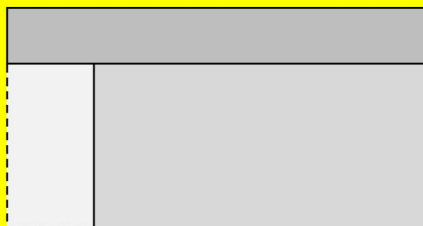
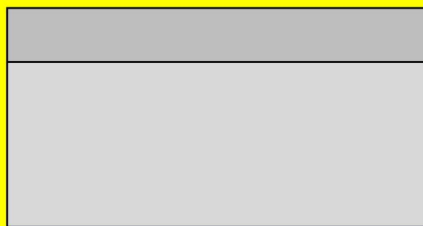


Lineare Gleichungssysteme

Alexander Roux

$$\begin{aligned}x + 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= 7\end{aligned}$$



Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Eine Einführung

Alexander Roux

Impressum

Copyright: © 2016 Alexander Roux

Druck und Verlag: epubli GmbH, Berlin,

www.epubli.de

ISBN-13: 978-3-7418-7733-9

Vorwort

Das Hauptziel dieses kleinen Textes ist es, den Leser mit linearen Gleichungssystemen bekannt zu machen. Im Mittelpunkt stehen zunächst die üblichen elementaren Lösungsverfahren: Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten.

Anschließend werden auch fortgeschrittenere Lösungsmethoden behandelt, die sich aus dem Additionsverfahren entwickeln lassen. Die Determinantenmethode (Cramersche Regel) ergibt sich aus der Anwendung des Additionsverfahrens auf ein allgemeines lineares Gleichungssystem. Die systematische Umsetzung des Additionsverfahrens bei Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten führt zur Elimination nach Gauß und Gauß-Jordan.

Zum Abschluss wird ein Ausblick auf Determinanten und Matrizen gegeben. Es werden die grundlegenden Eigenschaften und Rechenoperationen anhand von Gleichungssystemen hergeleitet. Die damit vermittelten Einsichten erleichtern den Einstieg in anspruchsvollere Bereiche der Mathematik wie Vektorrechnung, Matrizenrechnung und lineare Algebra.

Die Lektüre des Buches erfordert nur wenige Vorkenntnisse. Der Leser sollte mit negativen Zahlen, Buchstaben und einfachen Gleichungen in einer Unbekannten umgehen können.

Es gibt eine ständig steigende Tendenz in den Schulen des Westens, die Grundideen in der Mathematik durch eine Vielzahl von vermeintlich „praktischen“ oder „alltäglichen“ Beispielen zu verdunkeln.

Der vorliegende Text möchte einen Beitrag dazu leisten, die wesentlichen Gedanken wieder deutlich erkennbar zu machen.

Dr. A. Roux
Brühl, August 2016

Inhalt

Vorwort	5
Inhalt	7
1. Einführung	9
2. Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten	14
2.1 Das Additionsverfahren	14
2.2 Das Einsetzungsverfahren	20
2.3 Das Gleichsetzungsverfahren	23
2.4 Anwendungen	25
2.5 Gleichungssysteme ohne eindeutige Lösung	29
2.6 Determinanten und Cramersche Regel	34
Aufgaben	44
3. Gleichungssysteme mit drei Unbekannten	51
3.1 Elimination nach Gauß	51
3.2 Elimination nach Gauß-Jordan	57
3.3 Die erweiterte Koeffizientenmatrix	60
3.4 Gleichungssysteme ohne eindeutige Lösung	65
3.5 Anwendungen	70
3.6 Cramersche Regel und Determinanten	73
Aufgaben	81
4. Ausblick: Determinanten und Matrizen	87
4.1 Eigenschaften von Determinanten	87
4.2 Praktische Rechenregeln für Determinanten	94
4.3 Anwendung der Rechenregeln für Determinanten	99
4.4 Matrizen	106
Aufgaben	113
Lösungen	116
Anhang: Zusammenfassung	123

1. Einführung

Einfache Gleichungen enthalten eine einzige gesuchte Größe. Oft sind aber mehrere Zahlen zu ermitteln, wie in dem folgenden lehrreichen Zahlenrätsel:

Die Summe zweier Zahlen ist 10, ihre Differenz 2. Welche Zahlen sind es?

Die erste Bedingung allein reicht nicht aus, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Denn es gibt (unendlich) viele Zahlenpaare, deren Summe 10 ergibt:

$$1+9=10$$

$$2+8=10$$

$$3+7=10$$

$$4+6=10$$

$$5+5=10$$

$$6+4=10$$

$$7+3=10$$

$$8+2=10$$

$$8,7+1,3=10$$

usw.

Die zweite Bedingung fordert, dass die Differenz der Zahlen 2 ist. Nur ein Paar kommt dann noch in Frage:

$$6+4=10,$$

denn die Differenz der beiden Summanden ist tatsächlich 2:

$$6-4=2.$$

Alle anderen Paare haben eine andere Differenz.

Das Zahlenrätsel zeigt, dass zur Berechnung von zwei Unbekannten auch zwei Gleichungen nötig sind, wenn eine eindeutig Lösung erwünscht ist. Die beiden Gleichungen zusammen werden als *Gleichungssystem* bezeichnet. Das Gleichungssystem des Zahlenrätsels ist also:

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

Im Allgemeinen können noch Koeffizienten (d. h. Vorzahlen) bei den Unbekannten auftreten, wie beispielsweise im Gleichungssystem:

$$2x + 5y = 12$$

$$3x + 4y = 11$$

Wir betrachten ausschließlich *lineare* Gleichungssysteme; bei ihnen tauchen die Unbekannten nicht als Quadrate oder höhere Potenzen auf. Das Adjektiv *linear* ist hier im Sinne von *geradlinig* gemeint. Der Hintergrund ist folgender: Eine Gerade wird in Koordinaten durch eine Gleichung der Gestalt $y = ax + b$ beschrieben, während die Gleichungen von krummlinigen Kurven (wie Parabeln) zusätzlich höhere Potenzen von x enthalten; also etwa so aussehen: $y = ax^2 + bx + c$.

Wir werden auch Gleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten betrachten. Bei drei Unbekannten wird das Gleichungssystem in der Regel ebenfalls aus *drei* Gleichungen bestehen, bei vier Unbekannten aus vier Gleichungen, usw.

Bereits im neubabylonischen Reich wurden um das Jahr 300 v. Chr. lineare Gleichungssysteme gelöst. Etwa ab 100 v. Chr. benutzte man in China eine effiziente Methode um größere Gleichungssysteme zu lösen. Dieses Verfahren entspricht im Wesentlichen dem heute nach Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) benannten Eliminationsverfahren. Chinesische Beamtenanwärter

wurden im Rahmen des Aufnahmeverfahrens über den Inhalt der *Neun Kapitel der mathematischen Künste* geprüft, zu dem auch die linearen Gleichungssysteme gehörten.

Die gewissermaßen formelmäßige Lösung von linearen Gleichungssystemen mithilfe von *Determinanten* geht vor allem auf Takakazu Seki (1642 - 1708), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) und Gabriel Cramer (1704 - 1752) zurück.



Takakazu Seki
1642-1708



Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716



Gabriel Cramer
1704-1752

Wir geben nun einen kurzen Überblick über den Inhalt dieses Buches.

Im ersten Kapitel betrachten wir lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten. Der Schwerpunkt liegt bei den drei elementaren Lösungsmethoden:

- Additionsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren

Allen drei Verfahren ist gemeinsam, dass es darum, geht eine der Unbekannten zu entfernen. Hat man nur noch eine Unbekannte, so kann diese einfach aus der Gleichung berechnet werden.

Das Additionsverfahren ist das einfachste, übersichtlichste und wichtigste. Aus ihm werden wir Determinanten und die Cramersche Regel gewinnen.

Während das Additionsverfahren auf *lineare* Gleichungssysteme zugeschnitten und beschränkt ist, sind die Ansätze beim Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren allgemeinerer Natur. Das Einsetzen und Gleichsetzen von Ausdrücken kommt oft in der Mathematik vor und kann hierbei geübt werden.

Wir betrachten auch Anwendungsaufgaben. Ferner untersuchen wir exotische lineare Gleichungssysteme, die keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

Das in Schulen gelehrt graphische Lösungsverfahren werden wir *nicht* betrachten, da es auf zwei Unbekannte beschränkt ist und Vorwissen über Koordinatensysteme und Geraden voraussetzt. Es schießt mit Kanonen auf Spatzen und ist allenfalls als Wiederholungsübung zum Thema Schnittpunkte von Geraden geeignet. Historisch sind lineare Gleichungssysteme etwa 1500 Jahre *vor* der Einführung von Koordinatensystemen gelöst worden. Die angemessene Betrachtung von Geraden und Parabeln setzt Grundkenntnisse über lineare Gleichungssysteme voraus, und nicht umgekehrt.

