot a}_{3 \cdot 2\ \text{Faktoren}} \\
&= a^{2 \cdot 3} \\
&= a^6
\end{aligned}$$

Die Exponenten werden also multipliziert, wenn man eine Potenz potenziert.

Wir ersetzen die konkreten Exponenten 2 und 3 des Beispiels durch *Buchstaben m* und *n*, um die *allgemeine* Regel zu erhalten.

Regel: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Damit ist die Regel für die Potenzierung einer Potenz hergeleitet.

Wir fassen die hergeleiteten Potenzregeln zusammen:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Beispiel 2 (positive Basis, negativer Exponent)

$2^{-3} = ?$

Lösung

Wir nehmen wieder Anlauf und ersetzen die -3 durch eine 5. Dann nähern wir uns Schritt für Schritt der -3. Auf dem Wege dorthin können wir die Gesetzmäßigkeit erkennen und so das gesuchte Ergebnis erhalten.

Wir wiederholen an dieser Stelle ein Ergebnis aus der Bruchrechnung, das wir benötigen. Die Division durch eine Zahl kann als Multiplikation mit dem Kehrwert geschrieben werden, zum Beispiel:

$$3:2 = 3:\frac{2}{1} = 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Betrachten wir die ersten drei Zeilen der nachstehende Liste von unten nach oben. Das Ergebnis in jeder Zeile berechnet sich aus der dem Ergebnis der Zeile darunter durch *Multiplikation* mit 2. Von oben nach unten gelesen, muss man jeweils durch 2 *dividieren*, oder mit dem Kehrwert $\frac{1}{2}$ multiplizieren.

$$\begin{array}{rcll}
2^5 &=& 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^4 &=& 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^3 &=& 2\cdot 2\cdot 2 & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^2 &=& 2\cdot 2 & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^1 &=& 2 & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^0 &=& 1 & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^{-1} &=& \frac{1}{2} & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^{-2} &=& \frac{1}{2\cdot 2} & \\
 & & & \big\downarrow \cdot\frac{1}{2} \\
2^{-3} &=& \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} &
\end{array}$$

Gesetzmäßigkeit ablesbar:

$\cdot\frac{1}{2}$

Gesetzmäßigkeit anwenden

Also ist $2^{-3} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{8}$.

Ein genauerer Blick auf den letzten Teil der Liste liefert einige allgemeine Erkenntnis über Potenzen mit exotischen Exponenten:

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3}$$

Man kann folgende Regel ablesen: Ist der ***Exponent*** einer Potenz ***negativ***, so bildet man den ***Kehrwert*** der ***Potenz*** und lässt das ***Minuszeichen*** im Exponenten ***weg***.

Ferner enthält die Liste noch die zwei neuen exotischen Potenzen

$$2^1 = 2 \quad \text{und} \quad 2^0 = 1$$

Die gemachten Aussagen beschränken sich nicht auf die Basis 2. Indem man die konkreten Zahlen des Beispiels durch Buchstaben ersetzt, kann man die gewonnenen Erkenntnisse (Regeln) als allgemeine Formeln schreiben ($a \neq 0$, außer bei $a^1 = a$):

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1$

Wie zuvor angekündigt, werden wir nun noch zwei andere Begründungen für diese Formeln betrachten, die auf den allgemeinen Potenzregeln beruhen.

Begründung 1 (Mithilfe der Produktregel für Potenzen)

a) Begründung der Formel $a^0 = 1$

Nach der Produktregel für Potenzen gilt:

$$a^0 \cdot a^2 = a^{0+2} = a^2 .$$

Vergleichen wir das Ergebnis

$$a^0 \cdot a^2 = a^2$$

mit

$$1 \cdot a^2 = a^2 ,$$

so muss offenbar $a^0 = 1$ sein.

b) Begründung der Formel $a^1 = a$

Nach der Produktregel für Potenzen gilt:

$$a^1 \cdot a^2 = a^{1+2} = a^3 = a \cdot a \cdot a\,.$$

Vergleichen wir das Ergebnis

$$a^1 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a$$

mit

$$a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a\,,$$

so muss offenbar $a^1 = a$ sein.

c) Begründung der Formel $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Nach der Produktregel für Potenzen gilt:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1\,.$$

Ferner ist ($\frac{1}{3} \cdot 3 = 1,\ \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,\ \frac{1}{5} \cdot 5 = 1,$ usw.):

$$\frac{1}{a^n} \cdot a^n = 1$$

Vergleichen wir die Ergebnisse

$$a^{-n} \cdot a^n = 1$$

und

$$\frac{1}{a^n} \cdot a^n = 1\,,$$

so muss offenbar $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ sein.

Damit haben wir die drei Formeln

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1$$

bewiesen.

Begründung 2 (Mithilfe der Divisionsregel für Potenzen)

Wir schreiben die Exponenten als Differenzen und wenden dann die Regel für die Division von Potenzen rückwärts (d. h. von rechts nach links lesend) an.

a) Begründung der Formel $a^0 = 1$

$$a^0 = a^{2-2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

b) Begründung der Formel $a^1 = a$

$$a^1 = a^{3-2} = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \frac{\overbrace{\cancel{a \cdot a}}^{1} \cdot a}{\underbrace{\cancel{a \cdot a}}_{1}} = \frac{1 \cdot a}{1} = a.$$

c) Begründung der Formel $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Zum besseren Verständnis beschränken wir uns auf den konkreten Exponenten -3:

$$a^{-3} = a^{0-3} = \frac{a^0}{a^3} = \frac{1}{a^3}.$$

Damit haben wir die drei Formeln

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1$$

abermals bewiesen.

Wir fassen nun alle besprochenen Potenzregeln für den praktischen Gebrauch zusammen. Danach werden Anwendungsbeispiele betrachtet.

Potenzregeln

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$a^1 = a$ und $a^0 = 1$

Beispiel 3 (negative Basis, negativer Exponent)

$(-2)^{-5} = ?$

Lösung

$$
\begin{aligned}
(-2)^{-5} &= \frac{1}{(-2)^5} && |\,\text{negativen Exponent verarbeitet}\\
&= \frac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)} && |\,\text{Potenz als Produkt}\\
&= \frac{1}{-32} && |\,\text{Produkt berechnet}\\
&= -\frac{1}{32} && |\,\text{Minuszeichen vorgezogen}
\end{aligned}
$$

Beispiel 4 (verschiedene Regeln)

$\dfrac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^{-9} \cdot 3^7}{3^6 \cdot 2^3 \cdot 5^0} = ?$

Lösung

Wir werden bei der Berechnung mehrere Regeln anwenden.

$$\begin{aligned}
\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^{-9} \cdot 3^7}{3^6 \cdot 2^3 \cdot 5^0} &= \frac{2^4 \cdot 2^{-9} \cdot 3^2 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0} && \mid \text{geordnet} \\
&= \frac{2^{4-9} \cdot 3^{2+7}}{2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0} && \mid \text{Potenzen multipliziert} \\
&= \frac{2^{-5} \cdot 3^9}{2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0} && \mid \text{Exponenten berechnet} \\
&= \frac{2^{-5}}{2^3} \cdot \frac{3^9}{3^6} \cdot \frac{1}{5^0} && \mid \text{nach Basen gruppiert} \\
&= 2^{-5-3} \cdot 3^{9-6} \cdot \frac{1}{5^0} && \mid \text{Potenzen dividiert} \\
&= 2^{-8} \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{5^0} && \mid \text{Exponenten berechnet} \\
&= \frac{1}{2^8} \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{5^0} && \mid \text{neg. Exponenten bearb.} \\
&= \frac{1}{256} \cdot 27 \cdot \frac{1}{1} && \mid \text{Potenzen berechnet} \\
&= \frac{27}{256} && \mid \text{multipliziert}
\end{aligned}$$

Anmerkungen 1

Der französische Gelehrte *Nicole Oresme* (ca. 1320 – 1382) hat auch Potenzen mit Brüchen in den Exponenten betrachtet. Er hat erkannt, dass Wurzeln solche Potenzen sind. Mit den bereits besprochenen Methoden und Ansätzen kann man seine Ergebnisse gut nachvollziehen. Wir betrachten beispielsweise die *Quadratwurzel* aus einer Zahl *a*.

Die Quadratwurzel aus *a*, geschrieben als $\sqrt{a}$, ist die nicht negative Zahl, die mit sich selbst multipliziert die Ausgangszahl *a* ergibt:

$$\text{Wurzel} \cdot \text{Wurzel} = a$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Wir schreiben *a* als a^1, und benutzen die Regel für die Multiplikation von Potenzen:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1$$

Vergleichen wir nun die beiden Ergebnisse

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^1 \quad \text{und} \quad a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^1,$$

so schließen wir:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Auch höhere Wurzeln lassen sich als Potenzen auffassen.

Anmerkungen 2

Die Potenz eines *Produktes* ab lässt sich auf die Potenzen der Faktoren zurückführen:

$$\begin{aligned} (ab)^3 &= (a \cdot b)^3 && |\,\text{Produkt ausgeschrieben} \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b && |\,\text{Potenz aufgeschlüsselt} \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b && |\,\text{geordnet} \\ &= a^3 \cdot b^3 && |\,\text{Produkte als Potenzen} \\ &= a^3 b^3 \end{aligned}$$

Allgemein gilt: $(ab)^n = a^n b^n$. Die Potenz eines Quotienten ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Wir erhalten also die beiden Regeln:

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Nach den vorangehenden Anmerkungen 1 gelten diese Regeln auch für die Wurzeln:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

2.12 Wissenschaftliche Notation von Zahlen

Wenn man den Wert des Ausdrucks

$$1:8^{12}$$

mit Hilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners ermittelt, wird das Ergebnis je nach Fabrikat etwa wie folgt angezeigt:

$\boxed{1,455191523^{-11}}$ oder $\boxed{1,455191523\times 10^{-11}}$

Die erste Angabe ist sehr verkürzt, die zweite zeigt die mathematische Bedeutung an:

$$1,455191523\cdot 10^{-11}$$

Der Taschenrechner hat die Zahl in der sogenannten *wissenschaftlichen Notation* angezeigt. Bei dieser Schreibweise steht das Komma stets nach der ersten Ziffer (die nicht 0 ist). Die tatsächliche Position des Kommas wird durch die anschließende Zehnerpotenz mitgeteilt. Zur Veranschaulichung rechnen wir die Zahl um in die übliche Form:

$$\begin{aligned}
&1,455191523\cdot 10^{-11} \\
&= 1,455191523\cdot \frac{1}{10^{11}} && |\,\text{neg. Exponenten verarbeitet} \\
&= \frac{1,455191523}{10^{11}} && |\,\text{multiplziert} \\
&= \frac{1,455191523}{100.000.000.000} && |\,\text{potenziert, 11 Nullen} \\
&= 0,000.000.000.01455191523 && |\,\text{Kommaverschiebung (11)}
\end{aligned}$$

Die -11 in der Anzeige bedeutet also praktisch, dass man das Komma um 11 Stellen nach links verschieben muss. Stünde eine positive 11, dann müsste das Komma um 11 Stellen nach *rechts* verschoben werden.

Aufgaben

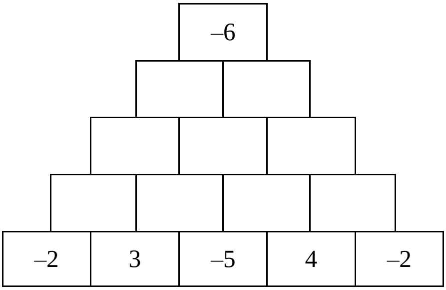
Aufgaben zu Kapitel 2.1 bis 2.3

I. Berechne die folgenden Summen:

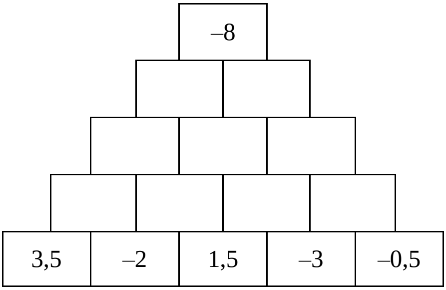
1. $4+(-3)$	2. $5+(-2)$	3. $4+(-6)$
4. $9+(-7)$	5. $8+(-3)$	6. $4+(-17)$
7. $14+(-5)$	8. $1+(-8)$	9. $9+(-12)$
10. $7+(-20)$	11. $23+(-12)$	12. $33+(-21)$
13. $14+(-6)$	14. $25+(-30)$	15. $5+(-9)$
16. $17+(-8)$	17. $11+(-18)$	18. $17+(-25)$
19. $27+(-6)$	20. $13+(-43)$	21. $4+(-1)$
22. $-2+3$	23. $-2+(-4)$	24. $3+(-5)$
25. $-2+1$	26. $-5+(-3)$	27. $4+(-5)$
28. $-3+(-4)$	29. $-2+(-7)$	30. $2+(-8)$
31. $-1+(-1)$	32. $4+(-7)$	33. $-2+(-3)$
34. $-3+5$	35. $-3+(-4)$	36. $-1+(-7)$
37. $-3+4$	38. $2+(-6)$	39. $-3+2$
40. $-2+(-8)$	41. $2+(-2)$	42. $-1+1$
43. $-3+3$	44. $5+(-5)$	45. $-7+7$
46. $13+(-13)$	47. $-8+8$	48. $35+(-35)$

II. Addiere die benachbarten Zahlen und schreibe das Ergebnis darüber. Mithilfe der obersten Zahl kann man erkennen, ob man richtig gerechnet hat.

a)



b)



Aufgaben zu Kapitel 2.4

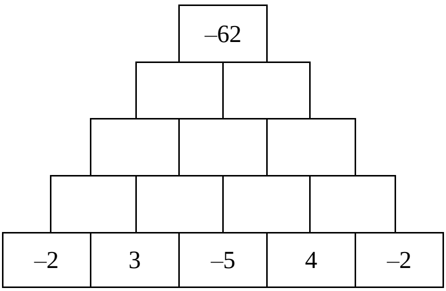
I. Berechne die folgenden Differenzen:

1. $4-3$	2. $8-5$	3. $5-7$
4. $10-7$	5. $6-19$	6. $13-5$
7. $2-9$	8. $11-14$	9. $6-30$
10. $34-23$	11. $15-7$	12. $36-41$
13. $4-8$	14. $12-17$	15. $18-26$
16. $26-5$	17. $15-45$	18. $-9-(-2)$

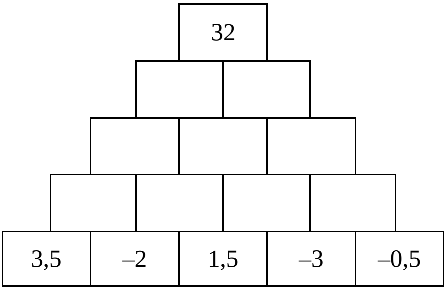
19. $3-(-2)$	20. $-4-(-1)$	21. $-2-3$
22. $-2-4$	23. $3-(-5)$	24. $-2-1$
25. $-5-3$	26. $-3-(-4)$	27. $-2-(-4)$
28. $-1-(-1)$	29. $4-(-7)$	30. $-2-(-3)$
31. $-3-5$	32. $-3-(-4)$	33. $-1-7$
34. $-3-4$	35. $2-(-6)$	36. $-3-2$
37. $-2-(-8)$	38. $-2-2$	39. $-1-1$
40. $4-(-4)$	41. $7-(-7)$	42. $35-(-35)$
43. $3-5$	44. $-4-6$	45. $-9-(-6)$
46. $-4-(-8)$	47. $5-(-4)$	48. $4-7$

II. Subtrahiere die benachbarten Zahlen (linke Zahlen minus rechte Zahl) und schreibe das Ergebnis darüber. Mithilfe der obersten Zahl kann man erkennen, ob man richtig gerechnet hat.

a)



b)



Aufgaben zu Kapitel 2.5

Berechne die folgenden Summen/Differenzen:

1. $-27+8$	2. $-18-13$	3. $-28-1$
4. $-24+17$	5. $-7-12$	6. $-11+17$
7. $-21+15$	8. $17-15$	9. $-16-17$
10. $-29+7$	11. $-11-23$	12. $6-30$
13. $-5+2$	14. $2-11$	15. $11-26$
16. $-16-16$	17. $6-23$	18. $21-22$
19. $-28-13$	20. $29-22$	21. $5-16$
22. $-24-11$	23. $-7-5$	24. $-13-26$
25. $-1-12$	26. $-3-5$	27. $-21+8$
28. $-16+12$	29. $-6-1$	30. $-3+7$

Aufgaben zu Kapitel 2.6 bis 2.8

I. Berechne die folgenden Summen/Differenzen:

1. $-1+5-3$
2. $1-5-3$
3. $1+5-3$
4. $-1-5-3$
5. $-1+5+3$
6. $1-5+3$
7. $1+5+3$
8. $-1-5+3$
9. $-2+7+4$
10. $-4+2-7$
11. $-7+4-2$
12. $-5-6-2$
13. $2-6-3$
14. $-4-1+4$
15. $7+3-2$
16. $-2+7+1$
17. $1-4+5$
18. $-7+2-9$
19. $-2-5-6$
20. $1-5-8$
21. $8-5+7-20$
22. $-9-4+11-17$

II. Berechne die folgenden Summen/Differenzen:

1. $-16-6+19$
2. $-5+15+2-13+9$
3. $-4-10-18-13+8$
4. $-18-6-7-9+15$
5. $-17+1-11$
6. $-20-1+3$
7. $16-12+13-29$
8. $-2-29+6$
9. $-17+14-9$
10. $-10-3-27$
11. $-19-13+5-1-24$
12. $-21-2+11$
13. $-25-4+13$
14. $-1-17+20-14$

15. $12+27-3$
16. $23-26-14+8+27$
17. $26-24+16-5-10$
18. $-6+13-11$
19. $17-7+8$
20. $-21+3+5+16+10$
21. $14-1+10-22-1$
22. $-6-11+17-12+13$
23. $6+29-13$
24. $-16-23-25$
25. $-18+9-20$
26. $-13+22+7+21$
27. $1+10-22+6-11$
28. $16-17+25$
29. $-5-29-8-23$
30. $-13+4-12-7$

III. Berechne:

1. $8-(9-4)$
2. $13-(3-7)$
3. $12-(-2-6)$
4. $7-(-4+6)$
5. $1+(3-7)$
6. $4+(-3-7)$
7. $0-(8-3)$
8. $0-(-4-9)$
9. $-(-2+6)$
10. $-(4+6)$
11. $-(5-12)$
12. $-(-3-7)-(8-5)$
13. $6-(8-5)-3$
14. $-(4-7)-(-3-2)$
15. $-(-3+7)+(8-5)+3$
16. $(4-8)-(9-6)$
17. $-(-3+11)+(8-5)$
18. $-(-2-6)-(13-7)$
19. $-(9+4)-(-11+17)$
20. $-(9-4+11-17)$
21. $7-(4+6)$
22. $-\left(2-(6-8)\right)$