Im zweiten Kapitel geht es vor allem um größere lineare Gleichungssysteme, mit drei und mehr Unbekannten. Diese werden wir durch Elimination nach Gauß und Gauß-Jordan lösen. Die Eliminationsverfahren sind nichts anderes als die systematische Umsetzung des Additionsverfahrens. Die Elimination werden wir schließlich auch in abgekürzter Schreibweise mithilfe der sehr praktischen erweiterten Koeffizientenmatrix durchführen. Das vielleicht etwas hochtrabend klingende Wort *eliminieren* bedeutet übersetzt einfach *beseitigen* oder *entfernen*.



Carl Friedrich Gauß
1777-1855



Camille Jordan
1838-1922

In einem abschließenden Ausblick werden Determinanten und die Cramersche Regel für größere lineare Gleichungssysteme unter die Lupe genommen.

2. Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Wir beginnen dieses Kapitel mit der Besprechung der drei elementaren Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten. Es folgen Anwendungsaufgaben. Damit sind die Grundlagen gelegt, und es können nun auch exotische Sonderfälle und die fortgeschrittenere Determinantenmethode (Cramersche Regel) ins Auge gefasst werden. Das an den Schulen noch gelehrt nicht sonderlich praxisrelevante grafische Lösungsverfahren werden wir nicht betrachten. Es ist nur auf Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten anwendbar und dient allenfalls der Wiederholung der Geraden und der Schnittpunktberechnung – dies sind aber Themen, die erst *nach* den linearen Gleichungssystemen durchgenommen werden sollten.

2.1 Das Additionsverfahren

Das strategische Ziel aller drei elementaren Lösungsverfahren ist es, eine Unbekannte zu beseitigen. Dann bleibt nur eine gewohnte Gleichung mit nur einer Unbekannten übrig, und diese kann einfach gelöst werden.

Seit der Erfindung der negativen Zahlen durch den Inder Brahmagupta (ca. 600 n. Chr.) sind die Begriffe *Addition* und *Subtraktion* verschmolzen: Die Subtraktion $8 - 5$ kann auch als Addition $8 + (-5)$ aufgefasst werden.

In diesem Sinne schließt das Additionsverfahren auch *Subtraktionen* ein. Wir wollen eine Unbekannte aus dem Gleichungssystem entfernen. Dies geschieht am anschaulichsten durch das Subtrahieren (Wegnehmen).

Beim Additionsverfahren wird die Subtraktion wie beim schriftlichen Rechnen aufgeschrieben und durchgeführt. Diese Übersichtlichkeit und Einfachheit sind ein großer Vorteil des Additionsverfahrens.

Wir betrachten drei Beispiele. Eines dient der ausführlichen Erläuterung des allgemeinen Vorgehens. Das zweite zeigt den Lösungsweg in Kurzfassung. Im dritten Beispiel werden lineare Gleichungssysteme betrachtet, die negativen Zahlen enthalten.

Beispiel 1

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 3y = 8$$

$$5x + 4y = 13$$

Lösung (ausführlich)

Wir möchten eine Unbekannte entfernen. Systematischerweise beginnen wir mit der ersten, nämlich x . Danach werden wir y entfernen.

1. Entferne x

Wenn wir bei

$$2x + 3y = 8$$

$$5x + 4y = 13$$

direkt subtrahieren, fällt x leider nicht weg, weil $2x - 5x$ nicht Null ist.

Wir müssen erreichen, dass die x -Terme in den beiden Gleichungen übereinstimmen. Der Term $2x$ enthält die 2, aber nicht die 5 von $5x$. Der Term $2x$ muss also eine 5 bekommen. Andererseits steckt im Term $5x$ die 5, aber leider nicht die 2 von $2x$. Der Term $5x$ muss daher eine 2 bekommen. Um die x -Terme auf ein Level zu heben, multiplizieren wir also jeden x -Term mit der Vorzahl des *anderen* x -Terms (im Bruchrechnen wir mit derselben Methode ein gemeinsamer Nenner von zwei Brüchen gefunden):

$$2x + 3y = 8 \quad | \cdot 5$$

$$5x + 4y = 13 \quad | \cdot 2$$

Wir erhalten:

$$5 \cdot 2x + 15y = 40$$

$$2 \cdot 5x + 8y = 26$$

Also:

$$10x + 15y = 40$$

$$10x + 8y = 26$$

Wenn wir nun subtrahieren, fällt x weg ($10x - 10x = 0$), ferner ist $15y - 8y = 7y$ und $40 - 26 = 14$:

$$10x + 15y = 40$$

$$10x + 8y = 26 \quad | \text{oben} - \text{unten}$$

$$\hline 7y = 14 \quad | :7$$

$$y = 2$$

2. Entferne y

Wir müssen erreichen, dass die y -Terme in den beiden Gleichungen übereinstimmen. Dazu multiplizieren wir wieder jeden y -Term mit der Vorzahl des *anderen* y -Terms:

$$2x + 3y = 8 \quad | \cdot 4$$

$$5x + 4y = 13 \quad | \cdot 3$$

Und erhalten:

$$8x + 4 \cdot 3y = 32$$

$$15x + 3 \cdot 4y = 39$$

Also:

$$8x + 12y = 32$$

$$15x + 12y = 39$$

Wenn wir nun subtrahieren fällt y weg ($12y - 12y = 0$), ferner ist $8x - 15x = -7x$ und $32 - 39 = -7$:

$$\begin{array}{rcl}
 8x + 12y & = & 32 \\
 15x + 12y & = & 39 \quad | \text{oben} - \text{unten} \\
 \hline
 -7x & = & -7 \quad | :(-7) \\
 x & = & 1
 \end{array}$$

Wir hätten auch umgekehrt subtrahieren können, um negative Zahlen zu vermeiden:

$$\begin{array}{rcl}
 8x + 12y & = & 32 \\
 15x + 12y & = & 39 \quad | \text{unten} - \text{oben} \\
 \hline
 7x & = & 7 \quad | :7 \\
 x & = & 1
 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$\begin{array}{l}
 x = 1 \\
 y = 2
 \end{array}$$

Beispiel 2

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l}
 3x + 4y = 13 \\
 5x + 2y = 17
 \end{array}$$

Lösung (kurz)

1. Entferne x

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 4y & = & 13 \quad | \cdot 5 \\
 5x + 2y & = & 17 \quad | \cdot 3 \\
 \\
 15x + 20y & = & 65 \\
 15x + 6y & = & 51 \quad | \text{oben} - \text{unten} \\
 \hline
 14y & = & 14 \quad | :14 \\
 y & = & 1
 \end{array}$$

2. Entferne y

$$3x + 4y = 13 \quad | \cdot 2$$

$$5x + 2y = 17 \quad | \cdot 4$$

$$6x + 8y = 26$$

$$20x + 8y = 68 \quad | \text{unten} - \text{oben}$$

$$\underline{14x = 42} \quad | :14$$

$$x = 3$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$x = 3$$

$$y = 1$$

Das nachfolgende Beispiel enthält auch negative Zahlen. Daraus ergibt sich im Vorgehen die Besonderheit, dass eine *Addition* zur Beseitigung einer Unbekannten führt.

Sind zwei Größen *identisch*, so verschwinden sie, wenn man sie *subtrahiert*, zum Beispiel:

$$3x - 3x = 0$$

$$-5x - (-5x) = 0$$

Unterscheiden sich zwei Größen nur im *Vorzeichen*, so verschwinden sie bei der *Addition*, beispielsweise:

$$4x + (-4x) = 0$$

Beispiel 3

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$3x + 2y = 7$$

$$-4x + 5y = 6$$

Lösung**1. Entferne x**

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 7 \quad | \cdot 4 \text{ (ohne Vorzeichen)} \\ -4x + 5y & = & 6 \quad | \cdot 3 \\[1ex] 12x + 8y & = & 28 \\ -12x + 15y & = & 18 \quad | \text{oben} + \text{unten} \\ \hline & 23y & = 46 \quad | : 23 \\ & y & = 2 \end{array}$$

2. Entferne y

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 7 \quad | \cdot 5 \\ -4x + 5y & = & 6 \quad | \cdot 2 \\[1ex] 15x + 10y & = & 35 \\ -8x + 10y & = & 12 \quad | \text{oben} - \text{unten} \\ \hline & 23x & = 23 \quad | : 23 \\ & x & = 1 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

Am Ende des Kapitels sind zahlreiche lineare Gleichungssysteme bereitgestellt, an denen das Additionsverfahren geübt werden kann. Bei den Aufgaben 17 und 19 müssen zunächst die Unbekannten auf die linke Seite gebracht werden.

2.2 Das Einsetzungsverfahren

Auch beim Einsetzungsverfahren ist das strategische Ziel, eine Unbekannte zu entfernen. Möchten wir zum Beispiel die Unbekannte x loswerden, so lösen wir eine der Gleichungen des Gleichungssystems nach x auf und setzen das Ergebnis (es enthält nur die Unbekannte y) in die andere Gleichung ein, und zwar anstelle von x . Dadurch taucht x nicht mehr auf. Nun kann y berechnet werden. Der nun bekannte Wert von y kann in jede der Gleichungen des Gleichungssystems eingesetzt werden, woraus sich auch x berechnen lässt.

Das geschilderte Verfahren werden wir systematisch umsetzen: Wir werden (wenn keine triftigen Gründe dagegen sprechen) grundsätzlich zunächst die *erste* Unbekannte eliminieren, und dazu die *erste* Gleichung nach dieser Unbekannten auflösen.

Es folgen nun zwei Beispiele zum Einsetzungsverfahren, eines soll die Methode zeigen, und das andere die Handhabung von auftauchenden Brüchen vorführen.

Beispiel 1

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 3y = 8$$

Lösung

1. Löse die erste Gleichung nach x auf

$$x + 2y = 5 \quad | -2y$$

$$x = 5 - 2y$$

2. Setze das Ergebnis in die zweite Gleichung ein

$$x = 5 - 2y$$

eingesetzt in

$$2x + 3y = 8$$

ergibt

$$2(5 - 2y) + 3y = 8 \quad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$10 - 4y + 3y = 8 \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$10 - y = 8 \quad | -10$$

$$-y = -2 \quad | \cdot (-1)$$

$$y = 2$$

3. Setze $y = 2$ in die erste Gleichung ein

$$x + 2y = 5 \quad | y = 2 \text{ einsetzen}$$

$$x + 2 \cdot 2 = 5 \quad | \text{ ausrechnen}$$

$$x + 4 = 5 \quad | -4$$

$$x = 1$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$x = 1$$

$$y = 2$$

Beispiel 2

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 3y = 8$$

$$5x + 2y = 9$$

Lösung

1. Löse die erste Gleichung nach x auf

$$2x + 3y = 8 \quad | -3y$$

$$2x = 8 - 3y \quad | :2$$

$$x = \frac{8 - 3y}{2}$$

2. Setze das Ergebnis in die zweite Gleichung ein

$$x = \frac{8-3y}{2}$$

eingesetzt in

$$5x + 2y = 9$$

ergibt

$$5 \cdot \frac{8-3y}{2} + 2y = 9 \quad | \text{den Zähler mit 5 multiplizieren}$$

$$\frac{40-15y}{2} + 2y = 9 \quad | \cdot 2 \text{ (damit der Bruch wegfällt)}$$

$$40 - 15y + 4y = 18 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$40 - 11y = 18 \quad | -40$$

$$-11y = -22 \quad | :(-11)$$

$$y = 2$$

3. Setze $y = 2$ in die erste Gleichung ein

$$2x + 3y = 8 \quad | y = 2 \text{ einsetzen}$$

$$2x + 3 \cdot 2 = 8 \quad | \text{ausrechnen}$$

$$2x + 6 = 8 \quad | -6$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$x = 1$$

$$y = 2$$

Am Ende des Kapitels sind zahlreiche lineare Gleichungssysteme bereitgestellt, an denen das Einsetzungsverfahren geübt werden kann.

2.3 Das Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren wird eine Unbekannte auf ähnliche Weise wie beim Einsetzungsverfahren beseitigt. Möchten wir zum Beispiel die Unbekannte x loswerden, so lösen wir *beide* Gleichungen des Gleichungssystems nach x auf und setzen die Ergebnisse (sie enthalten nur die Unbekannte y) gleich. Dadurch taucht x nicht mehr auf. Nun kann y berechnet werden. Der nun bekannte Wert von y kann in jede der Gleichungen des Gleichungssystems eingesetzt werden, woraus sich auch x berechnen lässt. Das Gleichsetzungsverfahren ist sehr umständlich, es bietet aber die Gelegenheit algebraische Fertigkeiten zu üben. Wenn aber bei einem Gleichungssystem bereits beide Gleichungen nach einer Unbekannten aufgelöst sind, ist das Gleichsetzungsverfahren ideal. Dies trifft auf die Schnittpunktberechnung von Geraden, Parabeln und anderen Kurven zu.

Das geschilderte Verfahren werden wir systematisch umsetzen: Wenn keine triftigen Gründe dagegen sprechen, wird grundsätzlich zunächst die *erste* Unbekannte eliminiert.

Wir betrachten nun ein Beispiel zum Gleichsetzungsverfahren.

Beispiel

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 3y = 8$$

$$5x + 2y = 9$$

Lösung

1. Löse die beide Gleichungen nach x auf

$$2x + 3y = 8 \quad | -3y$$

$$2x = 8 - 3y \quad | :2$$

$$x = \frac{8 - 3y}{2}$$

$$\begin{aligned}5x + 2y &= 9 && | -2y \\5x &= 9 - 2y && | :5 \\x &= \frac{9-2y}{5}\end{aligned}$$

2. Setze die Ergebnisse gleich

$$x = \frac{8-3y}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{9-2y}{5} \quad \text{gleichsetzen:}$$

$$\frac{8-3y}{2} = \frac{9-2y}{5} \quad | \cdot 2 \text{ (damit der linke Bruch wegfällt)}$$

$$8-3y = 2 \cdot \frac{9-2y}{5} \quad | \text{den Zähler mit 2 multiplizieren}$$

$$8-3y = \frac{18-4y}{5} \quad | \cdot 5 \text{ (damit der Bruch wegfällt)}$$

$$40-15y = 18-4y \quad | +4y$$

$$40-11y = 18 \quad | -40$$

$$-11y = -22 \quad | :(-11)$$

$$y = 2$$

3. Setze $y=2$ in die erste Gleichung ein

$$2x + 3y = 8 \quad | y=2 \text{ einsetzen}$$

$$2x + 3 \cdot 2 = 8 \quad | \text{ausrechnen}$$

$$2x + 6 = 8 \quad | -6$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung: $x=1$, $y=2$.

Am Ende des Kapitels sind zahlreiche lineare Gleichungssysteme bereitgestellt, an denen das Gleichsetzungsverfahren geübt werden kann.

2.4 Anwendungen

Wir widmen uns nun anwendungsbezogenen Aufgaben. Diese werden wir mithilfe von linearen Gleichungssystemen lösen.

Gleichungen enthalten Unbekannte. Bevor man die Gleichungen aufstellen kann, muss man klipp und klar mitteilen, welche Größen die Unbekannten sind, beispielsweise so:

$$x = \text{Preis von 1 Apfel (in €)}$$

Erst dann hat man eine realistische Chance, die richtigen Gleichungen zu finden.

Alle Gleichungen können zunächst einmal sprachlich formuliert werden und stellen meist eine verblüffend einfache Aussage dar, zum Beispiel:

$$\text{Werte der Äpfel} + \text{Werte der Birnen} = \text{Gesamtwert}$$

Bei der mathematischen Umsetzung dieser Gleichung kommen noch Überlegungen ins Spiel, wie sie vom Dreisatz her vertraut sind, etwa:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ Apfel} & \text{kostet } x. \\ 3 \text{ Äpfel} & \text{kosten } 3x. \end{array}$$

Die Gleichungssysteme werden wir hier mit einer Kombination von Additionsverfahren und anschließend dem Einsetzungsverfahren lösen. Dieser Lösungsweg ist kurz (und entspricht übrigens weitgehend dem Eliminationsverfahren).

Wir betrachten nun zwei Aufgabenbeispiele, eines aus dem Alltagsbereich, und eines aus Neubabylonien (ca. 300 v. Chr.).

Beispiel 1

Frau Müller kauft 3 Äpfel und 4 Birnen und zahlt dafür 7,20 €. Herr Schmidt kauft 4 Äpfel und 2 Birnen und zahlt dafür 5,60 €. Was kostet ein Apfel, was kostet eine Birne?

Lösung

1. Unbekannte benennen

x = Preis von 1 Apfel (in €)

y = Preis von 1 Birne (in €)

2. Gleichungen aufstellen

a) Müllers Einkauf

Wert der Äpfel + Wert der Birnen = Gesamtwert

$$3x \quad + \quad 4y \quad = 7,20$$

[Erläuterungen:

1 Apfel $\rightarrow x$, also: 3 Äpfel $\rightarrow 3x$.

1 Birne $\rightarrow y$, also: 4 Birnen $\rightarrow 4y$.]

b) Schmidts Einkauf

Wert der Äpfel + Wert der Birnen = Gesamtwert

$$4x \quad + \quad 2y \quad = 5,60$$

[Erläuterungen:

1 Apfel $\rightarrow x$, also: 4 Äpfel $\rightarrow 4x$.

1 Birne $\rightarrow y$, also: 2 Birnen $\rightarrow 2y$.]

c) Zusammengefasst:

$$3x + 4y = 7,2$$

$$4x + 2y = 5,6$$

3. Gleichungssystem lösen

a) Entferne x

$$3x + 4y = 7,2 \quad | \cdot 4$$

$$4x + 2y = 5,6 \quad | \cdot 3$$

$$12x + 16y = 28,8$$

$$12x + 6y = 16,8 \quad | \text{oben} - \text{unten}$$

$$10y = 12 \quad | :10$$

$$y = 1,2$$

b) Setze $y = 1,2$ in die erste Gleichung ein

$$3x + 4y = 7,2 \quad | y = 1,2 \text{ einsetzen}$$

$$3x + 4 \cdot 1,2 = 7,2 \quad | \text{ausrechnen}$$

$$3x + 4,8 = 7,2 \quad | -4,8$$

$$3x = 2,4 \quad | :3$$

$$x = 0,8$$

Also: $x = 0,8$, $y = 1,2$

Antwort

Ein Apfel kostet 0,80 € und eine Birne 1,20 €.