IV. Schreibe übersichtlich und berechne:

1. $3-\left(7-(10-4)\right)$
2. $14-\left(5-(8-3)\right)$
3. $12-\left(-4-(-2-6)\right)$
4. $3-\left(-(-4+6)+8\right)$
5. $9-\left(-(3-7)-(-5+13)\right)$
6. $-\left(4-(6-7)\right)+7$
7. $(-4-9)-(8-3)$
8. $-(-5+3)+(7-18)$
9. $-\left((-5+3)+(7-18)\right)$
10. $3-\left(4-\left(5-(-7+8)\right)\right)$
11. $(-8+15)-\left(5-(6-18)\right)$
12. $-\left((-4-9)-(12-7)\right)$
13. $6-\left((8-5)-3\right)$
14. $1+\left(\left(-(4-7)+3\right)-(-1-2)\right)$
15. $\left(-(-5)\right)+(-5)$
16. $4-\left(-\left(-(-1)\right)\right)$
17. $5+\left(4-(-3+11)\right)$
18. $4-(-3-9)-(12-25)$
19. $5-\left((-3+2)-\left(7+(-9)\right)\right)$
20. $1-\left(2-3+\left(4-\left(5-6+(7-8)\right)\right)\right)$

Aufgaben zu Kapitel 2.9 bis 2.10

I. Berechne:

a) $3\cdot(-5)$

b) $(-4)\cdot 8$

c) $(-4)\cdot(-4)$

d) $-(-2)\cdot(-3)$

e) $(-5)\cdot(-6)$

f) $8\cdot(-4) \;+\; (-2)\cdot(-3)$

g) $(-3)\cdot 5 \;+\; (-7)\cdot(-4)$

h) $(-3)\cdot(-2) \;+\; 2\cdot(-1) \;+\; 5$

i) $(-5)\cdot 3 \;+\; 9 \;+\; (-4)\cdot(-2)$

j) $(-3)\cdot 8 \;-\; (-7)\cdot(-5)$

k) $(-1)\cdot(-1)$

l) $(-1)\cdot 1$

m) $1\cdot(-1)$

n) $(-1)\cdot 8 \;+\; (-1)\cdot 5$

o) $(-1)\cdot 9 \;+\; (-1)\cdot 4 \;+\; 7 \;+\; (-1)\cdot 3$

II. Berechne:

1. $54:(-3)$
2. $(-48):8$
3. $(-56):(-7)$
4. $(-144):6$
5. $(-54):(-6)$
6. $\frac{-3}{4}$
7. $\frac{10}{-16}$
8. $\frac{-10}{-12}$
9. $\frac{-2+3-7+4}{5-8+2-6+1}$
10. $\frac{3-8+1-11+5}{5-8+2-6+3-(-10)}$
11. $\frac{1+4-1+4-2+1-3+5}{1-7+3-20+50-8}$
12. $\frac{-3-1+4+1-5+9-2-7}{2+2-3-6-0+6-8}$
13. $\frac{-4-7-7+1-2+1-3}{6-9-3+1-4+7-2}$
14. $\frac{4-9+1-13-(-7)}{4-7+2-6-1+12}$
15. $\frac{2-7+1-8+2-8+1-8}{3-1-6-2-2+7+7-7}$
16. $\frac{-3}{4}+\frac{2}{-5}$
17. $\frac{-4}{-5}+\frac{2}{-8}$
18. $\frac{4}{-7}-\frac{-3}{5}$
19. $\frac{-1}{9}-\frac{1}{-11}$
20. $\frac{5}{-13}+\frac{4}{-5}$

Aufgaben zu Kapitel 2.11

1. Berechne:

a) 2^{-5} b) $(-3)^{-4}$ c) $(-3)^{-3}$

d) 5^{-4} e) 2^{-10} f) 10^{-3}

g) $2^9 \cdot 2^8 \cdot 2^{-14}$ h) $2^7 \cdot 3^7 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-5}$ i) $2^{93} \cdot 2^{27} \cdot 2^{-42} \cdot 2^{-69}$

j) $2^{23} \cdot 3^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-16}$ k) $2^5 + 2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^{-5}$ l) $2^{-3} \cdot 3^2$

2. Berechne:

a) $\dfrac{3^5 \cdot 3^8}{3^2 \cdot 3^4}$ b) $\dfrac{2^7 \cdot 2^4}{2^5}$ c) $\dfrac{2^5 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^2}$

d) $\dfrac{(2^3)^2}{2^2 \cdot 2^3}$ e) $\dfrac{(2^2)^2 \cdot (3^2)^2}{2^2 \cdot 3^2}$ f) $\dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^5}{3^3 \cdot (3^2)^2}$

Aufgaben zu Kapitel 2.12

1. Berechne:

a) $3{,}517 \cdot 10^3$ b) $1{,}4142135 \cdot 10^{-3}$ c) $1{,}73205 \cdot 10^{-1}$

d) $3{,}14159 \cdot 10^{12}$ e) $2{,}7182818 \cdot 10^{-7}$ f) $3{,}1622776 \cdot 10^{-1}$

g) $8660{,}254 \cdot 10^{-4}$ h) $7071067{,}8 \cdot 10^{-8}$ i) $0{,}30102999 \cdot 10^{-6}$

j) $693{,}147180 \cdot 10^7$

2. Schreibe in wissenschaftlicher Notation:

a) 7.325 b) 1.358.732 c) 972.144

d) 0,141.537 e) 0,053.428.9 f) 0,000.024.698

g) 14.031.879 h) 0,001.710.927 i) 0,000.000.000.08

j) 432.177.605

3. Buchstabenrechnung

Buchstaben erfüllen beim Rechnen zwei Zwecke:

1) Buchstaben stehen für (noch) **unbekannte** Zahlen, die berechnet werden sollen. Solche Unbekannte tauchen in Gleichungen auf. Seit René Descartes (1596 – 1650) benutzen wir die Buchstaben am Ende des Alphabets, wenn sie eine Unbekannte darstellen sollen.

2) Buchstaben stehen für **beliebige** Zahlen. **Allgemeine** Regeln und Formeln benutzen die Buchstaben in diesem Sinne. Die Buchstaben sollen **jede** beliebige Zahl erfassen. François Viète (1540–1603) war der erste, der Buchstaben in diesem Sinne in **Rechenausdrücken** benutzt hat. Seitdem gibt es *Formeln*. Die bekannte p-q-Formel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung stammt von Viète.

Beispiele:

a) Die Fläche A eines Rechtecks mit der Länge a und der Breite b:

$$A = a \cdot b$$

b) Die Regel über die Vertauschbarkeit von Summanden beim Addieren:

$$a + b = b + a$$

c) Die in der Zeit t zurückgelegte Strecke s eines Autos, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt:

$$s = v \cdot t$$

Erläuterung zur Formel: Fährt der Wagen beispielsweise mit 50 km/h, so legt er in einer Stunde 50 km zurück. In 3 Stunden legt er 3 mal 50 km zurück. Die Strecke ist also Zeit mal Geschwindigkeit.

In diesem Kapitel werden wir mit Buchstaben **rechnen**. Dabei betrachten wir in erster Linie die vier Grundrechenarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Ihre Anwendung auf Buchstaben liefert die elementaren allgemeinen *Rechenausdrücke* (auch *Terme* genannt).

Zur Division erwähnen wir nur, dass sie in der Buchstabenrechnung als Bruch geschrieben wird. Die Regeln des Bruchrechnens sind dann anzuwenden.

Wir werden also folgende Themen behandeln:

- Addition und Subtraktion von Buchstaben
- Multiplikation
  - Reine Multiplikation
  - Multiplikation von Summen (Klammern)
  - Binomische Formeln (wichtige Sonderfälle der Multiplikation von Klammern)

3.1 Addition und Subtraktion von Buchstaben

Einen Buchstaben, der eine Zahl darstellt, kann man sich als eine undurchsichtige geschlossene Schachtel vorstellen, die eine unbekannte Zahl von Äpfeln enthält. Fügt man nun zwei gleiche Boxen zusammen, so ist die Anzahl der insgesamt darin enthaltenen Äpfel ebenfalls unbekannt. Man kann aber sagen, dass *zwei* Boxen vorliegen:

$$\text{Box} + \text{Box} = 2 \text{ Boxen}$$

Denkt man an die Definition der Multiplikation, beispielsweise

$$4 + 4 = 2 \text{ mal } 4 = 2 \cdot 4,$$

so kann man auch

$$\text{Box} + \text{Box} = 2 \cdot \text{Box}$$

schreiben. In Buchstaben geschrieben, lautet das Gesagte:

$$a + a = 2 \cdot a = 2a\,.$$

Hierbei kann $2a$ als Abkürzung für das Produkt $2 \cdot a$ aufgefasst werden.

Wir gehen nun mehrere Beispiele durch. Kenntnisse der negativen Zahlen werden vorausgesetzt. Die im vorigen Kapitel gewonnenen Einsichten können hier angewendet werden.

Beispiele 1 (ein Buchstabe, Addition)

1) $a + a = 2 \cdot a = 2a$ (wie $4 + 4 = 2 \cdot 4$)

2) $a + a + a = 3 \cdot a = 3a$ (wie $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4$)

3) $2a + 3a = 5a$
(Wie
$2 \text{ Boxen} + 3 \text{ Boxen} = 5 \text{ Boxen}$
$2 \text{ Äpfel} + 3 \text{ Äpfel} = 5 \text{ Äpfel}$
$2 \text{ Meter} + 3 \text{ Meter} = 5 \text{ Meter}$)

Beispiele 2 (mehrere Buchstaben, Addition)

1) $a + a + b + b + b = 2a + 3b$ (wie 2 Äpfel und 3 Birnen)

2) Ungeordneter Ausdruck:

$$\begin{aligned} 2a + 3b + a + 6b &= 2a + a + 3b + 6b && |\,\text{geordnet} \\ &= 3a + 9b && |\,\text{zusammengezählt} \end{aligned}$$

Wie 2 Äpfel und 3 Birnen und 1 Apfel und 6 Birnen, insgesamt 3 Äpfel und 9 Birnen

Wir gehen nun zur Subtraktion von Buchstaben über und betrachten zunächst ein Beispiel mit nur einem Buchstaben.

Beispiele 3 (ein Buchstabe, Subtraktion)

1) $5a - 2a = 3a$
   (5 Äpfel minus 2 Äpfel $=$ 3 Äpfel)

2) $4a - 9a = -5a$
   (4 Äpfel minus 9 Äpfel $=$ 5 Äpfel Schulden)

Beispiel 4 (mehrere Buchstaben, Addition, Subtraktion)

$$2a - 3b + 8c - 5a + 7b - 3c = 2a - 5a \; - \; 3b + 7b \; + \; 8c - 3c$$
$$= -3a + 4b + 5c$$

Erläuterungen:

1. Zunächst wurde alphabetisch geordnet. Beim Verschieben werden die Vorzeichen stets mitgenommen. So wird $-5a$ als Einheit verschoben.
2. Es wurden gleiche Buchstaben verrechnet:
   $2a - 5a = -3a, \quad -3b + 7b = 4b, \quad 8c - 3c = 5c$

Beispiel 5 (Klammer subtrahieren)

$7a - 5b - (3a - 2b) = ?$

Lösung

Zunächst lösen wir die Klammer auf, die Vorzeichen der Klammerinhalte werden dabei umgekehrt, anschließend wird geordnet und Gleichartiges zusammengezählt (*zusammengefasst*):

$$\begin{aligned} 7a - 5b - (3a - 2b) &= 7a - 5b - 3a + 2b \\ &= 7a - 3a \; - \; 5b + 2b \\ &= 4a - 3b \end{aligned}$$

Beispiel 6 (verschachtelte Klammern)

$8a - 3b - (b - (2a - 5b)) = ?$

Lösung

Zunächst schreiben wir den Rechenausdruck etwas übersichtlicher. Die Verschachtelung wird deutlicher, wenn man die äußeren Klammern größer schreibt. Geeignete Abstände machen Blöcke einfacher erkennbar:

$$8a-3b-(b-(2a-5b)) = 8a-3b \;-\; \big(b-(2a-5b)\big)$$

Nun berechnen wir den Ausdruck von innen nach außen, d. h. wir lösen zunächst die innere Klammer auf:

$$\begin{aligned} & 8a-3b \;-\; \big(b-(2a-5b)\big) && |\,\text{innere Klammer auflösen} \\ = \;& 8a-3b \;-\; \big(b-2a+5b\big) && |\,\text{zusammenfassen (Klammer)} \\ = \;& 8a-3b \;-\; \big(-2a+6b\big) && |\,\text{äußere Klammer auflösen} \\ = \;& 8a-3b \;+\; 2a-6b && |\,\text{ordnen} \\ = \;& 8a+2a \;-\; 3b-6b && |\,\text{zusammenfassen} \\ = \;& 10a-9b \end{aligned}$$

3.2 Reine Multiplikation von Buchstaben

Wir betrachten drei Gruppen von Beispielen, die die Multiplikation enthalten, nicht aber Addition und Subtraktion.

Beispiele 1 (ein Buchstabe, nur Multiplikation)

1) $a \cdot a = a^2$

2) $a \cdot a \cdot a = a^3$

3) $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$

4) $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \;\cdot\; a \cdot a \cdot a = a^5$, oder anders gerechnet:
   $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

Beispiel 2 (mehrere Buchstaben, nur Multiplikation)

$c^2 \cdot b \cdot a \cdot b^3 \cdot c \cdot a = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} & c^2 \cdot b \cdot a \cdot b^3 \cdot c \cdot a && |\,\text{alphabetisch ordnen} \\ = \; & a \cdot a \cdot b \cdot b^3 \cdot c \cdot c^2 && |\,\text{gleiche Buchstaben verrechnen} \\ = \; & a^2 \cdot b^4 \cdot c^3 && |\,\text{Produkt kompakt schreiben} \\ = \; & a^2 b^4 c^3 \end{aligned}$$

Beispiel 3 (Zahlen und Buchstaben, nur Multiplikation)

$2a \cdot 3b^2 \cdot 4a^2 = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} & 2a \cdot 3b^2 \cdot 4a^2 && |\,\text{ordnen: Zahlen zuerst, (3 Äpfel} \\ & && |\,\text{ statt Äpfel 3), dann alphabetisch} \\ = \; & 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 && |\,\text{Produkte berechnen} \\ = \; & 24a^3b^2 \end{aligned}$$

3.3 Multiplikation von Summen und Differenzen

Wir stellen uns eine Summe als Korb vor, der zum Beispiel 3 Äpfel und 4 Birnen enthält. Nun möchten wir den Korb mit 2 malnehmen, also verdoppeln. Dann verdoppeln sich natürlich auch die Äpfel und Birnen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \text{ Äpfel} + 4 \text{ Birnen}) &= 2 \cdot 3 \text{ Äpfel} + 2 \cdot 4 \text{ Birnen} \\ &= 6 \text{ Äpfel} + 8 \text{ Birnen} \end{aligned}$$

Diesen Vorgang nennt man *ausmultiplizieren*. Die Klammer kann übrigens nicht weggelassen werden, denn

$$2 \cdot 3 \text{ Äpfel} + 4 \text{ Birnen}$$

bedeutet nach der Konvention *Punktrechnung geht vor Strich-rechung*, dass **nur** die Äpfel verdoppelt werden, also:

$$2 \cdot 3 \text{ Äpfel} + 4 \text{ Birnen} = 6 \text{ Äpfel} + 4 \text{ Birnen}$$

Im Folgenden wird das Ausmultiplizieren genauer untersucht. Dabei werden auch die bereits in der Antike bekannten geometrischen Ansätze behandelt, die viel zum Verständnis beitragen können.

Beispiel 1 (Buchstabe mal Summe)

$a \cdot (b+c) = ?$

Lösung 1 (Äpfel und Birnen)

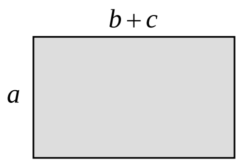
Der Korb mit Inhalt b und c wird mit a multipliziert. Damit wird natürlich auch der Inhalt mit a multipliziert:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$$

Lösung 2 (anschaulich, d. h. geometrisch)

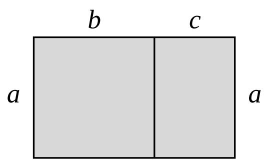
Vorbemerkung: Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist A = Länge mal Breite. Umgekehrt kann man jedes Produkt als Fläche eines Rechtecks deuten. Das werden wir jetzt tun.

$a \cdot (b+c) =$ Fläche von



Die Länge besteht aus den Stücken b und c.

$=$ Fläche von



Das Rechteck besteht aus zwei Teilen.

$= ab + ac$

Wir gehen noch einen Schritt weiter und betrachten das Produkt von zwei Summen (Klammern).

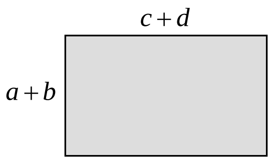
Beispiel 2 (Summe mal Summe)

$(a+b)\cdot(c+d) = ?$

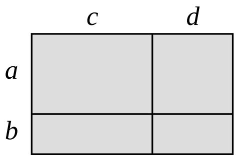
Lösung (anschaulich, d. h. geometrisch)

Wir deuten das Produkt wieder als Fläche eines Rechtecks. Es besteht in offensichtlicher Weise aus vier kleinen Rechtecken:

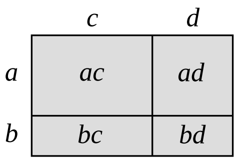
$(a+b)\cdot(c+d) \;=\;$ Fläche von



$=$ Fläche von



$=$ Fläche von



$= \; ac+ad \;+\; bc+bd$

Man sieht, dass man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multiplizieren muss; diese Teilprodukte werden addiert. Pfeile können diesen Mechanismus des Ausmultiplizierens gut visualisieren:

$$\boxed{(a+b)\cdot(c+d) \quad = \quad ac+ad \quad + \quad bc+bd}$$

Was ist nun zu tun, wenn Minuszeichen auftauchen, wenn zum Beispiel

$$a-b \quad \text{statt} \quad a+b$$

in der Klammer steht? Wir erinnern uns an den Spruch „Guthaben abziehen ist dasselbe wie Schulden hinzufügen". So lässt sich $a-b$ als Summe auffassen,

$$a-b = a+(-b),$$

und dann kann man wie gehabt vorgehen. Dies wird im folgenden Beispiel vorgeführt.

Beispiel 3 (Differenz mal Differenz)
$(a-b)\cdot(c-d) = ?$

Lösung 1 (ausführlich)
Wir schreiben die Differenzen als Summen und multiplizieren dann wie in Beispiel 2 aus:

$$\begin{aligned} & (a-b)\cdot(c-d) \\ = \; & \big(a+(-b)\big)\cdot\big(c+(-d)\big) \\ = \; & a\cdot c + a\cdot(-d) \; + \; (-b)\cdot c + (-b)\cdot(-d) \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Vorzeichenregeln auf die Produkte an und schreiben die Addition negativer Ausdrücke als Subtraktion:

$$\begin{aligned} & a\cdot c + a\cdot(-d) \; + \; (-b)\cdot c + (-b)\cdot(-d) \\ = \; & ac + (-ad) \; + \; (-bc) + bd \\ = \; & ac - ad \; - \; bc + bd \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt bis auf die Vorzeichen mit dem Ergebnis von Beispiel 2 überein. Die Vorzeichen können aber mühelos im Kopf bestimmt werden. So gelangt man zur praktischen und kurzen Rechen- und Schreibweise des zweiten Lösungsweges.