Das folgende Beispiel ist eine Aufgabe, die aus *Neubabylonien*, (ca. 300 v. Chr.) stammt.

Beispiel 2

Zwei Felder haben zusammen eine Fläche von 1800 Flächeneinheiten. Auf einem der Felder werden $\frac{2}{3}$ Scheffel Korn pro Flächeneinheit erwirtschaftet. Das Andere Feld hat einen Ertrag von $\frac{1}{2}$ Scheffel pro Flächeneinheit. Wie groß ist jedes Feld, wenn die gesamte Kornproduktion 1100 Scheffel beträgt?

Lösung

1. Unbekannte benennen

x = Flächeninhalt von Feld 1

y = Flächeninhalt von Feld 2

2. Gleichungen aufstellen

a) Gesamtfläche

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Fläche von Feld 1} & + & \text{Fläche von Feld 2} & = & \text{Gesamtfläche} \\ x & + & y & = & 1800 \end{array}$$

b) Gesamtertrag

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Ertrag von Feld 1} & + & \text{Ertrag von Feld 2} & = & \text{Gesamtertrag} \\ \frac{2}{3}x & + & \frac{1}{2}y & = & 1100 \end{array}$$

[Erläuterungen:

Feld 1:

1 Flächeneinh. $\rightarrow \frac{2}{3}$ Scheffel, also: x Flächeneinh. $\rightarrow \frac{2}{3}x$ Schef.

Feld 2:

1 Flächeneinh. $\rightarrow \frac{1}{2}$ Scheffel, also: y Flächeneinh. $\rightarrow \frac{1}{2}y$ Schef.]

Zusammengefasst erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcccl} x & + & y & = & 1800 \\ \frac{2}{3}x & + & \frac{1}{2}y & = & 1100 \end{array}$$

3. Gleichungssystem lösen

a) Vereinfache die zweite Gleichung (Brüche loswerden)

$$\begin{array}{rcccl} x & + & y & = & 1800 \\ \frac{2}{3}x & + & \frac{1}{2}y & = & 1100 \quad | \cdot 3 \\ x & + & y & = & 1800 \\ 2x & + & 1,5y & = & 3300 \end{array}$$

b) Entferne x

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & y & = & 1800 & | \cdot 2 \\
 2x & + & 1,5y & = & 1100 & \\
 \\
 2x & + & 2y & = & 3600 & \\
 2x & + & 1,5y & = & 3300 & | \text{oben} - \text{unten} \\
 \hline
 & & 0,5y & = & 300 & | : 0,5 \text{ (oder: } \cdot 2) \\
 & & y & = & 600 &
 \end{array}$$

c) Setze $y = 600$ ein in die erste Gleichung

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & y & = & 1800 & | y = 600 \text{ einsetzen} \\
 x & + & 600 & = & 1800 & | -600 \\
 x & = & 1200 & & &
 \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{l}
 x = 1200 \\
 y = 600
 \end{array}$$

Antwort

Das Feld 1 hat 1200 Flächeneinheiten und das Feld 2 hat 600 Flächeneinheiten.

2.5 Gleichungssysteme ohne eindeutige Lösung

Alle bisher betrachteten linearen Gleichungssysteme haben eine eindeutige Lösung, d. h. für jede der beiden Unbekannten war nur ein Wert richtig. Es gibt jedoch lineare Gleichungssysteme, die überhaupt keine Lösung besitzen, und solche die (unendlich) viele Lösungen zulassen.

Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

Das einfachste lineare Gleichungssystem, das keinerlei Lösung besitzt ist folgendes:

$$x + y = 1$$

$$x + y = 0$$

Egal welche Werte man für x und y einsetzen mag, man wird niemals erreichen können, dass die Summe *zugleich 1 und 0* ist. Die Gleichungen widersprechen sich. Bei anderen unlösbaren linearen Gleichungssystemen liegt derselbe Widerspruch zugrunde, meist allerdings nicht so offensichtlich. Erst nach den ersten Lösungsschritten tritt dann der Widerspruch zutage, und damit auch die Unlösbarkeit:

Wir bearbeiten das lineare Gleichungssystem

$$2x + 6y = 2$$

$$3x + 9y = 1$$

mit dem Additionsverfahren und entfernen zunächst x :

$$2x + 6y = 2 \quad | \cdot 3$$

$$3x + 9y = 1 \quad | \cdot 2$$

$$6x + 18y = 6$$

$$6x + 18y = 2$$

Hier ist der Widerspruch bereits erkennbar, denn der Ausdruck

$$6x + 18y$$

kann nicht *zugleich 6 und 2* sein. Setzt man das Additionsverfahren fort, so erscheint der Widerspruch in kürzeren und noch klareren Form:

$$6x + 18y = 6$$

$$6x + 18y = 2 \quad | \text{oben} - \text{unten}$$

$$0 = 4$$

Unlösbares lineares Gleichungssysteme liefern beim Lösungsversuch stets falsche Aussagen wie $0 = 4$. Dies trifft auch bei der Durchführung der anderen Lösungsverfahren zu.

Lineare Gleichungssysteme mit vielen Lösungen

Ein einfaches lineares Gleichungssystem, das offensichtlich viele Lösungen besitzt ist folgendes:

$$x + y = 10$$

$$x + y = 10$$

Das Gleichungssystem besteht eigentlich nur aus einer einzigen Gleichung:

$$x + y = 10$$

In der Einführung haben wir bereits mehrere Lösungen für diese Gleichung notiert, u. a.:

$$1 + 9 = 10 \quad (x = 1, y = 9)$$

$$2 + 8 = 10 \quad (x = 2, y = 8)$$

$$3 + 7 = 10 \quad (x = 3, y = 7)$$

Tatsächlich kann man den Wert einer der Unbekannten (zum Beispiel y) frei wählen. Daraus kann man dann den Wert der anderen Unbekannten (zum Beispiel x) berechnen, indem man die Gleichung nach x auflöst:

$$x + y = 10 \quad | -y$$

$$x = 10 - y \quad (y \text{ frei wählbar})$$

Die Formulierung

$$x = 10 - y \quad (y \text{ frei wählbar})$$

stellt die **unendlichen vielen Lösungen** dar und wir auch als **allgemeine Lösung** bezeichnet. Einige konkrete Lösungen sind beispielsweise:

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 10 - y = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ x &= 10 - y = 10 - 2 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 7,4 \\ x &= 10 - y = 10 - 7,4 = 2,6 \end{aligned}$$

Meist erkennt man erst im Laufe des Lösungsweges, dass das Gleichungssystem mehrere Lösungen besitzt. Wir betrachten ein Beispiel dazu:

Beispiel

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 6y = 4$$

$$3x + 9y = 6$$

Lösung 1 (Additionsverfahren)

Wir versuchen, die Unbekannte x zu entfernen:

$$2x + 6y = 4 \quad | \cdot 3$$

$$3x + 9y = 6 \quad | \cdot 2$$

$$6x + 18y = 12$$

$$6x + 18y = 12$$

Das Gleichungssystem besteht aus nur einer Gleichung. Wir betrachten y als frei wählbar, und lösen nach x auf:

$$\begin{array}{rcl} 6x + 18y = 12 & & | -18y \\ 6x = 12 - 18y & & |:6 \\ x = 2 - 3y & & (y \text{ frei wählbar}) \end{array}$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ist also:

$$x = 2 - 3y \quad (y \text{ frei wählbar})$$

Lösung 2 (Einsetzungsverfahren)

1. Wir lösen die erste Gleichung nach x auf:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 6y = 4 & & | -6y \\ 2x = 4 - 6y & & |:2 \\ x = 2 - 3y & & \end{array}$$

2. Wir setzen das Ergebnis in die zweite Gleichung ein:

$$x = 2 - 3y$$

eingesetzt in

$$3x + 9y = 6$$

ergibt

$$\begin{array}{rcl} 3(2 - 3y) + 9y = 6 & & | \text{ausmultiplizieren} \\ 6 - 9y + 9y = 6 & & | \text{zusammenfassen} \\ 6 = 6 & & \end{array}$$

Die Unbekannte y ist verschwunden und nicht berechenbar. Im Hinblick auf das Ergebnis des ersten Lösungsweges interpretieren wir das Verschwinden von y so, dass y frei wählbar ist (keiner Bedingung/Gleichung unterworfen ist). Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ist also: $x = 2 - 3y$ (y frei wählbar).