Lösung 2 (kurz, Vorzeichen im Kopf bestimmen)
Wir multiplizieren aus wie beim Produkt von Summen, bestimmen aber jeweils vorher im Kopf das richtige Vorzeichen (Rechenzeichen):

$$(a-b)\cdot(c-d) \;=\; ac-ad \;-\; bc+bd$$

3.4 Gemischte Beispiele

Wir werden die bisher dargelegten Erkenntnisse auf verschiedene Aufgaben anwenden.

Beispiel 1

$2x\cdot 3y = ?$

Lösung

$2x\cdot 3y = 2\cdot 3\cdot x\cdot y = 6xy$

Beispiel 2

$3(x+y) = ?$

Lösung

$3(x+y) = 3x+3y$

Beispiel 3

$a(x+2y) = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} a(x+2y) &= ax + a\cdot 2y && |\,\text{ausmultipliziert} \\ &= ax + 2ay && |\,\text{geordnet} \end{aligned}$$

Beispiel 4

$(2a+b)(3x+y) = ?$

Lösung

Wir multiplizieren aus und berechnen die Produkte. Die Faktoren in den Produkten schreibt man in alphabetischer Reihenfolge:

$$\begin{aligned} (2a+b)(3x+y) &= 2a\cdot 3x + 2a\cdot y + b\cdot 3x + b\cdot y \\ &= 6ax + 2ay + 3bx + by \end{aligned}$$

Beispiel 5

$(a-3b+2c)(3a-b+5) = ?$

Lösung

Wir multiplizieren aus mithilfe der Pfeile. Um die Übersichtlichkeit zu bewahren, sind die von c ausgehenden Pfeile nur angedeutet. Anschließend fassen wir zusammen (die *ab*-Terme):

$$\begin{aligned} &(a-3b+2c)(3a-b+5) \\ &= 3a^2 - ab + 5a \;-\; 9ab + 3b^2 - 15b \;+\; 6ac - 2bc + 10c \\ &= 3a^2 - 10ab + 5a \;+\; 3b^2 - 15b \;+\; 6ac - 2bc + 10c \end{aligned}$$

Wir ordnen nun absteigend nach der Anzahl der Buchstaben in den Produkten. Die Produkte mit zwei Buchstaben (wie $a^2 = a\cdot a$ und ab) werden also zuerst geschrieben, dann die Produkte mit nur einem Buchstaben:

$$3a^2 - 10ab + 5a \quad + \quad 3b^2 - 15b \quad + \quad 6ac - 2bc + 10c$$
$$= \; 3a^2 - 10ab + 3b^2 + 6ac - 2bc \quad + \quad 5a - 15b + 10c$$

Produkte mit gleicher Anzahl von Buchstaben werden alphabetisch geordnet (wie in einem Wörterbuch)

$$3a^2 - 10ab + 3b^2 + 6ac - 2bc \quad + \quad 5a - 15b + 10c$$
$$= \; 3a^2 - 10ab + 6ac + 3b^2 - 2bc \quad + \quad 5a - 15b + 10c$$

Das Endergebnis in der üblichen Schreibweise lautet also:

$$(a - 3b + 2c)(3a - b + 5)$$
$$= \; \underbrace{3a^2 - 10ab + 6ac + 3b^2 - 2bc}_{\text{Produkte aus \textbf{zwei} Buchstaben. Beachte: } a^2 = a \cdot a,\ b^2 = b \cdot b} \quad + \quad \underbrace{5a - 15b + 10c}_{\text{Produkte aus \textbf{einem} Buchstaben.}}$$

Erläuterung zur Anordnung

Dass man die Summanden alphabetisch ordnet, leuchtet ein. Jede Ordnung erhöht die Übersichtlichkeit.
Warum aber werden die Summanden mit mehr Buchstaben zuerst geschrieben? Die Antwort findet man, wenn man Zahlen für die Buchstaben einsetzt. Setzen wir im Rechenausdruck

$$a^2 + a$$

für a 100 ein. Dann bekommen wir

$$100^2 + 100 = 10.000 + 100 = 10.100$$

Man sieht, dass 100^2 den viel größeren und daher wichtigeren Beitrag zum Ergebnis liefert. Produkte mit mehr Buchstaben sind also gewichtiger und werden daher zuerst geschrieben.

(Anmerkung: Wenn die Buchstaben für kleine Zahlen nahe bei Null stehen, ist es umgekehrt.)

Im nächsten Beispiel multiplizieren wir *drei* Klammern miteinander. Den Ansatz kennen wir schon aus der Grundschule. Wie rechnet man dort $2 \cdot 3 \cdot 5$ aus? Man rechnet Schritt für Schritt. Zunächst werden zwei (z. B. die ersten beiden) Faktoren multipliziert, dann wird dieses Ergebnis mit dem verbleibenden Faktor malgenommen:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$$

Genau diese Methode benutzen wir nun auch hier in der Buchstabenrechnung.

Beispiel 6

$(x+2)(x-1)(x+3) = ?$

Lösung

Wir multiplizieren die ersten beiden Klammern. Das Ergebnis muss in **Klammern** geschrieben werden, da es als **Ganzes** mit der dritten Klammer multipliziert werden muss.

$$\begin{aligned}
&(x+2)(x-1)(x+3) && \\
&= \big(x^2 - x + 2x - 2\big)(x+3) && |\,\text{zusammenfassen} \\
&= \big(x^2 + x - 2\big)(x+3) && |\,\text{ausmultiplizieren} \\
&= x^3 + 3x^2 \; + \; x^2 + 3x \; - \; 2x - 6 && |\,\text{zusammenfassen} \\
&= x^3 + 4x^2 + x - 6 &&
\end{aligned}$$

Das folgende Beispiel enthält Brüche anstelle ganzer Zahlen. Dies ändert nichts am grundsätzlichen Vorgehen. Allerdings sind Grundkenntnisse der Bruchrechnung erforderlich: die Grundrechenarten mit Brüchen sowie Erweitern und Kürzen. Im Anhang sind die wichtigsten Tatsachen des Bruchrechnens zusammengestellt.

Beispiel 7

$$\left(-\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{6}y\right) = ?$$

Lösung

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{6}y\right) \\
= \;& -\frac{1}{5}x\cdot\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x\cdot\frac{5}{6}y + \frac{2}{3}y\cdot\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y\cdot\frac{5}{6}y \\
= \;& -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot x\cdot x + \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot x\cdot y + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot y\cdot x - \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot y\cdot y \\
= \;& -\frac{1\cdot 1}{5\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 5}{5\cdot 6}xy + \frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}xy - \frac{2\cdot 5}{3\cdot 6}y^2 \\
= \;& -\frac{1}{20}x^2 + \frac{5}{30}xy + \frac{2}{12}xy - \frac{10}{18}y^2 \\
= \;& -\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{6}xy - \frac{5}{9}y^2 \\
= \;& -\frac{1}{20}x^2 + \frac{2}{6}xy - \frac{5}{9}y^2 \\
= \;& -\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{5}{9}y^2
\end{aligned}$$

Zum Abschluss betrachten wir eine kompliziertere Situation, bei der Produkte (auch von mehr als zwei Faktoren) addiert und subtrahiert werden. Hierbei ist die bereits erläuterte Konvention *Punkt- vor Strichrechnung* die Grundlage. Eine übersichtliche Schreibweise, die Produkte klar als Blöcke sichtbar macht, ist von entscheidender Bedeutung.

Beispiel 8

$3(2x+1)(x-4) \; - \; 2(x-3)(5x+7) \; = \; ?$

Lösung

Wir bearbeiten zunächst die zwei Produkte (jedes für sich). Dabei multiplizieren wir zuerst die Klammern; das Ergebnis muss in **Klammern** geschrieben werden und als **Ganzes** mit dem Koeffizienten (Vorzahl) multipliziert werden.

$$
\begin{aligned}
& 3(2x+1)(x-4) \; - \; 2(x-3)(5x+7) && |\,\text{ausm.} \\
= \; & 3\cdot\big(2x^2-8x+x-4\big) \; - \; 2\cdot\big(5x^2+7x-15x-21\big) && |\,\text{zusf.} \\
= \; & 3\cdot\big(2x^2-7x-4\big) \; - \; 2\cdot\big(5x^2-8x-21\big) && |\,\text{ausm.} \\
= \; & 6x^2-21x-12 \; - \; \big(10x^2-16x-42\big) && |\,\text{Klam.} \\
= \; & 6x^2-21x-12 \; - \; 10x^2+16x+42 && |\,\text{zusf.} \\
= \; & -4x^2-5x+30
\end{aligned}
$$

Anmerkung:

Das ***Zusammenfassen*** nach dem Ausmultiplizieren der Klammern vereinfacht den Ausdruck sehr, wird aber oft von Anfängern vergessen. Wer auf das Zusammenfassen verzichtet, wird sich oft über lange Lösungswege und häufigere Fehler wundern.

3.5 Die binomischen Formeln

Die binomischen Formeln sagen, wie man in gewissen Sonderfällen schnell ausmultiplizieren kann. Diese Sonderfälle sind:

1. Das Quadrieren einer Summe von zwei Zahlen:

$$(a+b)^2 \; = \; ?$$

2. Das Quadrieren einer Differenz von zwei Zahlen:

$$(a-b)^2 = ?$$

3. Das Produkt einer Summe (von zwei Zahlen) und der entsprechenden Differenz:

$$(a+b)(a-b) = ?$$

Ein Binom ist eine Summe oder Differenz von zwei Zahlen, zum Beispiel $a+b$ oder $a-b$. Das Wort *Binom* ist lateinischen Ursprungs: *bi* bedeutet *zwei*, *nomen* bedeutet *Namen*.

Historische Anmerkungen

1) Die Babylonier benutzten bereits etwa 2000 v. Chr. anschauliche Varianten der binomischen Formeln, um die Multiplikation zweier verschiedener Zahlen auf Quadratzahlen zurückzuführen.

2) Die Bezeichnung *Binom* stammt aus dem Europa des 16. Jahrhunderts.

3) Binomische Formeln, wie wir sie heute kennen, gibt es natürlich erst, nachdem Viète (1540–1603) Buchstaben zur Darstellung beliebiger Zahlen eingeführt hat.

Anwendungen der binomischen Formeln

Einige wichtige Anwendungen der binomischen Formeln sind:

- Schnelles Rechnen und Umformen
- Lösen quadratischer Gleichungen (wie $x^2 + 6x = 16$)
- Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen ()
- Der Kosinussatz in vektorieller Schreibweise ist die 2. binomische Formel.

Wir gehen nun die oben genannten drei elementaren binomischen Formeln durch.

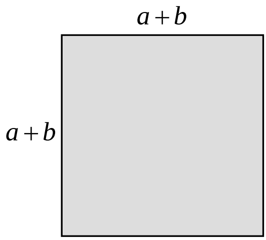
Die 1. binomische Formel

Problemstellung: $(a+b)^2 = ?$

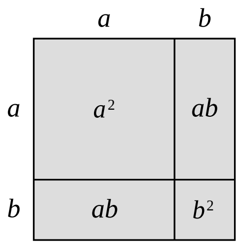
Lösung 1 (anschaulich, d. h. geometrisch)

Vorbemerkung: Der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge x ist $A = x^2$. Umgekehrt kann man jeden Ausdruck der Gestalt x^2 als Fläche eines Quadrates deuten. Das werden wir jetzt tun. Wir deuten $(a+b)^2$ als Flächeninhalt eines Quadrates. Die Seitenlängen des Quadrates betragen $a+b$.

$(a+b)^2$ = Fläche von



= Fläche von



Die Seiten des Quadrates bestehen aus zwei Teilen, das Quadrat aus vier Teilen: aus zwei Quadraten und zwei gleichen Rechtecken. Also ist (alphabetisch geordnet):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Damit ist die erste binomische Formel anschaulich hergeleitet. Wir betrachten auch eine rein rechnerische Begründung durch Ausmultiplizieren.

Lösung 2 (rechnerisch)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && |\,\text{Potenz als Produkt}\\ &= a^2+ab+ba+b^2 && |\,\text{ausmultipliziert}\\ &= a^2+ab+ab+b^2 && |\,ba=ab\\ &= a^2+2ab+b^2 && |\,\text{zusammengefasst}\end{aligned}$$

Also:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Die 2. binomische Formel

Problemstellung: $(a-b)^2 = ?$

Lösung (rechnerisch)

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) && |\,\text{Potenz als Produkt}\\ &= a^2-ab-ba+b^2 && |\,\text{ausmultipliziert}\\ &= a^2-ab-ab+b^2 && |\,ba=ab\\ &= a^2-2ab+b^2 && |\,\text{zusammengefasst}\end{aligned}$$

Also:

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Bemerkung:
Eine anschauliche Herleitung der 2. binomischen Formel ist auch möglich. Sie ist aber nicht so offensichtlich wie bei der 1. binomischen Formel.

Die 3. binomische Formel

Problemstellung: $(a+b)(a-b) = ?$

Lösung (rechnerisch)

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2 && |\,\text{ausmultipliziert}\\ &= a^2-ab+ab-b^2 && |\,ba=ab\\ &= a^2-b^2 && |\,-ab \text{ plus } ab \text{ ergibt } 0\end{aligned}$$

Also:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Wir fassen zusammen:

Die drei binomischen Formeln

1. binomische Formel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Eine sprachliche Formulierung der binomischen Formeln lässt ihre Struktur klarer hervortreten und erleichtert so die Anwendung:

1. binomische Formel
Man quadriert eine Summe (von zwei Zahlen), indem man folgende drei Dinge addiert:
Die zwei quadrierten Summanden und das doppelte gemischte Produkt der Summanden.

2. binomische Formel
Man quadriert eine Differenz (von zwei Gliedern), indem man die quadrierten Glieder addiert und das doppelte *gemischte* Produkt der Glieder *subtrahiert*.

3. binomische Formel
Man multipliziert eine Summe mit der entsprechenden Differenz, indem man die quadrierten Summanden voneinander subtrahiert.

3.6 Anwendungsbeispiele für die 1. und 2. binomische Formel

Beispiel 1 (1. binomische Formel)

$(x+3)^2 = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 && |\text{1. binomische Formel} \\ &= x^2+6x+9 && |\text{gerechnet} \end{aligned}$$

Beispiel 2 (2. binomische Formel)

$(x-3)^2 = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 && |\text{2. binomische Formel} \\ &= x^2-6x+9 && |\text{gerechnet} \end{aligned}$$

Beispiel 3 (Minuszeichen am Anfang)

$(-3+x)^2 = ?$

Lösung 1

$$\begin{aligned} (-3+x)^2 &= (x-3)^2 && |\text{Reihenfolge umgekehrt} \\ &= x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 && |\text{2. binomische Formel} \\ &= x^2-6x+9 && |\text{gerechnet} \end{aligned}$$

Lösung 2 (umständlich, wegen vieler Minuszeichen)

$$\begin{aligned} (-3+x)^2 &= (-3)^2 + 2\cdot(-3)\cdot x + x^2 && |\text{1. binomische Formel} \\ &= 9-6x+x^2 && |\text{gerechnet} \\ &= x^2-6x+9 && |\text{geordnet} \end{aligned}$$

Beispiel 4 (zwei Minuszeichen)

$(-x-3)^2 = ?$

Lösung
Man kann die zwei Minuszeichen zu einem machen, indem eine negative Klammer benutzt wird (ein merkenswerter Trick):

$$-x-3 = -(x+3)$$

Beim Quadrieren fällt das Minuszeichen weg:

$$(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 4^2$$

Wir wenden dies nun an:

$$\begin{aligned}
(-x-3)^2 &= \big(-(x+3)\big)^2 && |\,\text{negative Klammer}\\
&= (x+3)^2 && |\,\text{Minuszeichen weggelassen}\\
&= x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 && |\,\text{1. binomische Formel}\\
&= x^2+6x+9 && |\,\text{gerechnet}
\end{aligned}$$

Beispiel 5 (Buchstabe mit Vorzahl)

$(5x+3)^2 = ?$

Lösung 1 (ausführlich)

$$\begin{aligned}
(5x+3)^2 &= \mathbf{(}5x\mathbf{)}^2 + 2\cdot 5x\cdot 3 + 3^2 && |\,\text{1. binomische Formel}\\
&= 5x\cdot 5x + 30x + 9 && |\,\text{gerechnet}\\
&= 5\cdot 5\cdot x\cdot x + 30x + 9 && |\,\text{geordnet}\\
&= 25x^2+30x+9 && |\,\text{gerechnet}
\end{aligned}$$

Lösung 2 (kurz)

$$\begin{aligned}
(5x+3)^2 &= \mathbf{(}5x\mathbf{)}^2 + 2\cdot 5x\cdot 3 + 3^2 && |\,\text{1. binomische Formel}\\
&= 25x^2+30x+9 && |\,\text{gerechnet}
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

Die ***Klammer*** bei $(5x)^2$ darf nicht weggelassen werden. Denn es gilt die Konvention, dass höhere Rechenarten Vorrang haben:

- Punktrechnung geht vor Strichrechnung,
- Potenzrechnung geht vor Punktrechnung.

Daher ist

$$5x^2 = 5\cdot x^2 = 5\cdot x\cdot x$$

$$(5x)^2 = 5x\cdot 5x = 5\cdot 5\cdot x\cdot x$$

Beispiel 6 (Methode zum Kopfrechnen)

a) $104^2 = ?$

b) $96^2 = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} \text{a)}\ 104^2 &= (100+4)^2 && |\,\text{Zahl als Summe}\\ &= 100^2 + 2\cdot 100\cdot 4 + 4^2 && |\,\text{1. binomische Formel}\\ &= 10.000+800+16 && |\,\text{gerechnet}\\ &= 10.816 && |\,\text{gerechnet}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)}\ 96^2 &= (100-4)^2 && |\,\text{Zahl als Differenz}\\ &= 100^2 - 2\cdot 100\cdot 4 + 4^2 && |\,\text{2. binomische Formel}\\ &= 10.000-800+16 && |\,\text{gerechnet}\\ &= 9.216 && |\,\text{gerechnet}\end{aligned}$$

3.7 Anwendungsbeispiele für die 3. binomische Formel

Beispiel 1

$(x+8)(x-8) = ?$

Lösung

$$(x+8)(x-8) = x^2 - 8^2 \qquad |\,\text{3. binomische Formel}$$

$$= \quad x^2 - 64 \qquad |\,\text{gerechnet}$$

Beispiel 2 (Differenz am Anfang)

$(x-4)(x+4) = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} (x-4)(x+4) &= (x+4)(x-4) && |\,\text{Faktoren vertauscht} \\ &= x^2 - 4^2 && |\,\text{3. binomische Formel} \\ &= x^2 - 16 && |\,\text{gerechnet} \end{aligned}$$

Beispiel 3 (Buchstabe mit Vorzahl)

$(2x+3)(2x-3) = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} (2x+3)(2x-3) &= (2x)^2 - 3^2 && |\,\text{3. binomische Formel} \\ &= 4x^2 - 9 && |\,\text{gerechnet} \end{aligned}$$

Beispiel 4 (viele Minuszeichen)

$(-x+y)(-x-y) = ?$

Lösung

$$\begin{aligned} (-x+y)(-x-y) &= (-x)^2 - y^2 && |\,\text{3. binomische Formel} \\ &= x^2 - y^2 && |\,\text{gerechnet} \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass das Minuszeichen beim Quadrieren wegfällt.

Beispiel 5 (3. binomische Formel rückwärts)

$\frac{a^2 - b^2}{a-b} = ?$

Lösung
Das Kürzen ist zunächst nicht möglich, denn es gilt der warnende traditionelle Spruch: *Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen*. Wir werden den Zähler als Produkt schreiben. Dann kann man kürzen.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-b^2}{a-b} &= \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a-b)} && |\,\text{3. binomische Formel rückwärts}\\
&= \frac{(a+b)\cdot 1}{1} && |\,\text{Faktor } (a-b) \text{ gekürzt}\\
&= a+b && |\,\text{gerechnet}
\end{aligned}$$

Beispiel 6 (Methode zum Kopfrechnen)

$102\cdot 98 = ?$

Lösung
Wir schreiben die beiden Zahlen als Summe bzw. Differenz von 100 und 2. Dann wenden wir die 3. binomische Formel an:

$$\begin{aligned}
102\cdot 98 &= (100+2)\cdot(100-2) && |\,\text{Zahlen als Summe/Differenz}\\
&= 100^2 - 2^2 && |\,\text{3. binomische Formel}\\
&= 10.000-4 && |\,\text{gerechnet}\\
&= 9.996 && |\,\text{gerechnet}
\end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 3.1

1. Berechne:

a) $8a-5a$
b) $-5a+8a$
c) $-7a+3a$
d) $13a-19a$
e) $-21a+8a$
f) $-8b-5b$
g) $8b-5b+7b-20b$
h) $-9c-4c+11c-17c$
i) $-(9a+4a)-(-11a+17a)$
j) $-(9a-4a+11a-17a)$
k) $4x-9x$
l) $-5x+18x$
m) $12x-7x$
n) $8x-5y-3x+2y$
o) $x-6y+4y-3x$
p) $8a-5b+2c-3a+7b-4c$

2. Berechne:

a) $(4a+5b)+(2a+3b)$
b) $(4a+5b)+(2a-3b)$
c) $(4a+5b)-(2a-3b)$
d) $(4a+5b)-(-2a+3b)$
e) $(4a+5b)-(-2a-3b)$
f) $-(9a-4b)-(-11a+17b)$
g) $7a-(4b+6a)$
h) $-\big(2a-(6a-8b)\big)$
i) $5a-\big(\big(-3b+2a\big)-\big(7a+(-9b)\big)\big)$
j) $x-\Big[2y-3x+\Big(4x-\big(5y-6x+(7x-8y)\big)\Big)\Big]$

3. Berechne:

a) $6c-3c$
b) $7d-11d$
c) $-5x+8x$
d) $-4y-7y$

e) $5c-2b+4a+1-3b+2a-7c-3$
f) $-8y+2z-x-4z+2y+5x$
g) $4w-2v+8u-5w-11u$
h) $3n-2m+2n-4n-9n$

4. Berechne:

a) $2a-3b+(4b-a)-(7a-2b-3b)$
b) $2b-3c+4a-(-6c+2a-2c+3b-7a)$
c) $-(-2x+7y-3x)+(5y-6x+2x-3y)-3x+9y$
d) $-3y-4x-(2y-x+3y)$
e) $6-3b+2a-\left(2b-3a-(4a-3b)\right)$
f) $-7x+3-(3x+1-7x+3)$
g) $2-(3v-5w)+(2w-4-v+5w+1)$
h) $\left(2-(u-3v)+5u\right)-\left(3v+1-(-2v+3u)\right)$

Aufgaben zu Kapitel 3.2 bis 3.4

1. Multipliziere aus:

a) $x\cdot(x+5)$
b) $(x+3)\cdot x$
c) $x\cdot(x-7)$
d) $a\cdot(8-a)$
e) $-3\cdot(x-12)$
f) $a\cdot(-x-5)$
g) $-a\cdot(-x+5)$
h) $x\cdot(8x-5z-3+2y)$
i) $(a-2b+3c)\cdot a$
j) $(a-b+c)\cdot(-a)$
k) $(a+3)\cdot(b+4)$
l) $(a+2)\cdot(-b+5)$
m) $(x+6)\cdot(x+3)$
n) $(a+1)\cdot(b+2)$
o) $(2x+3)\cdot(5x-7)$
p) $(2x+3)\cdot(3x-5)$

2. Multipliziere aus:

a) $(x+1)\cdot(x+2)$
b) $(x+4)\cdot(x+5)$
c) $(x+2)\cdot(x-3)$
i) $(a-2)\cdot(b+5)$
j) $(u+1)\cdot(-v+6)$
k) $(x-4)\cdot(b-3)$

d) $(x-3)\cdot(x+4)$
e) $(x-5)\cdot(x-1)$
f) $(-x+3)\cdot(x-4)$
g) $(-x-1)\cdot(-x+2)$
h) $(-x-3)\cdot(-x-7)$
l) $(z+2)\cdot(w-1)$
m) $(x-7)\cdot(y+6)$
n) $(k-2)\cdot(k-3)$
o) $(m+4)\cdot(n-4)$
p) $(a+3)\cdot(a+3)$

3. Multipliziere aus:

a) $(3x+2)\cdot(4x+5)$
b) $(4x+3)\cdot(2x+1)$
c) $(5x+2)\cdot(3x-4)$
d) $(2x-3)\cdot(y+4)$
e) $(3y-5)\cdot(2x-6)$
f) $(-2x+3y)\cdot(5x-4y)$
g) $(-x-y)\cdot(-2x+y)$
h) $(-a-2b)\cdot(-a-6b)$
i) $(3a-2b)\cdot(5a+b)$
j) $(u+v)\cdot(-u+4v)$
k) $(2u-4w)\cdot(3v-5w)$
l) $(w+2)\cdot(z-1)$
m) $(5x-6y)\cdot(2x+3y)$
n) $(a-2b+3c)\cdot(2a-b+5)$
o) $(2m+3n)\cdot(3m-2n)$
p) $(2a+3)\cdot(2a-3)$

4. Multipliziere aus:

a) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\cdot\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$
b) $\left(-\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}y\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}y\right)$
c) $x\cdot\left(1+\frac{1}{2}x\cdot\left(1+\frac{1}{3}x\right)\right)$
d) $(0{,}2x-1{,}3y)\cdot(0{,}5x+4y)$
e) $(x-1)\cdot(1+x+x^2+x^3)$
f) $(x+1)\cdot(1-x+x^2-x^3)$
g) $(4x^2-9y^2)\cdot(4x^2+9y^2)$
h) $(u^2-3v)\cdot(-2u-5v^2)$
i) $(2a-3c)\cdot(4b+2c)$
j) $(5u-3v+2w)\cdot(-u+2v+3w)$
k) $(4x-2y+3)\cdot(5x-3y+2)$
l) $(x^2-3x+2)\cdot(3y-4)$
m) $(3x-6y+2z)\cdot(5x+3y)$
n) $(a-2b+3c)\cdot(a-2b+3c)$
o) $(3u+2v+1)\cdot(3u+2v-1)$
p) $(4a-3)\cdot(4a-3)$

5. Multipliziere aus:

a) $3x \cdot (2x+5) \cdot x$

b) $(3x+5) \cdot (2x+3) \cdot x$

c) $(x+5) \cdot (x+3) \cdot (x-7)$

d) $(x+y+5) \cdot (x+2y+3)$

e) $(2x-3y+5) \cdot (5x+y-1)$

f) $(x-1) \cdot (1+x+x^2)$

g) $(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$

h) $(3x+1) \cdot (5x-2) \cdot (2x-3)$

i) $(x^2-x) \cdot (1+x+x^2)$

j) $(x^2-1) \cdot (1+x+x^2+x^3)$

k) $(a+3) \cdot (b+4) \cdot (c+5)$

l) $(a+b+2) \cdot (-b+3+c)$

m) $(2a-3b+5c) \cdot (a+b-3+c)$

n) $(a+1) \cdot (b+2) \cdot (c-3)$

o) $(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)$

6. Berechne:

a) $(x+3)^2$

b) $(x-1) \cdot (x+2) \ + \ (x+3) \cdot (x+1)$

c) $(x+5)^2 \ + \ 3 \cdot (2x+3)$

d) $2 \cdot (x+5) \cdot (x+3) \ - \ (x-7)(2x+1)$

e) $(2x+y)^2 \ - \ (x-3y)^2$

f) $(2a-3b) \cdot (3a+b) \ - \ 2 \cdot (3a+b) \cdot (a-b)$

Aufgaben zu Kapitel 3.5 und 3.6

1. Benutze die *binomischen Formeln*:

a) $(x+5)^2$	b) $(x+2)^2$	c) $(x+3)(x+3)$
d) $(x+y)^2$	e) $(x+3y)^2$	f) $(5x+7y)^2$
g) $(3u+2v)^2$	h) $(a+5b)^2$	i) $(x+5y)^2$
j) $(x-5y)^2$	k) $(2x-y)^2$	l) $(-2x+3y)^2$
m) $(-x-7)^2$	n) $(2a-3b)^2$	o) $(7x-3)^2$

2. Berechne:

a) $\left(5\cdot(x+1)\right)^2$

b) $\left(4(x-3)\right)^2$

c) $\left(3(5x+2)\right)^2$

d) $\left(2y(3x+1)\right)^2$

3. Vereinfache mithilfe der binomischen Formeln:

a) $(x+3)^2 + (x-3)^2$

b) $(x+5)^2 + (x-5)^2$

c) $(2x+1)^2 - (3x-2)^2 + 3\cdot(x+5)^2$

d) $(x+7)^2 + (x-7)^2 + 2(x-7)(x+7)$

e) $(x^2+3)^2 - (x^2-2)^2 + 4(x+3)^2$

4. Berechne mithilfe der binomischen Formeln:

a) 101^2

b) 103^2

c) 1008^2

d) 205^2

e) 99^2

f) 94^2

g) 993^2

h) 195^2

Aufgaben zu Kapitel 3.7

1. Benutze die *dritte binomische Formel*:

a) $(x+5)(x-5)$

b) $(x+2)(x-2)$

c) $(x+3)(x-3)$

d) $(x+y)(x-y)$

e) $(x+3y)(x-3y)$

f) $(5x+7y)(5x-7y)$

g) $(3u+2v)(3u-2v)$

h) $(a+5b)(a-5b)$

i) $(x+5y)(x-5y)$

j) $(2x-3y)(2x+3y)$

k) $(x+2y)(x-2y)$

l) $(-2x+3y)(-2x-3y)$

m) $(-x+7)(x+7)$

n) $(2a+3b)(-2a+3b)$

o) $(-7x+3)(-7x-3)$

2. Berechne:

a) $5\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

b) $4\cdot(x-3)\cdot(x+3)$

c) $3\cdot(-5x+2)\cdot(5x+2)$

d) $2y\cdot(3x+1)\cdot(3x-1)$

3. Vereinfache mithilfe der binomischen Formeln:

a) $(x+3)(x-3)\;+\;(x-2)(x+2)\;-\;(x+1)(x-1)$

b) $(x+2)^2\;+\;(x-2)^2\;-\;(x+3)(x-3)$

c) $(x+3)^2\;+\;(x-3)^2\;+\;(x+3)(x-3)$

d) $\dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$

e) $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$

f) $\dfrac{(x - y)^2}{x^2 - y^2}$

4. Berechne mithilfe der dritten binomischen Formel:

a) $107 \cdot 93$

b) $1006 \cdot 994$

c) $101 \cdot 99^2$

d) $28 \cdot 32$

4. Gleichungen

Einfache Gleichungen wurden bereits in der Einführung betrachtet. In diesem Kapitel widmen wir uns auch komplizierteren Gleichungen.

4.1 Die Methode

Wir betrachten erneut die Gleichung aus der Einleitung:

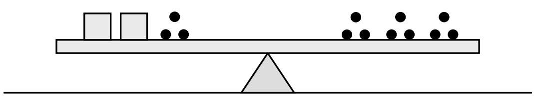
$$2x+3 = 9$$

In Worten: Wenn man eine Zahl verdoppelt und dann 3 addiert, kommt 9 heraus. Welche Zahl ist es?

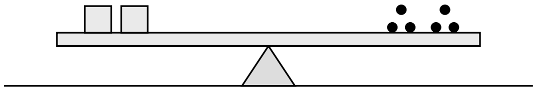
Zunächst wiederholen wir den anschaulichen Lösungsweg (mittels einer Waage). Danach werden wir den gleichen Weg in der modernen Sprache der Buchstabenrechnung formulieren.

Anschauliche Lösung

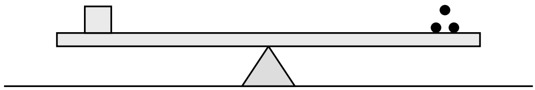
Die gesuchte Zahl x stellen wir uns als undurchsichtige Box vor, die Äpfel in unbekannter Anzahl enthält. Zwei identische solcher Boxen stehen dann für $2x$. Die Zahlen 3 und 9 stellen wir uns als 3 Äpfel beziehungsweise 9 Äpfel vor, die wir in stilisierter Form als dicke Punkte schreiben.
Die in der Gleichung ausgedrückte Gleichheit besagt nun, dass sich die folgende Waage im Gleichgewicht befindet:



Wir nehmen nun auf ***beiden*** Seiten 3 Äpfel weg. Das Gleichgewicht bleibt bestehen, links befinden sich lediglich Boxen:



Nun nehmen wir auf beiden Seiten die Hälfte. Das Gleichgewicht bleibt, links steht nur noch ***eine*** Box:



Offenbar enthält die Box also drei Äpfel. Das heißt in der Formelsprache: $x = 3$.

Lösung in der Sprache der Buchstabenrechnung

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 9 \qquad |-3 \quad \text{(d. h. auf \textbf{beiden} Seiten 3 abziehen)} \\ 2x &= 6 \qquad |:2 \quad \text{(d. h. \textbf{beide} Seiten durch 2 teilen)} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Auch hier ist es das strategische Ziel, dass die Unbekannte x nur auf einer Seite vorkommt, und zwar nur einmal.

4.2 Beispiele

Wir betrachten nun drei etwas kompliziertere Gleichungen. Die erste enthält die Unbekannte auf beiden Seiten, außerdem soll eine Probe gemacht werden. In der zweiten Gleichung kommen auch negative Zahlen vor. Die dritte Gleichung ist gewissermaßen aufgebauscht und muss zunächst vereinfacht und bereinigt werden. Bei Verständnisproblemen ist es oft sehr hilfreich, an die Waage mit Boxen und Äpfeln zu denken.

Beispiel 1

Löse die Gleichung

$$5x+7 = 2x+13$$

und mache die Probe.

Lösung

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 2x+13 && |-2x \text{ (Ziel: alle } x \text{ nur auf } \textbf{einer} \text{ Seite)} \\ 3x+7 &= 13 && |-7 \text{ (damit links nur die } x \text{ vorkommen)} \\ 3x &= 6 && |:3 \text{ (damit nur } \textbf{ein } x \text{ vorkommt)} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe

Man geht bei der Probe von der Original-Gleichung aus, ersetzt x durch 2 (*einsetzen*) und rechnet jede Seite getrennt aus:

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 2x+13 && |\, x=2 \text{ einsetzen} \\ 5\cdot 2+7 &= 2\cdot 2+13 && |\,\text{Produkte berechnen} \\ 10+7 &= 4+13 && |\,\text{Summen berechnen} \\ 17 &= 17 && |\,\text{Die Probe geht auf.} \end{aligned}$$

Das Ergebnis $x=2$ ist also richtig.

Beispiel 2

$-2x-5 = 3$

Lösung

Zunächst bringen wir die –5 zum Verschwinden, indem wir 5 addieren. (Beachte: $-5+5=0$.) Dann teilen wir durch die Vorzahl von x, nämlich –2:

$$\begin{aligned} -2x-5 &= 3 && |+5 \text{ (damit links die } -5 \text{ verschwindet)} \\ -2x &= 8 && |:(-2) \text{ (damit nur } \textbf{ein } x \text{ vorkommt)} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Beispiel 3

$$(2x-3)^2 + 5x-1 = x - 1 - (4x+1)(2-x)$$

Lösung

Wir vereinfachen zunächst beide Seiten (jede für sich). Auf der linken Seite wenden wir die 2. Binomische Formel an. Auf der rechten Seite multiplizieren wir aus und lösen die negative Klammer auf. Anschließend fassen wir jeweils zusammen.

$$\begin{aligned}
(2x-3)^2 + 5x-1 &= x - 1 - (4x+1)(2-x) \\
4x^2-12x+9 + 5x-1 &= x - 1 - \mathbf{(}8x-4x^2+2-x\mathbf{)} \\
4x^2-7x+8 &= x - 1 - \mathbf{(}7x-4x^2+2\mathbf{)} \\
4x^2-7x+8 &= x - 1 - 7x+4x^2-2 \\
4x^2-7x+8 &= 4x^2-6x-3
\end{aligned}$$

Nun soll die Unbekannte x nur auf der linken Seite vorkommen:

$$\begin{aligned}
4x^2-7x+8 &= 4x^2-6x-3 && |-4x^2 \\
-7x+8 &= -6x-3 && |+6x \\
-x+8 &= -3 && |-8 \\
-x &= -11 && |\cdot(-1) \text{ (Vorzeichenumkehr)} \\
x &= 11
\end{aligned}$$

Anmerkungen

1. Im letzten Schritt haben wir mit –1 multipliziert, um die Vorzeichen zu verändern und so $-x$ in x zu überführen. Dies ist ein in der Mathematik häufig benutzter Kunstgriff.

2. Im letzten Schritt kann man selbstverständlich auch $-x$ als $(-1)x$ auffassen und dann durch die Vorzahl –1 dividieren.

4.3 Addition von Brüchen mit Hilfe von Gleichungen

Nun werden wir Gleichungen benutzen, um zwei Brüche zu addieren, *ohne* von der entsprechenden Regel der Bruchrechnung

Gebrauch zu machen. Die Methode wird uns auch beim Lösen von *Bruchgleichungen* dienlich sein.