Anmerkung:

Bei der Lösung von linearen Gleichungssystem ohne oder mit vielen Lösungen ist das Additionsverfahren besonders durchsichtig und liefert gut interpretierbare Ergebnisse. Die Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren gestalten sich dagegen schwieriger.

2.6 Determinanten und Cramersche Regel

Die Cramersche Regel ist eine *Formel* zur Lösung linearer Gleichungssysteme. In der Mathematik gewinnt man Formeln oft dadurch, dass man ein Problem in allgemeiner Formulierung (mit Buchstaben statt konkreter Zahlen) löst. Die Ergebnisse sind dann keine konkrete Zahlen, sondern allgemeine Formeln. Auf diese Weise kann man auch die Cramersche Regel herleiten.

Lösung des allgemeinen linearen Gleichungssystems

Wir werden das Additionsverfahren auf das allgemeine lineare Gleichungssystem mit zwei Unbekannten anwenden:

$$\begin{aligned}ax + by &= e \\ cx + dy &= f\end{aligned}$$

Hierbei sind die Koeffizienten (Vorzahlen) mit a, b, c, d bezeichnet worden, und die rechten Seiten der Gleichungen mit e und f .

Zunächst entfernen wir x :

$$\begin{array}{rcl}ax + by &= e & | \cdot c \\ cx + dy &= f & | \cdot a \\ \hline acx + bcy &= ce \\ acx + ady &= af & | \text{unten} - \text{oben} \\ \hline ady - bcy &= af - ce & | y \text{ ausklammern} \\ (ad - bc)y &= af - ce\end{array}$$

Wenn $ad - bc$ nicht 0 ist, können wir durch $ad - bc$ dividieren:

$$\begin{aligned}(ad - bc)y &= af - ce & | : (ad - bc) \\ y &= \frac{af - ce}{ad - bc}\end{aligned}$$

Nun entfernen wir y :

$$\begin{array}{rcl}
 ax + by = e & | \cdot d \\
 cx + dy = f & | \cdot b \\
 \hline
 adx + bdy = de \\
 bcx + bdy = bf & | \text{oben} - \text{unten} \\
 \hline
 adx - bcx = de - bf & | x \text{ ausklammern} \\
 (ad - bc)x = de - bf
 \end{array}$$

Wenn $ad - bc$ nicht 0 ist, können wir durch $ad - bc$ dividieren:

$$\begin{aligned}
 (ad - bc)x &= de - bf & | : (ad - bc) \\
 x &= \frac{de - bf}{ad - bc}
 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass $ad - bc \neq 0$, hat das lineare Gleichungssystem also die Lösung:

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \quad \text{und} \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Wir haben zwar Lösungsformeln erhalten, sie sind jedoch in dieser Form schwer zu merken und nicht sehr erhellend. Die Aufgabe ist jetzt, die dahinter liegende schöne und einfache Struktur herauszuarbeiten.

Die Struktur der Lösungsformeln

Es fällt auf, dass die beiden **Nenner** in den Lösungsformeln übereinstimmen:

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \quad \text{und} \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Ferner kommen in ihnen ausschließlich die Koeffizienten der Unbekannten im Gleichungssystem vor:

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

Der Nenner $ad - bc$ berechnet sich aus den Koeffizienten

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}$$

einfach, indem man über Kreuz multipliziert und abzieht. Der so berechnete Wert wird als **Determinante** des quadratischen Zahlenschemas bezeichnet und wie folgt geschrieben:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Das Rechenprinzip ist Produkt der *Hauptdiagonale* (von links oben nach rechts unten) minus Produkt der *Nebendiagonale* (links unten nach rechts oben), bildlich ausgedrückt:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \backslash \\ - \\ / \end{array}$$

Der Nenner der Lösungsformel ist also einfach die Determinante der Koeffizienten der Unbekannten.

Wir untersuchen nun die **Zähler** der Lösungsformeln. Sie sind nicht gleich, haben jedoch dieselbe Gestalt wie der Nenner, nämlich Differenz von Produkten. Dies legt den Versuch nahe, sie ebenfalls als *Determinanten* zu deuten. Wenn man die Anordnung der Zahlen im Gleichungssystem weitgehend beibehält, findet man tatsächlich folgende Determinanten:

$$\text{Zähler des Ausdrucks für } y: af - ce = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$\text{Zähler des Ausdrucks für } x: de - bf = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$

Vergleicht man die beiden Determinanten, so erkennt man eine einfache Gesetzmäßigkeit:

Beide Determinanten gehen aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

der Koeffizienten hervor, indem man jeweils eine Spalte ersetzt durch die rechts im Gleichungssystem stehende Spalte:

$$\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}$$

Beim Zähler der **ersten** Unbekannten wird die **erste Spalte** ersetzt. Beim Zähler der **zweiten** Unbekannten wird die **zweite Spalte** ersetzt.

Die mittels Determinanten formulierten und einfach strukturierten Lösungsformeln sind als *Cramersche Regel* bekannt. Sie sind auch auf mehrere Unbekannte übertragbar.

Unsere Überlegungen zeigen, dass Mathematik mehr ist als die Gewinnung blinder Formeln wie

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \quad \text{oder} \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Erst eine Analyse bringt die verborgene Struktur ans Licht, die zu tieferen und verallgemeinerungsfähigen Einsichten wie der Cramerschen Regel führt.

Auf der nächsten Seite fassen wir nun unsere Ergebnisse für den praktischen Gebrauch zusammen.

Cramersche Regel

Das lineare Gleichungssystem

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

hat die Lösung

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass der Nenner nicht Null ist.

Erläuterung zur Struktur:

$$\text{erste Unbekannte} = \frac{\begin{array}{l} \text{Determinante der Koeffizienten,} \\ \text{aber die \textbf{erste} Spalte ersetzt} \end{array}}{\text{Determinante der Koeffizienten}}$$

$$\text{zweite Unbekannte} = \frac{\begin{array}{l} \text{Determinante der Koeffizienten,} \\ \text{aber die \textbf{zweite} Spalte ersetzt} \end{array}}{\text{Determinante der Koeffizienten}}$$

Determinanten

Die Determinante eines quadratischen Zahlenschemas ist

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Das Rechenprinzip ist:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \diagdown \quad - \quad \diagup \end{array}$$

Wir betrachten nun zwei Beispiele.

Beispiel 1

Berechne die Determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Lösung

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7.$$

Beispiel 2

Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 8$$

Lösung

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7 \cdot 2 - 8 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = \frac{14 - 24}{4 - 3} = \frac{-10}{1} = -10$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 8 - 1 \cdot 7}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = \frac{16 - 7}{4 - 3} = \frac{9}{1} = 9$$

Die Lösung ist also: $x = -10$, $y = 9$.

Die Cramersche Regel führt unter der Voraussetzung, dass die Determinante der Koeffizienten ungleich Null ist, zu einer einzigen Lösung. An dieser Determinante kann man erkennen, ob

das Gleichungssystem eine einzige Lösung besitzt. Dies hat zur Bezeichnung *Determinante* geführt, denn die Determinante bestimmt (determiniert) die Art des linearen Gleichungssystems (eine, keine oder viele Lösungen).

Koeffizienten-Determinante Null

Wenn die Determinante der Koeffizienten Null ist, kann die Division im letzten Schritt der Herleitung der Cramerschen Regel nicht durchgeführt werden. Als Ergebnis der Herleitung bleiben die Gleichungen:

$$x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

Ist die Koeffizienten-Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, so folgt:

$$0 = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad 0 = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

Wenn eine dieser beiden Determinanten aber **nicht** 0 ist, ergibt sich eine falsche Aussage. Dies bedeutet, dass das Gleichungssystem **keine** Lösung besitzt.

Wenn alle Determinanten Null sind, sind die beiden Gleichungen des linearen Gleichungssystems identisch, und es gibt unendliche viele Lösungen. Folgende Überlegungen machen dies plausibel:

Wir tun den ersten Schritt beim Entfernen von x im Rahmen des Additionsverfahrens:

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & e \quad | \cdot c \\ cx + dy & = & f \quad | \cdot a \end{array}$$

Das Gleichungssystem sieht dann so aus:

$$acx + bcy = ce$$

$$acx + ady = af$$

Da die Determinanten Null sind, haben wir

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0, \text{ also: } ad = bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce = 0, \text{ also: } af = ce.$$

Die obigen Gleichungen sind also identisch. Das Gleichungssystem besteht aus einer Gleichung und zwei Unbekannten und hat somit unendliche viele Lösungen (eine Unbekannte ist frei wählbar).

Zusammenfassung

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

Die Anzahl der Lösungen hängt vom Wert der Determinanten ab:

1. Wenn $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, dann gibt es genau eine Lösung.
2. Wenn $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, dann gibt es zwei Möglichkeiten:
a) Wenn $\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = 0$, dann gibt es unendlich viele Lösungen.
b) Wenn $\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \neq 0$ oder $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \neq 0$, dann gibt es keine Lösung.