Wir verwenden nun die folgende Tatsache aus der Bruchrechnung: Wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multipliziert, so kommt der Zähler heraus (und der Bruch ist verschwunden):

$$\boxed{\frac{3}{5}\cdot 5 = 3}$$

Wir bieten zwei Begründungen an.

1. Begründung (Kürzen):

$$\frac{3}{5}\cdot 5 = \frac{3}{\cancel{5}_1}\cdot \cancel{5}^1 = 3$$

2. Begründung (Bruch als Division):

$$\frac{3}{5} = 3:5$$

Also

$$\frac{3}{5}\cdot 5 = (3:5)\cdot 5 = 3$$

Erst wird durch 5 geteilt, dann wird wieder mit 5 malgenommen. Daher muss die ursprüngliche 3 herauskommen. Das entspricht übrigens der Probe bei der Division.

Wir werden nun die folgende Summe von zwei Brüchen berechnen:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$$

Das Ergebnis ist unbekannt und wird daher mit x bezeichnet. Wir erhalten eine Gleichung, die wir dann mit den betrachteten Methoden lösen können:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = x\,.$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{3}{7} &= x && |\cdot 5 \ \text{(um den linken Bruch loszuwerden)} \\ \frac{2}{5}\cdot 5 + \frac{3}{7}\cdot 5 &= 5x && |\,\text{Produkte berechnen} \\ 2 + \frac{15}{7} &= 5x \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $\frac{3}{7}\cdot 5 = \frac{3\cdot 5}{7} = \frac{15}{7}$ gerechnet. Dies leuchtet ein, denn „5 mal 3 Siebtel“ kann man als „5 mal 3 Äpfel“ deuten, was offensichtlich 15 Äpfel (Siebtel) ergibt.

Wir fahren fort:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{15}{7} &= 5x && |\cdot 7 \ \text{(um den Bruch loszuwerden)} \\ 2\cdot 7 + \frac{15}{7}\cdot 7 &= 35x && |\,\text{Produkte berechnen} \\ 14 + 15 &= 35x && |\,\text{zusammenfassen} \\ 29 &= 35x && |:35 \ \text{(Division als Bruch schreiben)} \\ \frac{29}{35} &= x \\ x &= \frac{29}{35} \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{29}{35}$$

4.4 Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen, die Brüche enthalten, in deren Nennern die Unbekannte steht, beispielsweise:

$$\frac{10}{2x-1} + 3 = 5.$$

Solche Gleichungen können mit dem im vorigen Abschnitt angewendeten Ansatz gelöst werden: Um einen Bruch loszuwerden, multipliziert man mit seinem Nenner.

Auch in anderen Situationen führt dieser Ansatz zum Ziel. Viele Formeln enthalten Brüche und können so bearbeitet werden. Möchte man beispielsweise die Höhe h eines Dreiecks mit der Grundseite g und dem Flächeninhalt A berechnen, so wird man von der Flächenformel

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

ausgehen und h als Unbekannte (wie x) betrachten. Die Formel wird zu einer Gleichung mit der Unbekannten h:

$$\begin{aligned} A &= \frac{g \cdot h}{2} && | \cdot 2 \\ 2A &= g \cdot h && | : g \\ \frac{2A}{g} &= h && | \text{Seiten vertauschen} \\ h &= \frac{2A}{g} \end{aligned}$$

Damit haben wir, wie man sagt, die Formel *nach h aufgelöst*.

Wir werden nun mehrere Beispiele von Bruchgleichungen betrachten.

Beispiel 1

$$\frac{4}{x} + 5 = 7$$

Lösung 1 (erst vereinfachen, dann Bruch loswerden)

$$\frac{4}{x} + 5 = 7 \qquad | -5$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} &= 2 && |\cdot x \text{ (um den Bruch loszuwerden)} \\
4 &= 2x && |:2 \\
2 &= x && |\text{Seiten vertauschen} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Lösung 2 (erst Bruch loswerden, dann vereinfachen)

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} + 5 &= 7 && |\cdot x \text{ (um den Bruch loszuwerden)} \\
\left(\frac{4}{x} + 5\right)\cdot x &= 7x && |\text{ausmultiplizieren} \\
\frac{4}{x}\cdot x + 5x &= 7x && |\text{Bruch verrechnen} \\
4 + 5x &= 7x && |-5x \\
4 &= 2x && |:2 \\
2 &= x && |\text{Seiten vertauschen} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\frac{10}{2x-1} + 3 = 5$$

Lösung 1 (erst vereinfachen, dann Bruch loswerden)

$$\begin{aligned}
\frac{10}{2x-1} + 3 &= 5 && |-3 \\
\frac{10}{2x-1} &= 2 && |\cdot(2x-1) \text{ (um den Bruch loszuwerden)} \\
10 &= 2(2x-1) && |\text{ausmultiplizieren} \\
10 &= 4x-2 && |+2 \\
12 &= 4x && |:4 \\
3 &= x && |\text{Seiten vertauschen} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Lösung 2 (erst Bruch loswerden, dann vereinfachen)

$$\begin{aligned}
\frac{10}{2x-1} + 3 &= 5 && |\cdot(2x-1) \text{ (Bruch weg)}\\
\frac{10}{2x-1}\cdot(2x-1) + 3\cdot(2x-1) &= 5\cdot(2x-1) && |\text{ausmultiplizieren}\\
10 + 6x-3 &= 10x-5 && |\text{zusammenfassen}\\
6x+7 &= 10x-5 && |-6x\\
7 &= 4x-5 && |+5\\
12 &= 4x && |:4\\
3 &= x && |\text{Seiten vertauschen}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\frac{4}{x} = \frac{3}{5}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} &= \frac{3}{5} && |\cdot 5 \text{ (um den Bruch rechts loszuwerden)}\\
\frac{20}{x} &= 3 && |\cdot x \text{ (um den Bruch loszuwerden)}\\
20 &= 3x && |:3\\
\frac{20}{3} &= x && |\text{Seiten vertauschen}\\
x &= \frac{20}{3} = 6\tfrac{2}{3} = 6,666\ldots
\end{aligned}$$

Beispiel 4

$$\frac{2x+5}{2x-1} = 3$$

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{2x+5}{2x-1} &= 3 && |\cdot(2x-1) \text{ (um den Bruch loszuwerden)} \\ 2x+5 &= 3\cdot(2x-1) && |\text{ausmultiplizieren} \\ 2x+5 &= 6x-3 && |-6x \\ -4x+5 &= -3 && |-5 \\ -4x &= -8 && |:(-4) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Beispiel 5

$$\frac{3x+4}{x+3} = \frac{6x+2}{2x+3}$$

Lösung

Wir befreien uns zunächst von den Brüchen, indem wir jeweils mit dem Nenner multiplizieren:

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{x+3} &= \frac{6x+2}{2x+3} && |\cdot(x+3) \\ 3x+4 &= \frac{(6x+2)\cdot(x+3)}{2x+3} && |\cdot(2x+3) \\ (3x+4)\cdot(2x+3) &= (6x+2)\cdot(x+3) \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir aus und fassen zusammen:

$$\begin{aligned} (3x+4)\cdot(2x+3) &= (6x+2)\cdot(x+3) && |\text{ausmultiplizieren} \\ 6x^2+9x+8x+12 &= 6x^2+18x+2x+6 && |\text{zusammenfassen} \\ 6x^2+17x+12 &= 6x^2+20x+6 \end{aligned}$$

Wir ziehen nun $6x^2$ ab. Dadurch fallen die x^2-Terme weg, und es bleibt eine einfache Gleichung bekannter Art übrig:

$$\begin{aligned} 6x^2+17x+12 &= 6x^2+20x+6 && |-6x^2 \\ 17x+12 &= 20x+6 && |-20x \\ -3x+12 &= 6 && |-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x &= -6 \qquad |:(-3) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Das nächste Beispiel ist eine abstrakte Bruchgleichung, in der die konkreten Zahlen durch Buchstaben ersetzt wurden. Die Lösungsmethode ist dieselbe wie bei konkreten Bruchgleichungen. Nur an einer Stelle kann man ins Stocken geraten:

Die Berechnung von

$$5x - 3x$$

fällt leicht. Man subtrahiert 3 von 5, betrachtet x gewissermaßen als Einheit (wie Meter, m) und bekommt das Ergebnis $2x$. Ausführlich aufgeschrieben ist das Vorgehen also wie folgt:

$$\begin{aligned} 5x - 3x &= (5-3)x \\ &= 2x \end{aligned}$$

Es springt ins Auge, dass man dies auch als rückwärtiges Ausmultiplizieren auffassen kann. Das wird als *Ausklammern* eines gemeinsamen Faktors (hier x) bezeichnet.

Wir ersetzen nun 5 und 3 durch die Buchstaben a und b, und berechnen:

$$ax - bx = (a-b)x\,.$$

Beispiel 6

$$\frac{ax+1}{bx+1} = c$$

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{ax+1}{bx+1} &= c \qquad &&|\cdot(bx+1) \\ ax+1 &= c\cdot(bx+1) \qquad &&|\,\text{ausmultiplizieren} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ax+1 &= bcx+c && |-bcx \\
ax-bcx+1 &= c && |-1 \\
ax-bcx &= c-1 && |\ x \text{ ausklammern} \\
(a-bc)x &= c-1 && |:(a-bc) \\
x &= \frac{c-1}{a-bc}
\end{aligned}
$$

4.5 Formeln umstellen

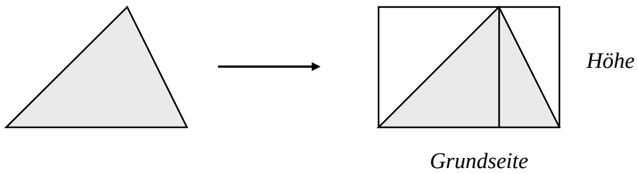
Formeln fassen die Berechnung einer Größe in einem Rechenausdruck zusammen. Beispielsweise ist der Flächeninhalt A eines Dreiecks mit der Grundseite g und der Höhe h durch die Formel

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

gegeben. Vor Vietas Einführung der Buchstaben hat man die Berechnung der Dreiecksfläche sprachlich ausgedrückt, etwa so:

Die Fläche eines Dreiecks ist halb so groß wie die Fläche eines Rechtecks mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe.

Folgende Vorstellung steckt dahinter:



Obwohl die Formel

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

eigentlich der Berechnung von A dient, kann man mit ihr auch g oder h berechnen. Dazu muss man die Formel als *Gleichung* auffassen, und die zu berechnende Größe als *Unbekannte*.

Wir betrachten beispielsweise A und h als gegeben, und möchten die Grundseite g berechnen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{g \cdot h}{2} && | \cdot 2 \\ 2A &= g \cdot h && | : h \\ \frac{2A}{h} &= g && | \text{Seiten vertauschen} \\ g &= \frac{2A}{h} \end{aligned}$$

Wir haben die Formel, wie man sagt, nach g *aufgelöst* oder *umgestellt*.

Umstellen der Tageszinsformel

In der deutschen kaufmännischen Rechnung wird das Jahr mit 360 Tagen angesetzt. Die Formel zur Berechnung des Tageszinsen Z lautet dann:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Hierbei ist K das zu verzinsende Kapitel (bzw. Kreditbetrag), p der Zinssatz (stets auf **ein** Jahr bezogen), t die Laufzeit in Tagen.

Diese Formel kann anhand von Dreisätzen gut hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} 100\ \%\text{ von } K &= K \\ 1\ \%\text{ von } K &= \frac{K}{100} \\ p\ \%\text{ von } K &= \frac{K}{100} \cdot p = \frac{K \cdot p}{100} \quad \text{(Zinsen für 1 Jahr)} \end{aligned}$$

Diese Jahreszinsen werden nun auf die Laufzeit t heruntergerechnet:

$$\begin{aligned}
\text{Zinsen für 1 Jahr} \quad &= \quad \frac{K \cdot p}{100} \\
\text{Zinsen für 1 Tag} \quad &= \quad \frac{K \cdot p}{100} : 360 = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 360} \\
\text{Zinsen für t Tage} \quad &= \quad \frac{K \cdot p}{100 \cdot 360} \cdot t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}
\end{aligned}$$

Die Tageszinsen sind also:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Wir lösen beispielsweise nach K auf:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} && | \cdot (100 \cdot 360) \\
Z \cdot 100 \cdot 360 &= K \cdot p \cdot t && | : (p \cdot t) \\
\frac{Z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t} &= K && | \text{Seiten vertauschen} \\
K &= \frac{Z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}
\end{aligned}$$

Zur Übung sei dem Leser empfohlen, die Tageszinsformel auch nach p und t aufzulösen.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 4.1 bis 4.2

1. Löse die Aufgaben aus Kapitel 1 und mache die Probe.

2. Löse die folgenden Gleichungen und mache die Probe.

a) $2x+3 = 7$
b) $2x+5 = 19$
c) $3x+4 = 13$
d) $3x+7 = 34$

e) $4x+9 = 73$
f) $7x+3 = 38$
g) $12x+5 = 77$
h) $9x+14 = 86$

i) $8x+21 = 85$
j) $5x+18 = 78$
k) $2x+3 = 8$
l) $2x+5 = 12$

m) $3x+3 = 18$
n) $9x+2 = 38$
o) $4x+3 = 50$
p) $5x+8 = 63$

3. Löse die folgenden Gleichungen und mache die Probe.

a) $5x+6 = 3x+10$
b) $7x+3 = 4x+12$
c) $6x+18 = 2x+82$
d) $10x+15 = 3x+50$
e) $9x+40 = 4x+100$
f) $8+12x+6 = 30+3x+56$
g) $x+7+4x = 2x+23$
h) $3x+10+5x = 30+4x+27$
i) $2x+8+6x+13 = x+10+5x+12$
j) $10+3x+8+4x = x+8+x+12$

4. Wenn man eine Zahl mit 11 malnimmt und dann 18 addiert, bekommt man 150. Welche Zahl ist es?

5. Wenn man eine Zahl mit 13 malnimmt und dann 9 addiert oder wenn man die Zahl mit 9 malnimmt und dann 85 addiert, kommt dasselbe heraus. Welche Zahl ist es?

6. Löse die folgenden Gleichungen und mache die Probe.

a) $2x+4=-6$
b) $2x-5=7$
c) $3x+4=-5$
d) $3x+8=-19$
e) $4x-7=41$
f) $7x+3=-39$
g) $12x+4=-56$
h) $9x-12=60$
i) $8x+23=-33$
j) $5x-16=34$
k) $2x+4=1$
l) $2x+5=-1$
m) $3x-5=-1$
n) $9x+6=-30$
o) $-4x-5=3$
p) $-5x-17=-2$

7. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $5x+6=3x+2$
b) $7x+3=4x-6$
c) $6x-18=2x+46$
d) $10x+15=3x-20$
e) $9x-40=4x+20$
f) $8+12x+6=-5+3x-53$
g) $x+8+4x=2x+1$
h) $3x+10-5x=-30+4x+22$
i) $2x+8+6x+13=x+19+5x+0{,}5$
j) $10+3x+8+4x=x+4+x+12$

8. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $3x+4+(x+1)^2=x^2+x+9$
b) $2+(x+3)^2+x=(x+1)^2+3x+14$
c) $(x+1)^2+3x-x^2=(x+2)^2-(x-1)^2-13$
d) $(x+3)^2-(x-3)^2+5=6x+29$
e) $(2x+3)^2-5x+4(x-2)(x+2)-(3x-2)^2+5=$
$(x+2)(3-x)+3x-27$

9. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich sie mit 5 multipliziere und dann 16 addiere, so erhalte ich 101. Welche Zahl ist es?

10. Wenn man eine Zahl mit 7 multipliziert und dann 35 addiert, erhält man 63. Welche Zahl ist es?

11. Eine Zahl wird mit 8 multipliziert, dann wird 27 subtrahiert, und das ergibt 69. Welche Zahl ist es?

12. Wenn man eine Zahl mit –6 multipliziert und dann 58 subtrahiert, erhält man 50. Welche Zahl ist es?

13. Wenn man das Vierfache einer Zahl um 1 vermindert, so bekommt man 146 abzüglich des Dreifachen der Zahl. Welche Zahl ist es?

14. Wenn man die Summe des Doppelten einer Zahl und 5 vervierfacht, ergibt sich 92. Welche Zahl ist es?

15. Löse die folgenden Gleichungen.

a) $(x+3)^2 = x^2+2x-20$

b) $(x-2)^2 = x^2-5x+8$

c) $(x+2)(3x-1) = 2x^2+x(x-2)+5x+2$

d) $(x+4)^2+(x-4)^2 = 2(x+4)(x-4)+6x+16$

e) $6x+2+2(x+1)(3x-2) = 3(2x-1)(x+4)-3x$

f) $-(2x-1)^2-3(x+5)(5-x)+(x+3)^2 = -24x+1$

Aufgaben zu Kapitel 4.3

1. Berechne die folgenden Summen und Differenzen von Brüchen mithilfe von Gleichungen:

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{3}$ c) $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{2}-\frac{4}{3}$ e) $\frac{8}{7}+\frac{5}{3}$ f) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

Aufgaben zu Kapitel 4.4

1. Löse die folgenden Bruchgleichungen:

a) $\frac{8}{x} = 2$

b) $\frac{6}{x}+5 = 8$

c) $\frac{2}{x} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{15}{4x}+7 = 12$

e) $\frac{21}{x-1}-9 = -6$

f) $\frac{20}{2x-3}+10 = 14$

2. Löse die folgenden Bruchgleichungen:

a) $\frac{6}{x+1}+3 = 5$

b) $\frac{15}{x+2}+3 = 6$

c) $7-\frac{6}{5-x} = 5$

d) $\frac{1}{2x-5}+2 = \frac{4}{2x-5}-1$

3. Löse die folgenden Bruchgleichungen:

a) $\frac{3x-6}{2x-2} = 1$

b) $\frac{4x-2}{3x+4} = 2$

c) $\frac{5x-7}{3x+7} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{7x+1}{x+1} = 4$

4. Löse die folgenden Bruchgleichungen:

a) $\frac{x+6}{x+2} = \frac{x+4}{x+1}$

b) $\frac{x+5}{x+1} = \frac{x+7}{x+2}$

c) $\frac{x+1}{3x+1} = \frac{x+2}{3x+3}$

d) $\frac{5x}{x+1} = \frac{5x-8}{x-1}$

5. Löse die folgenden Bruchgleichungen (d. h. finde x):

a) $ax+b = c$

b) $\frac{a}{x+b} = c$

c) $\frac{c}{ax+b} = d$

d) $\frac{ax+b}{cx+d} = e$

e) $\frac{c}{ax+b} = \frac{f}{dx+e}$

5. Anwendungen

Wir behandeln zunächst die üblichen Textaufgaben. Im zweiten Abschnitt wird erläutert, wie man Dreisatzaufgaben mithilfe von Gleichungen lösen kann (Verhältnisgleichungen).

5.1 Textaufgaben

Wir betrachten nun Anwendungsaufgaben, die teilweise recht schwierig sind, wenn man sie nur mit gesundem Menschenverstand angeht.
Mit der Methode, die Aufgabe zunächst als Gleichung zu formulieren und die Gleichung dann zu lösen, kommt man oft leichter ans Ziel. Die Gleichung aufzustellen, ist dabei das Hauptproblem. Eine gewisse Technik und ein systematischer Rahmen helfen oft dabei.

Wir betrachten nur Aufgaben mit *einer* Unbekannten (aus der sich andere in der Aufgabe eventuell gesuchte Größen direkt berechnen lassen). ***Bevor*** man eine Gleichung aufstellen kann, muss vollkommene Klarheit darüber herrschen, welche der Größen in der Aufgabe die Unbekannte ist. Das ist nicht nur eine logische Voraussetzung, sondern eine Erleichterung beim Auffinden der richtigen Gleichung.

So besteht der Lösungsweg einer Textaufgabe stets aus folgenden drei großen Teilen:

1. Benennung der Unbekannten (und Situationsbeschreibung wie Skizzen u.a.)
2. Das Aufstellen der Gleichung
3. Das Lösen der Gleichung

Wir werden nun drei Beispielaufgaben in diesem Sinne bearbeiten, eine alltagsbezogene, eine geometrische und eine Altersrätsel-Aufgabe.

Beispiel 1

Frau Schmitz kauft 7 Liter Milch. Herr Petersen kauft 4 Liter Milch. Frau Schmitz zahlt 2,40 Euro mehr als Herr Petersen. Was kostet ein Liter Milch?

Lösung

1. Unbekannte benennen

$$x = \text{Preis von 1 Liter Milch (in €)}$$

2. Gleichung aufstellen

Vorbemerkungen

1 Liter $\rightarrow$ x (1 Liter kostet x), daher:

7 Liter $\rightarrow 7x$

4 Liter $\rightarrow 4x$

Also:

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Einkaufswert Schmitz} & = & \textit{Einkaufswert Petersen} & + & 2{,}40\ € \\ 7x & = & 4x & + & 2{,}4 \end{array}$$

3. Gleichung lösen

$$\begin{aligned} 7x &= 4x + 2{,}4 && |-4x \\ 3x &= 2{,}4 && |:3 \\ x &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Antwort

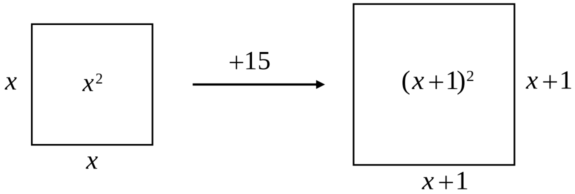
Ein Liter Milch kostet 0,80 €.

Beispiel 2

Verlängert man die Seiten eines Quadrates um 1 cm, so vergrößert sich sein Flächeninhalt um 15 cm². Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

Lösung

1. Situationsbeschreibung und Benennung der Unbekannten



x = Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates

2. Gleichung aufstellen

Wenn man die obige Zeichnung von links nach rechts betrachtet, erhält man die Gleichung:

$$\begin{array}{ccccc} \textit{kleine Fläche} & + & 15 & = & \textit{große Fläche} \\ x^2 & + & 15 & = & (x+1)^2 \end{array}$$

3. Gleichung lösen

$$\begin{aligned} x^2+15 &= (x+1)^2 && |\text{1. binomische Formel} \\ x^2+15 &= x^2+2x+1 && |-x^2 \\ 15 &= 2x+1 && |-1 \\ 14 &= 2x && |:2 \\ 7 &= x && |\text{Seiten vertauschen} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Antwort

Die Seiten des ursprünglichen Quadrates sind 7 cm lang.

Im folgenden Beispiel 3 wird ein typisches Altersrätsel gelöst.

Beispiel 3

Tobias ist dreimal so alt wie Anna. In sieben Jahren wird Tobias nur noch doppelt so alt wie Anna sein. Wie alt sind Anna und Tobias jetzt?

Lösung

1. Situationsbeschreibung und Benennung der Unbekannten

Alter von Anna und Tobias

	Anna	Tobias
jetzt:	x	$3x$
in 7 Jahren:	$x+7$	$2\cdot(x+7)$ bzw. $3x+7$

$$x = \text{jetziges Alter von Anna}$$

Derartige Tabellen haben sich bei der Lösung von Altersrätseln sehr bewährt.

2. Gleichung aufstellen

Rechts unten ist das *Alter von Tobias in 7 Jahren* auf zweierlei Arten ausgedrückt. Dies liefert direkt die Gleichung:

$$\text{2 mal (Annas Alter in 7 Jahren)} = \text{jetziges Alter von Tobias + 7}$$

$$2\cdot(x+7) = 3x+7$$

3. Gleichung lösen

$$\begin{aligned} 2\cdot(x+7) &= 3x+7 && |\,\text{ausmultiplizieren} \\ 2x+14 &= 3x+7 && |-2x \\ 14 &= x+7 && |-7 \\ 7 &= x && |\,\text{Seiten vertauschen} \\ x &= 7 && \text{(jetziges Alter von Anna)} \end{aligned}$$

4. Aktuelles Alter von Tobias

Tobias ist dreimal so alt wie Anna:

$$3\cdot 7 \text{ Jahre} = 21 \text{ Jahre}$$

Antwort

Anna ist 7 Jahre alt und Tobias 21 Jahre.

5.2 Dreisatz und Verhältnisgleichungen

Wenn man Gleichungen, insbesondere Bruchgleichungen, kennengelernt hat, eröffnet sich eine kurze und elegante Methode zur Lösung von Dreisätzen.

Angenommen, 2 kg Äpfel kosten 6 € und wir möchten wissen, was 5 kg Äpfel kosten. Das elementare Verfahren besteht darin, zunächst den Preis von 1 kg Äpfeln zu berechnen und dann die gesuchten Kosten von 5 kg Äpfeln:

$$\begin{aligned} 2\text{ kg} &\rightarrow 6\text{ €} \\ 1\text{ kg} &\rightarrow \frac{6\text{ €}}{2} \\ 5\text{ kg} &\rightarrow \frac{6\text{ €}}{2}\cdot 5 \end{aligned}$$

Die gesuchten Kosten x für 5 kg Äpfel sind also:

$$x = \frac{6\text{ €}}{2}\cdot 5$$

Beide Kilogramm-Angaben (2 und 5) stehen auf der rechten Seite. Dagegen sind die Eurobeträge x und 6 € über beide Seiten verteilt. Um Ordnung und eine schöne Symmetrie herzustellen, bringen wir die 6 € auf die linke Seite. Dazu dividieren wir durch 6 €, nachdem wir die rechte Seite in eine geeignete Gestalt gebracht haben:

$$\begin{aligned} x &= \frac{6\text{€}}{2}\cdot 5 && |\,5 \text{ mit dem Zähler multiplizieren} \\ x &= \frac{6\text{ €}\cdot 5}{2} && |\,6\text{ € vor den Bruch ziehen} \\ x &= 6\text{ €}\cdot\frac{5}{2} && |:6\text{ €} \\ \frac{x}{6\text{ €}} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Wir fügen nun noch die Einheit kg hinzu:

$$\frac{x}{6\text{ €}} = \frac{5\text{ kg}}{2\text{ kg}}$$

Schließlich möchten wir die Gleichung so schreiben, dass die Verbindung zur Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} 2\text{ kg} &\rightarrow 6\text{ €} \\ 5\text{ kg} &\rightarrow x \end{aligned}$$

deutlich hervortritt. Dazu vertauschen wir die Seiten der Gleichung und bilden auf beiden Seiten den Kehrbruch:

$$\begin{aligned} \frac{x}{6\text{ €}} &= \frac{5\text{ kg}}{2\text{ kg}} && |\text{Seiten vertauschen} \\ \frac{5\text{ kg}}{2\text{ kg}} &= \frac{x}{6\text{ €}} && |\text{Kehrbrüche bilden} \\ \frac{2\text{ kg}}{5\text{ kg}} &= \frac{6\text{ €}}{x} \end{aligned}$$

Nun stehen die Größen offensichtlich in derselben Anordnung wie in der Aufgabenstellung.

Praktisches Fazit
Aus der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} 2\text{ kg} &\rightarrow 6\text{ €} \\ 5\text{ kg} &\rightarrow x \end{aligned}$$

kann direkt die *Verhältnisgleichung* abgelesen werden:

$$\frac{2\text{ kg}}{5\text{ kg}} = \frac{6\text{ €}}{x}$$

Anmerkung 1
Einen Bruch oder Quotienten wie

$$\frac{2\text{ kg}}{5\text{ kg}} \text{ bzw. } 2\text{ kg} : 5\text{ kg}$$

bezeichnet man traditionell auch als *Verhältnis* oder *Proportion*.In diesem Sinne sagt man zum Beispiel, dass die Apfelmengen und die Kosten im selben Verhältnis stehen, oder dass die Apfelmenge sich verhält wie die Kosten.

Anmerkung 2
Der *Kehrwert* einer Größe c ist schlicht und einfach der Bruch $\frac{1}{c}$ (den man auch als Quotienten $1:c$ schreiben kann).

Der Kehrwert eines Bruches $\frac{a}{b}$ ist

$$1:\frac{a}{b} = 1\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{a},$$

also der *Kehrbruch*.
Dies rechtfertigt das Bilden des Kehrbruches bei Verhältnisgleichungen.

Anmerkung 3
Bei einem *umgekehrt proportionalen* Dreisatz (auch *ungerader* oder, in neudeutscher Schulsprache, *antiproportionaler* Dreisatz genannt) sind die Verhältnisse der Größen nicht gleich, sondern umgekehrt. Wenn beispielsweise 2 Arbeiter einen Auftrag in 9 Tagen erledigen, und wir berechnen möchten, wie lange 3 Arbeiter dafür benötigen würden, gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{aligned} &2 \text{ Arbeiter} \;\rightarrow\; 9 \text{ Tage} \\ &3 \text{ Arbeiter} \;\rightarrow\; x \end{aligned}$$

Wir kehren in der *Verhältnisgleichung* einen Bruch um, vorzugsweise den rechten, damit x bereits im Zähler steht:

$$\frac{2 \text{ Arbeiter}}{3 \text{ Arbeiter}} = \frac{x}{9 \text{ Tage}}$$

Nun kürzen wir und lösen die Gleichung nach *x* auf:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{x}{9 \text{ Tage}} && \mid \cdot (9 \text{ Tage}) \\ \frac{2}{3} \cdot (9 \text{ Tage}) &= x && \mid \text{multiplizieren} \\ 6 \text{ Tage} &= x \end{aligned}$$

Also benötigen 3 Arbeiter für den Auftrag 6 Tage.

Wir schließen mit einem normalen proportionalen Dreisatz, den wir mithilfe einer Verhältnisgleichung lösen:

Beispiel
4 Artikel kosten 28 €. Wie viel kosten 3 Artikel?

Lösung
Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} 4 \text{ Artikel} &\rightarrow 28\ € \\ 3 \text{ Artikel} &\rightarrow x \end{aligned}$$

Verhältnisgleichung aufstellen und lösen:

$$\begin{aligned} \frac{4 \text{ Artikel}}{3 \text{ Artikel}} &= \frac{28\ €}{x} && \mid \text{Kehrwert bilden} \\ \frac{3 \text{ Artikel}}{4 \text{ Artikel}} &= \frac{x}{28\ €} && \mid \cdot 28\ € \\ \frac{3 \text{ Artikel} \cdot 28\ €}{4 \text{ Artikel}} &= x \\ 21\ € &= x \end{aligned}$$

Antwort: 3 Artikel kosten 21 €.

Anmerkung: Die Gleichung und ihre Lösung werden übersichtlicher, wenn man die Einheiten weglässt:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3} &= \frac{28}{x} && |\text{ Kehrwert bilden} \\
\frac{3}{4} &= \frac{x}{28} && |\cdot 28 \\
\frac{3\cdot 28}{4} &= x \\
21 &= x
\end{aligned}$$

Rechnerische Beziehung zwischen proportionalen Größen

Die Anzahl der erworbenen Artikel und die Kosten dafür sind proportionale Größen. Wir betrachten die Situation des letzten Beispiels: 4 Artikel kosten 28 €. Ein Artikel kostet dann 28 € : 4, also 7 €:

$$\begin{aligned}
4 \text{ Artikel} &\rightarrow 28\,€ \\
1 \text{ Artikel} &\rightarrow 7\,€
\end{aligned}$$

Die Kosten *K* für 2, 3, 4, allgemein n Artikel betragen also:

$$\begin{aligned}
1 \text{ Artikel} &\rightarrow 7\,€ \\
2 \text{ Artikel} &\rightarrow 7\,€\cdot 2 \\
3 \text{ Artikel} &\rightarrow 7\,€\cdot 3 \\
4 \text{ Artikel} &\rightarrow 7\,€\cdot 4 \\
n \text{ Artikel} &\rightarrow 7\,€\cdot n
\end{aligned}$$

Die proportionalen Größen stehen offenbar in der folgenden rechnerischen Beziehung:

$$\begin{aligned}
\text{Kosten} &= 7\,€\cdot \text{Anzahl der Artikel} \\
K &= 7\,€\cdot n \\
K &= c\cdot n
\end{aligned}$$

Die Zahl c (hier im Beispiel ist $c = 7€$) wird als *Proportionalitätsfaktor* bezeichnet.
Die Tatsache, dass die Größen K und n proportional sind, wir als

$$K \sim n$$

geschrieben.

Beziehung zwischen umgekehrt proportionalen Größen

Wenn 2 Arbeiter 9 Tage für einen Auftrag benötigen, so benötigt 1 Arbeiter doppelt so lang, nämlich 18 Tage:

$$\begin{aligned} &2 \text{ Arbeiter} \;\rightarrow\; 9 \text{ Tage} \\ &1 \text{ Arbeiter} \;\rightarrow\; 18 \text{ Tage} \end{aligned}$$

Die Zeit *t*, die 2, 3, 4, allgemein n Arbeiter benötigen, beträgt also:

$$\begin{aligned} &1 \text{ Arbeiter} &&\rightarrow\; 18 \text{ Tage} \\ &2 \text{ Arbeiter} &&\rightarrow\; \frac{18 \text{ Tage}}{2} = 18 \text{ Tage} \cdot \frac{1}{2} \\ &3 \text{ Arbeiter} &&\rightarrow\; \frac{18 \text{ Tage}}{3} = 18 \text{ Tage} \cdot \frac{1}{3} \\ &4 \text{ Arbeiter} &&\rightarrow\; \frac{18 \text{ Tage}}{4} = 18 \text{ Tage} \cdot \frac{1}{4} \\ &n \text{ Arbeiter} &&\rightarrow\; \frac{18 \text{ Tage}}{n} = 18 \text{ Tage} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Die umgekehrt proportionalen Größen n und t stehen offenbar in der folgenden rechnerischen Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{Zeit} &= 18 \text{ Tage} \cdot \frac{1}{\text{Anzahl der Arbeiter}} \\ t &= 18 \text{ Tage} \cdot \frac{1}{n} \\ t &= c \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass t nicht proportional zu n ist, aber sehr wohl *proportional* zum *Kehrwert* von n:

$$t \sim \frac{1}{n}$$

Dies zeigt auch, wie sinnvoll es ist, hier von *umgekehrt* proportionalen Größen zu sprechen.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 5.1

1. Eine dreiköpfige Familie mit einem minderjährigen Kind geht in ein Kino. Ein Erwachsenenticket kostet doppelt so viel wie ein Kinderticket. Die Familie zahlt insgesamt 32,50 €. Wie viel kostet ein Kinderticket?

2. Eine vierköpfige Familie mit zwei minderjährigen Kindern besucht einen Zoo. Ein Kinderticket kostet 4,00 € weniger als ein Erwachsenenticket. Die Familie zahlt insgesamt 43,60 €. Was kostet ein Erwachsenenticket?

3. Frau Müller kauft 3,2 kg Bananen und Herr Schmidt 1,7 kg. Frau Müller zahlt 2,40 € mehr als Herr Schmidt. Wie viel kostet ein Kilogramm Bananen?

4. Drei Artikel A, B und C kosten zusammen 23,80 €. Der Artikel B ist dreimal so teuer wie Artikel A. Der Artikel C kostet 4,00 € mehr als Artikel A. Was kosten die drei Artikel? (Tipp: Berechne zuerst den Preis von A.)

5. Die Geschwister Lisa und Thomas sind zusammen 31 Jahre alt. Lisa ist fünf Jahre älter als Thomas. Wie alt ist Thomas? Wie alt ist Lisa?

6. In 30 Jahren wird eine gewisse Person 11 Jahre älter als doppelt so alt wie jetzt sein. Wie alt ist die Person jetzt?

7. Markus ist dreimal so alt wie Benjamin. In vier Jahren wird Markus nur noch doppelt so alt wie Benjamin sein. Wie alt ist Benjamin? Wie alt ist Markus?

8. Bei einem rechteckigen Grundstück unterscheiden sich Länge und Breite um 9 m. Der Zaun um das Grundstück misst 102 m. Wie breit ist das Grundstück?

9. Bei einem Dreieck ist eine Seite 4 cm länger als die kürzeste Seite. Die andere Seite ist dreimal so lang wie die kürzeste. Der Umfang beträgt 19 cm. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

10. Der Flächeninhalt eines Quadrates nimmt um $57\,cm^2$ zu, wenn die Seiten um 3 cm verlängert werden. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

11. Herr Jansen tankt 32 l Benzin und zahlt dafür 10,35 € weniger als Herr Bleifuß, der an derselben Tankstelle 41 l des gleichen Benzins tankt. Wie viel kostet ein Liter Benzin?

12. Wenn man die Seiten eines Quadrates um 2,5 cm verlängert, so wird der Umfang 1,5-mal so lang. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

13. Wenn man die Seiten eines Quadrates um 3 cm verlängert, so erhöht sich der Flächeninhalt um $39\,cm^2$. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

14. Wenn man die Seiten eines Quadrates um 1,8 m verringert, so beträgt der Umfang nur noch zwei Drittel des ursprünglichen. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

15. Wenn man zwei gegenüber liegende Seiten eines Quadrates um 3 cm verlängert, so hat das entstehende Rechteck einen um $4{,}5\,cm^2$ größeren Flächeninhalt als das Quadrat. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

16. Wenn man zwei gegenüber liegende Seiten eines Quadrates um 2 cm verringert, so hat das entstehende Rechteck $10\,cm^2$ weniger Flächeninhalt als das Quadrat. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

17. Tobias ist 28 Jahre alt. Er ist doppelt so alt wie Marc war als Tobias so alt war wie Marc jetzt. Wie alt ist Marc?
[Tipp für diese schwierigere Aufgabe: Daten in eine Tabelle

eintragen; die Gleichung ist: verstrichene Zeit aus Sicht von Marc = verstrichene Zeit aus Sicht von Tobias.]

Die nächsten Aufgaben sind der berühmten *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von Leonhard Euler (1707 – 1783) entnommen. Nur die Rechtschreibung ist an die aktuellen Regeln angepasst worden.