Beispiel 3

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 6y = 2$$

$$3x + 9y = 1$$

Lösung

Die Determinante der Koeffizienten ist:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 18 - 18 = 0$$

Da aber $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 1 \cdot 6 = 18 - 6 = 12 \neq 0$, hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Beispiel 4

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 6y = 4$$

$$3x + 9y = 6$$

Lösung

Die Determinante der Koeffizienten ist Null:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 18 - 18 = 0$$

Ebenfalls Null sind:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 = 36 - 36 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$$

Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen. Wir berechnen die allgemeine Lösung, indem wir y als frei wählbar

betrachten und die erste Gleichung nach x auflösen:

$$2x + 6y = 4 \quad | -6y$$

$$2x = 4 - 6y \quad |:2$$

$$x = 2 - 3y \quad (y \text{ frei wählbar})$$

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 2.1 bis 2.3

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Die Unbekannten heißen meist x und y , können aber beispielsweise auch a und b , oder x_1 und x_2 lauten.

$$\begin{array}{l} 1. \quad x + 3y = 3 \\ \quad \quad x + 4y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \quad x + 2y = 5 \\ \quad \quad x + 3y = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3. \quad 3x + y = 1 \\ \quad \quad 7x + 2y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4. \quad 2x + 3y = 1 \\ \quad \quad 3x + 4y = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5. \quad x + 3y = 2 \\ \quad \quad 3x + 10y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6. \quad 3x - 2y = -1 \\ \quad \quad -5x + 3y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7. \quad -2x - 3y = -4 \\ \quad \quad 5x + 7y = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8. \quad 7a + 5b = -1 \\ \quad \quad 4a + 3b = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9. \quad 2x + 3y = 18 \\ \quad \quad 3x + 4y = 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10. \quad 2x_1 + 3x_2 = -4 \\ \quad \quad 3x_1 + 5x_2 = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 11. \quad 2x - 3y = 7 \\ \quad \quad 5x + 4y = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12. \quad 2x + y = 4 \\ \quad \quad 3x - y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 13. \quad -3v + w = 1 \\ \quad \quad 7v + 2w = -24 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 14. \quad -7a - 5b = 8 \\ \quad \quad -4a + 3b = -13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 15. \quad 2,46x + 4,63y = 0,45 \\ \quad \quad 1,44x + 0,54y = 4,34 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 16. \quad -3x - 7y = 69 \\ \quad \quad 5x - 6y = 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 17. \quad y = x + 1 \\ \quad \quad 2x - 3y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 18. \quad 4x - 3y = 0 \\ \quad \quad 3x - 2y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 19. \quad x = 1,5y - 1 \\ \quad -3x + 4y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20. \quad 2x + 6y = 10 \\ \quad -9x + 5y = -13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 21. \quad -4x - 6y = -12 \\ \quad 5x - 9y = 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 22. \quad -9x + 6y = 99 \\ \quad 3x + 8y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 23. \quad 2x - 8y = 14 \\ \quad 9x + 4y = -17 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 24. \quad 8x + 7y = -26 \\ \quad -6x - 5y = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 25. \quad 7x + 2y = 66 \\ \quad -6x + 8y = -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 26. \quad 3x + 9y = 57 \\ \quad -2x + 8y = 88 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 27. \quad -16x + 19y = 77 \\ \quad -7x - 8y = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 28. \quad 3x + 7y = -14 \\ \quad -16x - 17y = -27 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 29. \quad 17x + 6y = 64 \\ \quad -11x + 9y = 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 30. \quad -3x + 13y = 79 \\ \quad -15x - 16y = 71 \end{array}$$

Aufgaben zu Kapitel 2.4

1. Die Summe zweier Zahlen beträgt 24, ihre Differenz 7. Welche Zahlen sind es?

2. Peter Schmidt zahlt 2,80 € für zwei Äpfel und drei Birnen. Seine Nachbarin Anja Neufit kauft beim selben Marktstand drei Äpfel und vier Birnen der gleichen Art. Sie bezahlt 3,90 €. Wie viel kostet ein Apfel? Was kostet eine Birne?

3. Der gelangweilte Bauer Jupp Rheinstall hat die Beine all seiner Schafe und Hühner zusammengezählt und 976 herausbekommen. Er hat auch (sic!) die Augen all seiner lieben Schafe und Hühner addiert und 798 davon gezählt. Wie viele Schafe und Hühner hat Bauer Rheinstall?

4. Ein Apfel kostet 0,50 € und eine Birne 0,60 €. Frau Müller

kauft Äpfel und Birnen, insgesamt 25 Früchte. Sie zahlt dafür 13,50 €. Wie viele Äpfel und wie viele Birnen hat sie gekauft?

5. In einem Abstellraum befinden sich zahlreiche Spinnen und Fruchtfliegen, insgesamt 59. Zusammen haben sie 390 Beine. Wie viele Spinnen und wie viele Fliegen befinden sich im Raum?

6. Eine Brieftasche enthält Geldscheine zu 20 € und 50 €. Der Gesamtbetrag der insgesamt 35 Scheine beläuft sich auf 1330 €. Finden Sie die Anzahl der Geldscheine von jeder Sorte.

7. Von 1532 verkauften Konzerttickets, waren 481 ermäßigt. Der Gesamterlös betrug 13396 €. Einen Tag später wurden 947 normale und 426 ermäßigte Tickets verkauft und dafür 12026 € eingenommen. Wie viel kostet ein ermäßigtes Ticket und wie viel ein normales?

8. Atome bestehen aus dem Atomkern und der Atomhülle. Die Atomhülle enthält Elektronen. Der Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen. Ein Proton besteht aus 2 Up-Quarks und 1 Down-Quark. Ein Neutron besteht aus 1 Up-Quark und 2 Down-Quarks. Wie groß ist die elektrische Ladung von Up-Quark und Down-Quark, wenn die Ladung eines Protons 1 beträgt und die eines Neutrons 0?

9. Zwei Felder haben zusammen eine Fläche von 1800 m². Auf einem der Felder werden $\frac{2}{3}$ Scheffel Korn pro Quadratmeter erwirtschaftet. Das Andere Feld hat einen Ertrag von $\frac{1}{2}$ Scheffel pro Quadratmeter. Wie groß ist jedes Feld, wenn die gesamte Kornproduktion 1100 Scheffel beträgt?

(Diese Aufgabe stammt aus Neubabylonien, ca. 300 v. Chr.)

10. Ein Liter Vollmilch enthält 3,5 % Fett, ein Liter fettarme Milch immerhin 1,5 %. Der wunderliche Kevin Altdörfer hat beide Milchsornten gemischt und so ein Liter Milch mit 2 % Fett bekommen. Wie viel Vollmilch und wie viel fettarme Milch hat er genommen?

11. Der exzentrische Ronny Neudeutsch möchte ein Glas Milch (0,2 Liter) mit einem nicht handelsüblichen Fettgehalt von 1% trinken. Dazu mischt er Vollmilch (3,5 % Fettgehalt) mit entrahmter Milch (0,3 % Fettgehalt). Wie viel Vollmilch muss Ronny in sein Glas gießen?

12. Um eine Tonne des Erzeugnisses E1 herzustellen, benötigt ein Betrieb 5 t des Rohstoffes R1 und 3 t des Rohstoffes R2. Die Produktion einer Tonne des Erzeugnisses E2 erfordert 3 t des Rohstoffes R1 und 2 t von R2.

Wie viele Tonnen von den Erzeugnissen E1 und E2 müssen hergestellt werden, damit beide vorhandenen Rohstoffe (R1: 62 t; R2: 39 t) aufgebraucht werden?

13. Sven Raffzahn möchte versilberte Münzen aus einer Blei-Zink-Legierung herstellen und als Silbermünzen verkaufen. Wie viel Kubikzentimeter Blei und Zink muss Raffzahn verschmelzen, um ein Kubikzentimeter Legierung zu gewinnen, die wie Silber eine Dichte von $10,50 \text{ g/cm}^3$ hat? (Dichte von Blei: $11,34 \text{ g/cm}^3$, Dichte von Zink: $7,13 \text{ g/cm}^3$)

14. Nach einem schweißtreibenden Fußballtraining sitzt Harald Halbspecht mit seinen Sportfreunden in der Kneipe und trinkt ein großes Alsterwasser (Kölsch mit Limonade, 0,4 Liter). Der Alkoholgehalt seines Getränkes beträgt 2%. Wie viel Kölsch (4,8 % Alkohol) enthält sein Glas?