18. Zerteile 7 in zwei Teile, so dass der größere um 3 größer sei als der kleinere.

19. Ein Vater hinterlässt drei Söhne und 1600 Rthl. (Reichsthaler). Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rthl. mehr haben als der zweite, der zweite aber 100 Rthl. mehr als der dritte; wie viel bekommt ein jeder?

Aufgaben zu Kapitel 5.2

1. Für die 5.500 km große Entfernung zwischen Frankfurt und New York benötigt ein Jet 6 Sunden. Wie weit ist ein Flugziel entfernt, wenn die Flugdauer 9,5 Stunden beträgt?

2. Die Reiseflughöhe eines Jets beträgt 30.000 Fuß oder 9.144 m. Eine Turboprop-Maschine fliegt in 20.000 Fuß Höhe. Wie lautet die Höhe in Metern?

3. Eine Arbeitnehmerin braucht 15 Minuten, um zur Arbeitsstelle zu gehen. Auf dem Stadtplan ist die Arbeitsstelle 6,5 cm von der Wohnung entfernt. Wie lange braucht sie, um zum Rathaus zu gelangen, das auf dem Stadtplan 11 cm entfernt ist.

4. Ein Pkw mit einem Tank von 30 l Fassungsvermögen wird in den USA mit 7,92 Gallonen vollgetankt. Wie viele Gallonen werden benötigt, um ein Pkw mit einem 50-l-Tank vollzutanken?

5. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa 300 000 km/sek. Das Sonnenlicht benötigt etwa 8 Minuten, um zur Erde zu gelangen.

Wie weit ist die Sonne von der Erde entfernt?

6. Betrachte das Beispiel eines umgekehrt proportionalen Dreisatzes aus Anmerkung 3. Leite die Verhältnisgleichung aus dem elementaren Lösungsweg her.

7. Ein Projekt wird von 21 Angestellten in 8 Tagen erledigt. Wie viele Tage würden 24 Angestellte dafür benötigen?

8. Ein Buch mit 420 Seiten enthält 48 Zeilen auf jeder Seite. Auf wie viele Seiten könnte der Umfang verringert werden, wenn man 56 Zeilen auf jeder Seite unterbringen könnte?

9. Ein Arbeitnehmer benötigt 20 Minuten zu seiner Arbeitsstelle, bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 km/h. Durch Baustellen behindert, braucht er neuerdings 25 Minuten. Wie groß ist nun seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

10. Ein Kind und seine Mutter sitzen auf einer Wippe. Das Kind wiegt 21 kg und sitzt 2,30 m vom Drehpunkt entfernt. In welcher Entfernung vom Drehpunkt muss die Mutter sitzen, wenn sie 59 kg wiegt?

Lösungen

Lösungen zu Kapitel 1

1. $x = 7$
2. $x = 5$
3. $x = 1$
4. $x = 3$
5. $x = 6$
6. $x = 5$
7. $x = 3$
8. $x = 2$
9. $x = 7$
10. $x = 7$

Lösungen zu Kapitel 2.1 bis 2.3

I.

1. 1	2. 3	3. –2
4. 2	5. 5	6. –13
7. 9	8. –7	9. –3
10. –13	11. 11	12. 12
13. 8	14. –5	15. –4
16. 9	17. –7	18. –8
19. 21	20. –30	21. 3
22. 1	23. –6	24. –2
25. –1	26. –8	27. –1
28. –7	29. –9	30. –6
31. –2	32. –3	33. –5
34. 2	35. –7	36. –8
37. 1	38. –4	39. –1

40. −10	41. 0	42. 0
43. 0	44. 0	45. 0
46. 0	47. 0	48. 0

II.

a)

				−6				
			−4		−2			
		−1		−3		1		
	1		−2		−1		2	
−2		3		−5		4		−2

b)

				−8				
			−1		−7			
		1		−2		−5		
	1,5		−0,5		−1,5		−3,5	
3,5		−2		1,5		−3		−0,5

Lösungen zu Kapitel 2.4

I.

1. 1	2. 3	3. −2
4. 3	5. −13	6. 8

7. –7
8. –3
9. –24
10. 11
11. 8
12. –5
13. –4
14. –5
15. –8
16. 21
17. –30
18. –7
19. 5
20. –3
21. –5
22. –6
23. 8
24. –3
25. –8
26. 1
27. 2
28. 0
29. 11
30. 1
31. –8
32. 1
33. –8
34. –7
35. 8
36. –5
37. 6
38. –4
39. –2
40. 8
41. 14
42. 70
43. –2
44. –10
45. –3
46. 4
47. 9
48. –3

II.

a)

–62

–30 | 32

–13 | 17 | –15

–5 | 8 | –9 | 6

–2 | 3 | –5 | 4 | –2

b)

				32				
			17		–15			
		9		–8		7		
	5,5		–3,5		4,5		–2,5	
3,5		–2		1,5		–3		–0,5

Lösungen zu Kapitel 2.5

1. –19
2. –31
3. –29
4. –7
5. –19
6. 6
7. –6
8. 2
9. –33
10. –22
11. –34
12. –24
13. –3
14. –9
15. –15
16. –32
17. –17
18. –1
19. –41
20. 7
21. –11
22. –35
23. –12
24. –39
25. –13
26. –8
27. –13
28. –4
29. –7
30. 4

Lösungen zu Kapitel 2.6 bis 2.8

I.

1. 1
2. –7
3. 3
4. –9
5. 7
6. –1

7. 9
8. –3
9. 9
10. –9
11. –5
12. –13
13. –7
14. –1
15. 8
16. 6
17. 2
18. –14
19. –13
20. –12
21. –10
22. –19

II.

1. –3
2. 8
3. –37
4. –25
5. –27
6. –18
7. –12
8. –25
9. –12
10. –40
11. –52
12. –12
13. –16
14. –12
15. 36
16. 18
17. 3
18. –4
19. 18
20. 13
21. 0
22. 1
23. 22
24. –64
25. –29
26. 37
27. –16
28. 24
29. –65
30. –28

III.

1. 3
2. 17
3. 20
4. 5
5. –3
6. –6
7. –5
8. 13
9. –4
10. –10
11. 7
12. 7
13. 0
14. 8
15. 2
16. –7
17. –5
18. 2
19. –19
20. 1
21. –3
22. –4

IV.

1. 2
2. 14
3. 8
4. –3
5. 13
6. 2
7. –18
8. –9
9. 13
10. 3
11. –10
12. 18
13. 6
14. 10
15. 0
16. 5
17. 1
18. 29
19. 4
20. –4

Lösungen zu Kapitel 2.9 bis 2.10

I.

a) –15

b) –32

c) 16

d) –6

e) 30

f) –26

g) 13

h) 9

i) 2

j) –59

k) 1

l) –1

m) –1

n) –13

o) –9

II.

1. –18
2. –6
3. 8
4. –24
5. 9
6. $-\frac{3}{4}$
7. $-\frac{5}{8}$
8. $\frac{5}{6}$
9. $\frac{1}{3}$
10. $-\frac{5}{3}$
11. $\frac{9}{19}$
12. $\frac{4}{7}$

13. $\frac{21}{4}$

14. $-\frac{5}{2}$

15. 25

16. $-\frac{23}{20}$

17. $\frac{11}{20}$

18. $\frac{1}{35}$

19. $-\frac{2}{99}$

20. $-\frac{77}{65}$

Lösungen zu Kapitel 2.11

1.

a) $\frac{1}{32}$

b) $\frac{1}{81}$

c) $-\frac{1}{27}$

d) $\frac{1}{625}$

e) $\frac{1}{1024}$

f) $0,001$

g) 8

h) 36

i) 512

j) 144

k) 64

l) $\frac{9}{8}$

2.

a) 2.187

b) 64

c) 108

d) 2

e) 36

f) $\frac{512}{27}$

Lösungen zu Kapitel 2.12

1.

a) 3.517

b) 0,001.414.213.5

c) 0,173.205

d) 3.141.590.000.000

e) 0,000.000.271.828.18

f) 0,31622776

g) 0,866.025.4

h) 0,070.710.678

i) 0,000.000.301.029.99

j) 6.931.471.800

2.

a) $7{,}325 \cdot 10^{3}$ b) $1{,}358.732 \cdot 10^{6}$ c) $9{,}721.44 \cdot 10^{5}$
d) $1{,}415.37 \cdot 10^{-1}$ e) $5{,}342.89 \cdot 10^{-2}$ f) $2{,}469.8 \cdot 10^{-5}$
g) $1{,}403.187.9 \cdot 10^{7}$ h) $1{,}710.927 \cdot 10^{-3}$ i) $8 \cdot 10^{-11}$
j) $4{,}321.776.05 \cdot 10^{8}$

Lösungen zu Kapitel 3.1

1.

a) $3a$
b) $3a$
c) $-4a$
d) $-6a$
e) $-13a$
f) $-13b$
g) $-10b$
h) $-19c$
i) $-19a$
j) a
k) $-5x$
l) $13x$
m) $5x$
n) $5x-3y$
o) $-2x-2y$
p) $5a+2b-2c$

2.

a) $6a+8b$
b) $6a+2b$
c) $2a+8b$
d) $6a+2b$
e) $6a+8b$
f) $2a-13b$
g) $a-4b$
h) $4a-8b$
i) $10a-6b$
j) $x-5y$

3.

a) $3c$
b) $-4d$
c) $3x$

d) $-11y$
e) $6a-5b-2c-2$
f) $4x-6y-2z$
g) $-3u-2v-w$
h) $-2m-8n$

4.

a) $-6a+6b$
b) $9a-b+5c$
c) $-2x+4y$
d) $-3x-8y$
e) $9a-8b+6$
f) $-3x-1$
g) $-4v+12w-1$
h) $7u-2v+1$

Lösungen zu Kapitel 3.2 bis 3.4

1.

a) x^2+5x
b) x^2+3x
c) x^2-7x
d) $-a^2+8a$
e) $-3x+36$
f) $-ax-5a$
g) $ax-5a$
h) $8x^2+2xy-5xz-3x$
i) $a^2-2ab+3ac$
j) $-a^2+ab-ac$
k) $ab+4a+3b+12$
l) $-ab+5a-2b+10$
m) $x^2+9x+18$
n) $ab+2a+b+2$
o) $10x^2+x-21$
p) $6x^2-x-15$

2.

a) x^2+3x+2
b) $x^2+9x+20$
c) x^2-x-6
d) x^2+x-12
e) x^2-6x+5
i) $ab+5a-2b-10$
j) $-uv+6u-v+6$
k) $bx-4b-3x+12$
l) $wz+2w-z-2$
m) $xy+6x-7y-42$

f) $-x^2+7x-12$

g) x^2-x-2

h) $x^2+10x+21$

n) k^2-5k+6

o) $mn-4m+4n-16$

p) a^2+6a+9

3.

a) $12x^2+23x+10$

b) $8x^2+10x+3$

c) $15x^2-14x-8$

d) $2xy+8x-3y-12$

e) $6xy-10x-18y+30$

f) $-10x^2+23xy-12y^2$

g) $2x^2+xy-y^2$

h) $a^2+8ab+12b^2$

i) $15a^2-7ab-2b^2$

j) $-u^2+3uv+4v^2$

k) $6uv-10uw-12vw+20w^2$

l) $wz-w+2z-2$

m) $10x^2+3xy-18y^2$

n) $2a^2-5ab+6ac+2b^2$
$-3bc+5a-10b+15c$

o) $6m^2+5mn-6n^2$

p) $4a^2-9$

4.

a) $3,75x^2+0,5xy-0,25y^2$

b) $-\frac{3}{10}x^2+\frac{7}{12}xy-\frac{5}{18}y^2$

c) $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$

d) $0,1x^2+0,15xy-5,2y^2$

e) x^4-1

f) $-x^4+1$

g) $16x^4-81y^4$

h) $-5u^2v^2-2u^3+15v^3+6uv$

i) $8ab+4ac-12bc-6c^2$

j) $-5u^2+13uv+13uw-6v^2-5vw+6w^2$

k) $20x^2-22xy+6y^2+23x-13y+6$

l) $3x^2y-4x^2-9xy+12x+6y-8$

m) $15x^2-21xy+10xz-18y^2+6yz$

n) $a^2-4ab+6ac+4b^2-12bc+9c^2$

o) $9u^2+12uv+4v^2-1$

p) $16a^2-24a+9$

5.

a) $6x^3+15x^2$

b) $6x^3+19x^2+15x$

c) $x^3+x^2-41x-105$

d) $x^2+3xy+2y^2+8x+13y+15$

e) $10x^2-13xy-3y^2+23x+8y-5$

f) x^3-1

g) x^3-2x^2-5x+6

h) $30x^3-47x^2-x+6$

i) x^4-x

j) x^5+x^4-x-1

k) $abc+5ab+4ac+3bc+20a+15b+12c+60$

l) $-ab+ac-b^2+bc+3a+b+2c+6$

m) $2a^2-ab+7ac-3b^2+2bc+5c^2-6a+9b-15c$

n) $abc-3ab+2ac+bc-6a-3b+2c-6$

o) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

6.

a) x^2+6x+9

b) $2x^2+5x+1$

c) $x^2+16x+34$

d) $29x+37$

e) $3x^2+10xy-8y^2$

f) $-3ab-b^2$

Lösungen zu Kapitel 3.5 und 3.6

1.

a) $x^2+10x+25$

b) x^2+4x+4

c) x^2+6x+9

d) $x^2+2xy+y^2$

e) $x^2 + 6xy + 9y^2$

f) $25x^2 + 70xy + 49y^2$

g) $9u^2 + 12uv + 4v^2$

h) $a^2 + 10ab + 25b^2$

i) $x^2 + 10xy + 25y^2$

j) $x^2 - 10xy + 25y^2$

k) $4x^2 - 4xy + y^2$

l) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

m) $x^2 + 14x + 49$

n) $4a^2 - 12ab + 9b^2$

o) $49x^2 - 42x + 9$

2.

a) $25x^2 + 50x + 25$
b) $16x^2 - 96x + 144$
c) $225x^2 + 180x + 36$
d) $36x^2y^2 + 24xy^2 + 4y^2$

3.

a) $2x^2 + 18$
b) $2x^2 + 50$
c) $-2x^2 + 46x + 72$
d) $4x^2$
e) $14x^2 + 24x + 41$

4.

a) 10.201
b) 10.609
c) 1.016.064
d) 42.025
e) 9.801
f) 8.836
g) 986.049
h) 38.025

Lösungen zu Kapitel 3.7

1.

a) $x^2 - 25$

b) $x^2 - 4$

c) $x^2 - 9$

d) $x^2 - y^2$

e) $x^2 - 9y^2$

f) $25x^2 - 49y^2$

g) $9u^2 - 4v^2$

h) $a^2 - 25b^2$

i) $x^2 - 25y^2$

j) $4x^2 - 9y^2$

k) $x^2 - 4y^2$

l) $4x^2 - 9y^2$

m) $49 - x^2$

n) $9b^2 - 4a^2$

o) $49x^2 - 9$

2.

a) $5x^2 - 5$

b) $4x^2 - 36$

c) $12 - 75x^2$

d) $18x^2y - 2y$

3.

a) $x^2 - 12$

b) $x^2 + 17$

c) $3x^2 + 9$

d) $a - b$

e) $a + b$

f) $\dfrac{x-y}{x+y}$

4.

a) 9.951
b) 999.964
c) 9.999
d) 896

Aufgaben zu Kapitel 4.1 bis 4.2

1. Siehe Lösungen zu Kapitel 1.

2.

a) $x = 2$
b) $x = 7$
c) $x = 3$
d) $x = 9$
e) $x = 16$
f) $x = 5$
g) $x = 6$
h) $x = 8$
i) $x = 8$
j) $x = 12$
k) $x = 2,5$
l) $x = 3,5$
m) $x = 5$
n) $x = 4$
o) $x = 11,75$
p) $x = 11$

3.

a) $x = 2$
b) $x = 3$
c) $x = 16$
d) $x = 5$
e) $x = 12$
f) $x = 8$
g) $x = 5,333\ldots$
h) $x = 11,75$
i) $x = 0,5$
j) $x = 0,4$

4. 12

5. 19

6.

a) $x = -5$
i) $x = -7$

b) $x = 6$
c) $x = -3$
d) $x = -9$
e) $x = 12$
f) $x = -6$
g) $x = -5$
h) $x = 8$
j) $x = 10$
k) $x = -1,5$
l) $x = -3$
m) $x = 1,333\ldots$
n) $x = -4$
o) $x = -2$
p) $x = -3$

7.

a) $x = -2$
b) $x = -3$
c) $x = 16$
d) $x = -5$
e) $x = 12$
f) $x = -8$
g) $x = -2,333\ldots$
h) $x = 3$
i) $x = -0,75$
j) $x = -0,4$

8.

a) $x = 1$
b) $x = 2$
c) $x = 11$
d) $x = 4$
e) $x = -1$

9. 17

10. 4

11. 12

12. -18

13. 21

14. 9

15.

a) $x=-7,25$ b) $x=4$ c) $x=2$

d) $x=8$ e) $x=1$ f) $x=2$

Aufgaben zu Kapitel 4.3

1.

a) $\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$ b) $\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{20}$

d) $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$ e) $\frac{59}{21}=2\frac{17}{21}$ f) $\frac{7}{12}$

Aufgaben zu Kapitel 4.4

1.

a) $x=4$ b) $x=2$ c) $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

d) $x=\frac{3}{4}$ e) $x=8$ f) $x=4$

2.

a) $x=2$ b) $x=3$ c) $x=2$ d) $x=3$

3.

a) $x=4$ b) $x=-5$ c) $x=3$ d) $x=1$

4.

a) $x=2$ b) $x=3$ c) $x=1$ d) $x=4$

5.

a) $x=\frac{c-b}{a}$

b) $x=\frac{a-bc}{c}$ oder $x=\frac{a}{c}-b$

c) $x = \dfrac{c - bd}{ad}$

d) $x = \dfrac{de - b}{a - ce}$

e) $x = \dfrac{bf - ce}{cd - af}$

Aufgaben zu Kapitel 5.1

1. 6,50 €
2. 12,90 €
3. 1,60 €
4. A: 3,96 €, B: 11,88 €, C: 7,96 €
5. Thomas: 13 Jahre, Lisa: 18 Jahre
6. 19 Jahre
7. Benjamin: 4 Jahre, Markus: 12 Jahre
8. 21 m
9. 3 cm, 7 cm, 9 cm
10. 8 cm
11. 1,15 €
12. 5 cm
13. 5 cm
14. 5,40 m

15. 1,5 cm

16. 5 cm

17. 21 Jahre

18. $7 = 2 + 5$

19. Erster: 700 Rthl., Zweiter 500 Rthl., Dritter: 400 Rthl.

Aufgaben zu Kapitel 5.2

1. ca. 8708 km

2. 6.096 m

3. ca. 25 Minuten

4. 13,2 Gallonen

5. ca. 144.000.000 km (144 Mio. km)

6. -

7. 7 Tage

8. 360 Seiten

9. 36 km/h

10. ca. 0,82 m

Anhang: Zusammenfassungen

Zusammenfassung 1: Negative Zahlen

Zusammenfassung 2: Buchstabenrechnen

Zusammenfassung 3: Gleichungen

Zusammenfassung 4: Bruchrechnen

Zusammenfassung 1: Negative Zahlen

Rechenausdrücke

Allgemeine Vereinbarungen (Konventionen)

1. Punktrechnung geht vor Strichrechnung:

$$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4$$

2. Potenzrechnung geht vor Punkt-und Strichrechnung:

$$5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$5 + 2^3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Negative Zahlen

Vorstellung zum Rechnen

1. Klassisch (Brahmagupta)

-3 = 3 Euro **Schulden**

2. Modern

-3 = 3 **Antimaterie**-Äpfel

Addition negativer Zahlen

Schulden hinzufügen = Guthaben abziehen

$$\square + (-3) = \square - 3$$

Zum Beispiel

$$5 + (-3) = 5 - 3$$

Alle Fälle (von Vorzeichen)

$5 + 3 = 8$	Guthaben + Guthaben
$5 + (-3) = 2$	mehr Guthaben als Schulden
$-5 + 3 = -2$	mehr Schulden als Guthaben
$-5 + (-3) = -8$	Schulden + Schulden

Guthaben + Schulden = Guthaben

Guthaben + Schulden = Schulden

Subtraktion negativer Zahlen

Schulden abziehen = Guthaben hinzufügen

$$\square - (-3) \quad = \quad \square + 3$$

Zum Beispiel

$$(-5) - (-3) = -5 + 3$$

Alle Fälle (von Vorzeichen)

$5 - 3 = 5 + (-3) = 2$		mehr Guthaben als Schulden
$5 - (-3) = 5 + 3 = 8$		Guthaben + Guthaben
$-5 - 3 = -5 + (-3) = -8$		Schulden + Schulden
$-5 - (-3) = -5 + 3 = -2$		mehr Schulden als Guthaben

Addition/Subtraktion verschmolzen

Subtraktion als Addition aufgefasst:

$$5-3 = 5+(-3)$$

Alle Fälle (von Vorzeichen)

$$5 + 3 = 8$$

$$5 - 3 = 2$$
$$1 - 3 = -2$$

$$-5 + 3 = -2$$
$$-1 + 3 = 2$$

$$-5 - 3 = -8$$

Addition/Subtraktion mehrerer Zahlen

Subtraktion als Addition aufgefasst:

$$5-3+6-9 = 5+(-3)+6+(-9)$$

Zwei Rechenwege:

1. Von links nach rechts

$$\begin{aligned} 5-3+6-9 &= 2+6-9 \\ &= 8-9 \\ &= -1 \end{aligned}$$

2. Getrennt nach positiven/negativen Zahlen

$$\begin{aligned} 5-3+6-9 &= 5+6-3-9 \\ &= 11-12 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Addition/Subtraktion von Klammern

Beim Subtrahieren einer Klammer werden die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer umgekehrt:

$$\begin{aligned} 8-(5-3+4) &= 8-(+5-3+4) \\ &= 8 \quad -5+3-4 \end{aligned}$$

Beim Addieren einer Klammer bleiben die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer erhalten:

$$\begin{aligned} 8+(5-3+4) &= 8+(+5-3+4) \\ &= 8 \quad +5-3+4 \end{aligned}$$

Multiplikation/Division negativer Zahlen

Das Produkt zweier Zahlen mit **gleichem** Vorzeichen ist **positiv**:

$$\begin{aligned} 2\cdot 3 &= 6 \\ (-2)\cdot(-3) &= 6 \end{aligned}$$

Das Produkt zweier Zahlen mit **ungleichem** Vorzeichen ist **negativ**:

$$\begin{aligned} 2\cdot(-3) &= -6 \\ (-2)\cdot 3 &= -6 \end{aligned}$$

Der Quotient zweier Zahlen mit **gleichem** Vorzeichen ist **positiv**:

$$\begin{aligned} \frac{6}{3} &= 2 \\ \frac{-6}{-3} &= 2 \end{aligned}$$

Multiplikation/Division negativer Zahlen (Forts.)

Der Quotient zweier Zahlen mit **ungleichem** Vorzeichen ist **negativ**:

$$\frac{-6}{3} = -2$$

$$\frac{6}{-3} = -2$$

Potenzen

Ursprünglich sind Potenzen nur Abkürzungen:

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

usw.

Allgemeine Regeln:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left(ab\right)^n = a^n b^n \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Nach dem ***Permanenzprinzip*** von Hankel sind diese Regeln auch auf ***exotische Exponenten*** anwendbar und liefern die folgenden Ergebnisse:

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1$$

Potenzen (Forts.)

<table>
<tr><td>

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

</td></tr>
<tr><td>

Begründungen:

1. $a^1 = a^{3-2} = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a$

2. $a^0 = a^{2-2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

3. $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

4. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, denn: $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$

</td></tr>
<tr><td>

Beispiele:

1. $3^1 = 3, \quad 2^0 = 1$

2. $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

3. $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

</td></tr>
</table>

Wissenschaftliche Zahlennotation

<table>
<tr><td>

Eine Ziffer ungleich 0 vor dem Komma, die tatsächliche Kommaposition wird durch die Zehnerpotenz angegeben:

$$1{,}41421356 \cdot 10^3$$

</td></tr>
<tr><td>

Beispiele: $3157 = 3{,}157 \cdot 10^3, \quad 0{,}00814 = 8{,}14 \cdot 10^{-3}$

</td></tr>
</table>

Zusammenfassung 2: Buchstabenrechnen

Buchstaben

Buchstaben stehen für eine beliebige Zahl.

Vorstellung: undurchsichtige Box, die Äpfel enthält.

Addition/Subtraktion

Gleichartige Größen können zusammengefasst werden:

$$a + a = 2a$$

$$2a + 3a = 5a$$

$$\begin{aligned} 5a + 4b - 3a + 2b &= 5a - 3a + 4b + 2b \\ &= 2a + 6b \end{aligned}$$

Beim Subtrahieren einer Klammer werden die Vorzeichen der Summanden in der Klammer umgekehrt:

$$\begin{aligned} 8a - (5a - 3b + 4c) &= 8a - (+5a - 3b + 4c) \\ &= 8a \quad - 5a + 3b - 4c \end{aligned}$$

Beim Addieren einer Klammer bleiben die Vorzeichen der Summanden in der Klammer erhalten:

$$\begin{aligned} 8a + (5a - 3b + 4c) &= 8a + (+5a - 3b + 4c) \\ &= 8a \quad + 5a - 3b + 4c \end{aligned}$$

Multiplikation

Reine Multiplikation:

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$a^2 \cdot a^3 = a^5$$

$$\begin{aligned} a \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \\ &= a^4 \cdot b^2 \end{aligned}$$

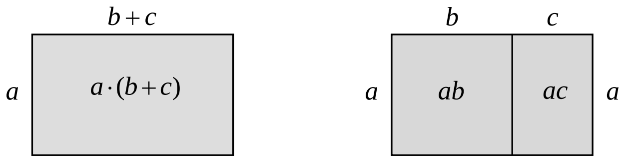
$$\begin{aligned} 2a \cdot 3b &= 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ &= 6ab \end{aligned}$$

Multiplikation von Summen (ausmultiplizieren):

Eine Summe wird mit einer Zahl/Größe multipliziert, indem man jeden Summanden multipliziert:

$$2 \cdot (a+b) = 2a+2b$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c = ab+ac$$



Beispiel:

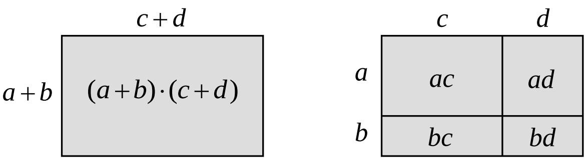
$$\begin{aligned} 2x \cdot (3x-4y) &= 2x \cdot 3x - 2x \cdot 4y \\ &= 6x^2 - 8xy \end{aligned}$$

Multiplikation (Forts.)

Multiplikation von zwei Summen (ausmultiplizieren):

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors multipliziert:

$$(a+b)\cdot(c+d) \quad = \quad ac+ad \quad + \quad bc+bd$$



Beispiel:

$$\begin{aligned}(2x-3y)\cdot(4x-5y) &= 2x\cdot 4x \;-\; 2x\cdot 5y \;-\; 3y\cdot 4x \;+\; 3y\cdot 5y\\ &= 8x^2-10xy-12xy+15y^2\\ &= 8x^2-22xy+15y^2\end{aligned}$$

Multiplikation von mehr als zwei Summen:

Bei der Multiplikation von mehr als zwei Summen werden zwei Summen multipliziert und das Ergebnis mit der nächsten Summe multipliziert:

$$\begin{aligned}&(x+2)(x-1)(x+3) &&\\ =\ &\big(x^2-x+2x-2\big)(x+3) && |\ \text{zusammenfassen}\\ =\ &\big(x^2+x-2\big)(x+3) && |\ \text{ausmultiplizieren}\\ =\ &x^3+3x^2 \;+\; x^2+3x \;-\; 2x-6 && |\ \text{zusammenfassen}\\ =\ &x^3+4x^2+x-6 &&\end{aligned}$$

Die binomischen Formeln

Die drei binomischen Formeln zeigen das Ergebnis der Multiplikation von zwei der *Binome* $a+b$ und $a-b$.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

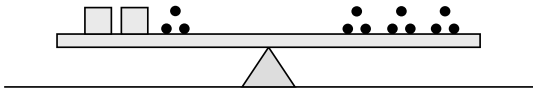
Zusammenfassung 3: Gleichungen

Die Methode

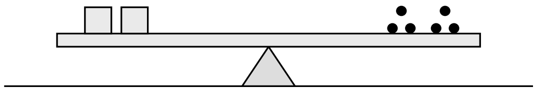
Auf **beiden Seiten** der Gleichung stets **dasselbe** tun, mit dem Ziel, dass die **Unbekannte allein** auf einer Seite übrig bleibt.

Beispiel: $2x+3=9$

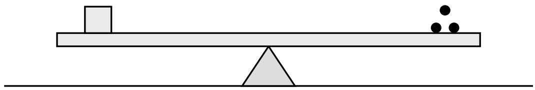
Anschauliche Lösung
(gesuchte Zahl x: undurchsichtige Box. Zahlen: Punkte.).
Die in der Gleichung ausgedrückte Gleichheit besagt nun, dass sich die folgende Waage im Gleichgewicht befindet:



Wir nehmen nun auf ***beiden*** Seiten 3 Äpfel weg. Das Gleichgewicht bleibt bestehen, links befinden sich lediglich Boxen:



Nun nehmen wir auf beiden Seiten die Hälfte. Das Gleichgewicht bleibt, links steht nur noch ***eine*** Box:



Offenbar enthält die Box also drei Äpfel. Das heißt in der Formelsprache: $x=3$.

Die Methode (Forts.)

Lösung in der Formelsprache

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 9 \quad && |-3 \text{ (d. h. auf **beiden** Seiten 3 abziehen)} \\ 2x &= 6 && |:2 \text{ (d. h. **beide** Seiten durch 2 teilen)} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Gleichung mit **negativer** Zahl:

$$\begin{aligned} 2x-3 &= 5 \quad && |+3 \text{ (d. h. auf beiden Seiten 3 **addieren**)} \\ 2x &= 8 && |:2 \text{ (d. h. beide Seiten durch 2 teilen)} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Bruchgleichungen

Bein einer Bruchgleichung kommt die Unbekannte im Nenner eines Bruches vor.

Einen Bruch kann man loswerden, indem man mit seinem Nenner multipliziert:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

Man löste eine Bruchgleichung, indem man nacheinander alle Brüche loswird (Multiplikation mit dem jeweiligen Nenner):

$$\begin{aligned} \frac{10}{2x-1} + 3 &= 5 \quad && |-3 \\ \frac{10}{2x-1} &= 2 && |\cdot(2x-1) \text{ (um den Bruch loszuwerden)} \\ 10 &= 2(2x-1) && |\text{ausmultiplizieren} \\ 10 &= 4x-2 && |+2 \\ 12 &= 4x && |:4 \\ 3 &= x && |\text{Seiten vertauschen} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Textaufgaben

Beispiel 1

Frau Schmitz kauft 7 Liter Milch. Herr Petersen kauft 4 Liter Milch. Frau Schmitz zahlt 2,40 Euro mehr als Herr Petersen. Was kostet ein Liter Milch?

Lösung

1. Unbekannte benennen

$$x = \text{Preis von 1 Liter Milch (in €)}$$

2. Gleichung aufstellen

Vorbemerkungen

1 Liter $\rightarrow x$, daher:

7 Liter $\rightarrow 7x$

4 Liter $\rightarrow 4x$

Also:

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Einkaufswert Schmitz} & = & \textit{Einkaufswert Petersen} & + & 2{,}40\ € \\ 7x & = & 4x & + & 2{,}4 \end{array}$$

3. Gleichung lösen

$$\begin{aligned} 7x &= 4x + 2{,}4 && \mid -4x \\ 3x &= 2{,}4 && \mid :3 \\ x &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Antwort

Ein Liter Milch kostet 0,80 €.

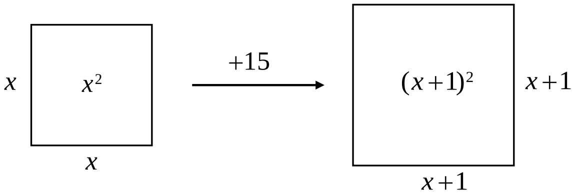
Textaufgaben (Forts. 1)

Beispiel 2

Verlängert man die Seiten eines Quadrates um 1 cm, so vergrößert sich sein Flächeninhalt um 15 cm². Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Quadrates?

Lösung

1. Situationsbeschreibung und Benennung der Unbekannten



x = Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates

2. Gleichung aufstellen

Wenn man die obige Zeichnung von links nach rechts betrachtet, erhält man die Gleichung:

$$\begin{array}{ccc} \textit{kleine Fläche} + 15 & = & \textit{große Fläche} \\ x^2 \quad + 15 & = & (x+1)^2 \end{array}$$

3. Gleichung lösen

$$\begin{aligned} x^2+15 &= (x+1)^2 && |\text{1. binomische Formel} \\ x^2+15 &= x^2+2x+1 && |-x^2 \\ 15 &= 2x+1 && |-1 \\ 14 &= 2x && |:2 \\ 7 &= x && |\text{Seiten vertauschen} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Antwort

Die Seiten des ursprünglichen Quadrates sind 7 cm lang.

Textaufgaben (Forts. 2)

Beispiel 3

Tobias ist dreimal so alt wie Anna. In sieben Jahren wird Tobias nur noch doppelt so alt wie Anna sein. Wie alt ist Anna jetzt?

Lösung

1. Situationsbeschreibung und Benennung der Unbekannten

Alter von Anna und Tobias

	Anna	Tobias
jetzt:	x	$3x$
in 7 Jahren:	$x+7$	$2\cdot(x+7)$ bzw. $3x+7$

$$x = \text{jetziges Alter von Anna}$$

Derartige Tabellen haben sich bei der Lösung von Altersrätseln sehr bewährt.

2. Gleichung aufstellen

Rechts unten ist das Alter von Tobias in 7 Jahren auf zweierlei Arten ausgedrückt. Dies liefert direkt die Gleichung:

$$\text{2 mal (Annas Alter in 7 Jahren)} = \text{jetziges Alter von Tobias + 7}$$

$$2\cdot(x+7) = 3x+7$$

3. Gleichung lösen

$$\begin{aligned}
2\cdot(x+7) &= 3x+7 && |\,\text{ausmultiplizieren}\\
2x+14 &= 3x+7 && |\,-2x\\
14 &= x+7 && |\,-7\\
7 &= x && |\,\text{Seiten vertauschen}\\
x &= 7 && \text{(jetziges Alter von Anna)}
\end{aligned}$$

Antwort

Anna ist 7 Jahre alt.

Dreisatz und Verhältnisgleichungen

Dreisätze kann man mit Verhältnisgleichungen lösen.

Beispiel eines proportionalen Dreisatzes
4 Artikel kosten 28 €. Wie viel kosten 3 Artikel?

Lösung
Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} 4\text{ kg} &\rightarrow 28\text{ €} \\ 3\text{ kg} &\rightarrow x \end{aligned}$$

Verhältnisgleichung aufstellen (Zahlenanordnung der Aufgabenstellung übernehmen) und lösen:

$$\frac{4\text{ kg}}{3\text{ kg}} = \frac{28\text{ €}}{x} \qquad |\,\text{Kehrwert bilden}$$

$$\frac{3\text{ kg}}{4\text{ kg}} = \frac{x}{28\text{ €}} \qquad |\cdot 28\text{ €}$$

$$\frac{3\text{ kg}\cdot 28\text{ €}}{4\text{ kg}} = x$$

$$21\text{ €} = x$$

Antwort: 3 Artikel kosten 21 €.

Beispiel eines umgekehrt proportionalen Dreisatzes
Zwei Arbeiter erledigen einen Auftrag in 9 Tagen. Wie lange benötigen 3 Arbeiter dafür?

Lösung
Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} 2\text{ Arbeiter} &\rightarrow 9\text{ Tage} \\ 3\text{ Arbeiter} &\rightarrow x \end{aligned}$$

Dreisatz und Verhältnisgleichungen (Forts.)

Wir kehren in der Verhältnisgleichung **einen** Bruch um, vorzugsweise den rechten, damit x bereits im Zähler steht:

$$\frac{2\text{ Arbeiter}}{3\text{ Arbeiter}} = \frac{x}{9\text{ Tage}}$$

Nun kürzen wir und lösen die Gleichung nach x auf:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{x}{9\text{ Tage}} && |\cdot(9\text{ Tage}) \\ \frac{2}{3}\cdot(9\text{ Tage}) &= x && |\,\text{multiplizieren} \\ 6\text{ Tage} &= x \end{aligned}$$

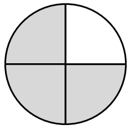
Also benötigen 3 Arbeiter für den Auftrag 6 Tage.

Zusammenfassung 4: Bruchrechnen

Zähler

Bruch: $\mathbf{\frac{3}{4}}$ *3 Viertel (wie 3 Äpfel)*

Nenner



Bruch als Zahl: $\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$

Kürzen: Man teilt Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl:

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

Erweitern: Man multipliziert Zähler und Nenner mit derselben Zahl:

$$\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Addition: Brüche auf einen gemeinsamen Nenner (Nenner mal Nenner) bringen und dann die Zähler addieren:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{3}{6}+\frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Subtraktion: Brüche auf einen gemeinsamen Nenner (Nenner mal Nenner) bringen und dann die Zähler subtrahieren:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{3}{6}-\frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Multiplikation: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Bruchrechnen (Forts.)

Division: Man teilt durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert:

$$\frac{2}{3} \mathbf{:} \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$