Aufgaben zu Kapitel 2.5

1. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\2x + 2y &= 10\end{aligned}$$

2. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\ 2x + 2y &= 12\end{aligned}$$

3. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}6x + 9y &= 12 \\ 4x + 6y &= 8\end{aligned}$$

4. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}6x + 9y &= 12 \\ 4x + 6y &= 10\end{aligned}$$

5. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}2x - 4y &= 6 \\ -5x + 10y &= -15\end{aligned}$$

6. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}5x + 10y &= 25 \\ 3x + 6y &= 15\end{aligned}$$

Aufgaben zu Kapitel 2.6

1. Berechne die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$

2. Berechne die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$

3. Löse die Aufgaben zu Kapitel 2.1 bis 2.3 mithilfe der Cramerschen Regel.

4. Berechne die Determinante der Koeffizienten der linearen Gleichungssysteme aus den Aufgaben zu Kapitel 2.5.

3. Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen mit drei und mehr Unbekannten ist ein systematisches Vorgehen unverzichtbar, weil man sonst leicht den Überblick verliert und nicht zum Ziel kommt. Wir betrachten hier die *Elimination* nach *Gauß* und *Gauß-Jordan*, die eine systematische Umsetzung des Additionsverfahrens sind. Wie in der Einführung bereits erwähnt, war die Methode bereits den Chinesen (200 v. Chr.) bekannt. In Europa wurde sie von der zur Mode gewordenen Cramerschen Regel verdrängt. Gauß hat das Eliminationsverfahren wieder aufgegriffen, weil es effizienter als die Cramersche Regel ist. Seitdem ist die Elimination mit dem Namen Gauß verbunden, obwohl er nicht ihr Schöpfer ist.

Alle in einem linearen Gleichungssystem vorkommenden Zahlen kann man in Form eines rechteckigen Schemas schreiben, das als *erweiterte Koeffizientenmatrix* bezeichnet wird. Damit werden lineare Gleichungssysteme noch übersichtlicher und schneller lösbar, und man kann Lösungsprogramme für Computer schreiben.

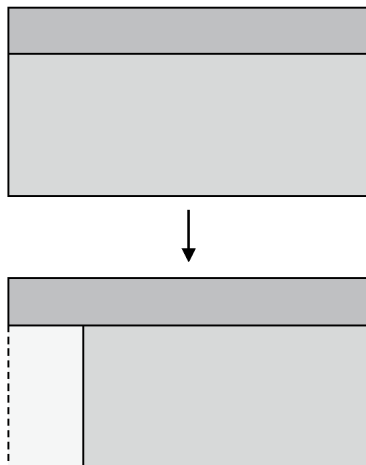
In einem eher kurz gehaltenen Abschnitt werden wir schließlich auf die Cramersche Regel bei drei Unbekannten eingehen.

3.1 Elimination nach Gauß

Der Grundgedanke der Elimination kann in einem einzigen Satz zusammengefasst werden:

Benutze die erste Gleichung, um die erste Unbekannte aus allen nachfolgenden Gleichungen zu entfernen.

Das Titelblatt des Buches stellt diesen Ansatz in anschaulichen Bildern dar:



Die Unbekannte wird wie beim Additionsverfahren entfernt. Man erhält ein kleineres lineares Gleichungssystem, das eine Unbekannte weniger enthält. Nun kann derselbe Ansatz auf das kleine System angewendet werden. Es bleibt schließlich nur eine Unbekannte übrig, und diese kann man dann mühelos berechnen. Durch Einsetzen der konkreten Ergebnisse in die vorangehenden Gleichungen, lassen sich alle Unbekannte berechnen. Die Einzelheiten des Verfahrens zeigen wir nun an konkreten linearen Gleichungssystemen:

Beispiel 1 (Methode)

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 4y + 6z = 8$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

Lösung

1. Benutze die erste Gleichung (als *Werkzeug*), um aus den nachfolgenden Gleichungen die erste Unbekannte (nämlich x) zu entfernen:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 6z & = & 8 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \\ x + 3y + 8z & = & 11 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

a) Entferne x aus der zweiten Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 6z & = & 8 \quad | \cdot 3 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \quad | \cdot 2 \\ \hline 6x + 12y + 18z & = & 24 \\ 6x + 16y + 26z & = & 40 \quad | \text{unten} - \text{oben} \\ \hline & 4y + 8z & = 16 \end{array}$$

b) Entferne x aus der dritte Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 6z & = & 8 \\ x + 3y + 8z & = & 11 \quad | \cdot 2 \\ \hline 2x + 4y + 6z & = & 8 \\ 2x + 6y + 16z & = & 22 \quad | \text{unten} - \text{oben} \\ \hline & 2y + 10z & = 14 \end{array}$$

Wir erhalten somit ein kleines lineares Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten y und z :

$$\begin{array}{rcl} 4y + 8z & = & 16 \\ 2y + 10z & = & 14 \end{array}$$

Auf dieses kleine System wird nun nochmals dieselbe Methode angewendet.

2. Benutze die erste kleine Gleichung (als Werkzeug), um aus der nachfolgenden Gleichung die erste Unbekannte (nämlich y) zu entfernen:

$$\begin{array}{rcl} 4y + 8z & = & 16 \quad | \cdot 2 \\ 2y + 10z & = & 14 \quad | \cdot 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 8y + 16z & = & 32 \\
 8y + 40z & = & 56 \quad | \text{unten} - \text{oben} \\
 \hline
 24z & = & 24 \quad | :24 \\
 z & = & 1
 \end{array}$$

3. Setze $z=1$ in die erste kleine Gleichung ein:

$$\begin{array}{rcl}
 4y + 8z & = & 16 \quad | z=1 \text{ einsetzen} \\
 4y + 8 \cdot 1 & = & 16 \\
 4y + 8 & = & 16 \quad | -8 \\
 4y & = & 8 \quad | :4 \\
 y & = & 2
 \end{array}$$

4. Setze $y=2$ und $z=1$ in die erste große Gleichung ein:

$$\begin{array}{rcl}
 2x + 4y + 6z & = & 8 \quad | y=2, z=1 \text{ einsetzen} \\
 2x + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & = & 8 \\
 2x + 8 + 6 & = & 8 \\
 2x + 14 & = & 8 \quad | -14 \\
 2x & = & -6 \quad | :2 \\
 x & = & -3
 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$\begin{array}{l}
 x = -3 \\
 y = 2 \\
 z = 1
 \end{array}$$

Man kann das Vorgehen bei der Lösung von Beispiel 1 noch optimieren, indem man die Werkzeug-Gleichungen normiert. Die Normierung besteht darin, dass die betrachtete Unbekannte von ihrer Vorzahl befreit wird. Das verringert den Rechenaufwand und erlaubt eine noch kürzere Schreibweise, die schließlich in der erweiterten Koeffizientenmatrix mündet.

Im nächsten Beispiel greifen wir das lineare Gleichungssystem von Beispiel 1 wieder auf, lösen es aber nun mit normierten Werkzeug-Gleichungen. Der Übersichtlichkeit halber schreiben

wir immer das gesamte Gleichungssystem mit, auch wenn nicht alle Gleichungen bearbeitet werden.

Beispiel 2 (Normierung)

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 4y + 6z = 8$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

Lösung

1. Benutze die erste Gleichung (als *Werkzeug*), um aus den nachfolgenden Gleichungen die erste Unbekannte (nämlich x) zu entfernen:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 6z & = & 8 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \\ x + 3y + 8z & = & 11 \end{array} \begin{array}{l} \\ \swarrow \\ \searrow \end{array}$$

a) Normiere die Werkzeug-Gleichung:

$$2x + 4y + 6z = 8 \quad |:2$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

b) Entferne x aus der zweiten und dritten Gleichung:

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$3x + 8y + 13z = 20 \quad | -3 \cdot \text{Gleichung 1}$$

$$x + 3y + 8z = 11 \quad | -\text{Gleichung 1}$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$2y + 4z = 8$$

$$y + 5z = 7$$

Die zwei letzten Gleichungen bilden nun ein kleines lineares Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten y und z :

$$\begin{aligned}2y + 4z &= 8 \\ y + 5z &= 7\end{aligned}$$

Auf dieses kleine System wird nun nochmals dieselbe Methode angewendet.

2. Benutze die erste kleine Gleichung (als Werkzeug), um aus der nachfolgenden Gleichung die erste Unbekannte (nämlich y) zu entfernen:

a) Normiere die Werkzeug-Gleichung:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\ 2y + 4z &= 8 & |:2 \\ y + 5z &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \\ y + 5z &= 7\end{aligned}$$

b) Entferne y aus der zweiten kleinen Gleichung:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \\ y + 5z &= 7 & | - \text{Gleichung 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \\ 3z &= 3 & |:3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \\ z &= 1\end{aligned}$$

Bei den weiteren Berechnungen benutzen wir dieses erheblich vereinfachte lineare Gleichungssystem.

3. Setze $z = 1$ in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{array}{rcl} y + 2z & = & 4 \quad | z=1 \text{ einsetzen} \\ y + 2 \cdot 1 & = & 4 \\ y + 2 & = & 4 \quad | -2 \\ y & = & 2 \end{array}$$

4. Setze $y = 2$ und $z = 1$ in die erste Gleichung ein:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \quad | y=2, z=1 \text{ einsetzen} \\ x + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & = & 4 \\ x + 4 + 3 & = & 4 \\ x + 7 & = & 4 \quad | -7 \\ x & = & -3 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

3.2 Elimination nach Gauß-Jordan

Bei der Gauß-Elimination fällt eine Uneinheitlichkeit auf: In den ersten Schritten werden Unbekannte auf übersichtliche Weise *eliminiert*, in den abschließenden Schritten werden Ergebnisse *eingesetzt*.

Nach Jordan (1838-1922) kann dieses Einsetzen von Werten ebenfalls als Elimination von Unbekannten aufgefasst und geschrieben werden. So gelangt man zur sogenannten Elimination nach Gauß-Jordan. Die Reihenfolge der Elimination nach Jordan ist umgekehrt, von unten nach oben und von der letzten zur ersten Unbekannten. Wir erläutern dieses Verfahren anhand des bereits oben gelösten linearen Gleichungssystems.

Beispiel (Gauß-Jordan)

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 4y + 6z = 8$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

Lösung

1. Benutze die erste Gleichung (als *Werkzeug*), um aus den nachfolgenden Gleichungen die erste Unbekannte (nämlich x) zu entfernen:

a) Normiere die Werkzeug-Gleichung:

$$2x + 4y + 6z = 8 \quad |:2$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

b) Entferne x aus der zweiten und dritten Gleichung:

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$3x + 8y + 13z = 20 \quad |-3 \cdot \text{Gleichung 1}$$

$$x + 3y + 8z = 11 \quad |- \text{Gleichung 1}$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$2y + 4z = 8$$

$$y + 5z = 7$$

2. Benutze die zweite Gleichung (als *Werkzeug*), um aus der dritten Gleichung die zweite Unbekannte (nämlich y) zu entfernen:

a) Normiere die Werkzeug-Gleichung:

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$2y + 4z = 8 \quad |:2$$

$$y + 5z = 7$$

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\y + 2z &= 4 \\y + 5z &= 7\end{aligned}$$

b) Entferne y aus der dritten Gleichung:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\y + 2z &= 4 \\y + 5z &= 7 \quad | - \text{Gleichung 2} \\ \hline x + 2y + 3z &= 4 \\y + 2z &= 4 \\3z &= 3 \quad | :3 \\ \hline x + 2y + 3z &= 4 \\y + 2z &= 4 \\z &= 1\end{aligned}$$

3. Benutze die dritte Gleichung (als Werkzeug), um aus den *vorigen* Gleichungen die Unbekannte z zu entfernen:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \quad | - 3 \cdot \text{Gleichung 3} \\y + 2z &= 4 \quad | - 2 \cdot \text{Gleichung 3} \\z &= 1 \\ \hline x + 2y &= 1 \\y &= 2 \\z &= 1\end{aligned}$$

4. Benutze die zweite Gleichung (als Werkzeug), um aus der ersten Gleichung die Unbekannte y zu entfernen:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 1 \quad | - 2 \cdot \text{Gleichung 2} \\y &= 2 \\z &= 1\end{aligned}$$

Man erhält:

$$\begin{array}{rcl} x & = & -3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem gelöst.

3.3 Die erweiterte Koeffizientenmatrix

Die eigentlichen Informationen eines linearen Gleichungssystems stecken in den Koeffizienten (Vorzahlen) der Unbekannten und in den Werten auf der rechten Seite.

Beispielsweise bilden die Koeffizienten des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 6z & = & 8 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \\ x + 3y + 8z & = & 11 \end{array}$$

folgendes rechteckige Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Dies ist die **Koeffizientenmatrix**. Jedes rechteckige Zahlenschema dieser Art wird als *Matrix* bezeichnet. Die Determinanten beruhen auf Matrizen, was auch den Namen *Matrix* (lat. *Gebärmutter*) erklärt.

Fügt man zur Koeffizientenmatrix die Zahlen auf der rechten Seite des Gleichungssystems hinzu, so erhält man die sogenannte **erweiterte Koeffizientenmatrix**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 13 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right)$$

Aus den *Gleichungen* des Gleichungssystems werden *Zeilen* der

erweitern Koeffizientenmatrix. Die Elimination nach Gauß oder Gauß-Jordan kann nun anhand der Koeffizientenmatrix kurz und übersichtlich durchgeführt werden:

Beispiel

Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x + 4y + 6z = 8$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

Anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Lösung 1 (ausführlich)

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 13 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right)$$

1. Normiere die erste Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 13 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(Zeile 1):2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 13 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right)$$

2. Benutze die erste Zeile, um die erste Unbekannte (erste Spalte) aus den unteren Gleichungen zu entfernen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 13 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{Zeile 3} - \text{Zeile 1}]{\text{Zeile 2} - 3 \cdot \text{Zeile 1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right)$$

Das Fehlen der ersten Unbekannten in der zweiten und dritten Gleichung drückt sich in den Nullen aus, die in der ersten Spalte stehen.

3. Normiere die zweite Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{(Zeile\ 2):2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

4. Benutze die zweite Zeile, um die zweite Unbekannte (zweite Spalte) aus der untersten Gleichung zu entfernen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{Zeile\ 3 - (Zeile\ 2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle ist die Gauß-Elimination beendet. Die restlichen Schritte sind Teil der Elimination nach Gauß-Jordan.

5. Normiere die dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(Zeile\ 3):3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

6. Benutze die dritte Zeile, um die dritte Unbekannte (dritte Spalte) aus den oberen Gleichungen zu entfernen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} Zeile\ 1 - 3 \cdot Zeile\ 3 \\ Zeile\ 2 - 2 \cdot Zeile\ 3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

7. Benutze die zweite Zeile, um die zweite Unbekannte (zweite Spalte) aus der obersten Gleichung zu entfernen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Zeile\ 1 - 2 \cdot (Zeile\ 2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist auch die Elimination nach Gauß-Jordan beendet. Die erweiterte Koeffizientenmatrix muss noch als Gleichungssystem umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}x + 0 \cdot y + 0 \cdot z &= -3 \\0 \cdot x + y + 0 \cdot z &= 2 \\0 \cdot x + 0 \cdot y + z &= 1\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}x &= -3 \\y &= 2 \\z &= 1\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist damit gelöst.

Lösung 2 (kurz)

1. Elimination nach Gauß

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & 6 & 8 \\3 & 8 & 13 & 20 \\1 & 3 & 8 & 11\end{array}\right) \xrightarrow{\text{(Zeile 1):2}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4 \\3 & 8 & 13 & 20 \\1 & 3 & 8 & 11\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zeile 2} - 3 \cdot \text{Zeile 1} \\ \text{Zeile 3} - \text{Zeile 1} \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4 \\0 & 2 & 4 & 8 \\0 & 1 & 5 & 7\end{array}\right) \xrightarrow{\text{(Zeile 2):2}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4 \\0 & 1 & 2 & 4 \\0 & 1 & 5 & 7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Zeile 3} - \text{Zeile 2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4 \\0 & 1 & 2 & 4 \\0 & 0 & 3 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{\text{(Zeile 3):3}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4 \\0 & 1 & 2 & 4 \\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

2. Elimination, Fortsetzung nach Jordan

Nun werden die Elemente oberhalb der Diagonale auf null gebracht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Zeile 1} - 3 \cdot \text{Zeile 3} \\ \text{Zeile 2} - 2 \cdot \text{Zeile 3}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Zeile 1} - 2 \cdot \text{Zeile 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Wir schließen mit zwei ergänzenden Erläuterungen:

Anmerkung 1

Durch die Anwendung des Eliminationsverfahrens wird die Koeffizientenmatrix in eine *Diagonalmatrix* umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & * \\ 0 & 1 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{pmatrix}$$

Eine Diagonalmatrix enthält außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen.

Die Elimination nach Gauß erzeugt zunächst Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen (*untere Dreiecksmatrix*):

$$\begin{pmatrix} * & * & * & | & * \\ * & * & * & | & * \\ * & * & * & | & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß - Elimination}} \begin{pmatrix} 1 & * & * & | & * \\ 0 & 1 & * & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{pmatrix}$$

Die anschließende Jordan-Elimination liefert Nullen oberhalb der Diagonalen:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & | & * \\ 0 & 1 & * & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan - Elimination}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & * \\ 0 & 1 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{pmatrix}$$

Anmerkung 2

Bei einem linearen Gleichungssystem kann man die Reihenfolge der Gleichungen beliebig verändern. Das überträgt sich auf die erweiterte Koeffizientenmatrix: Es ist erlaubt, Zeilen zu vertauschen. Das folgende Beispiel zeigt, dass man manchmal bei der Gauß-Elimination eine *Vertauschung* vornehmen muss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Zeile 3} - \text{Zeile 1}]{\text{Zeile 2} - \text{Zeile 1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile kann nicht als Werkzeug dienen, um die zweite Unbekannte zu entfernen, denn diese Unbekannte kommt nicht darin vor (Koeffizient 0). Daher muss man die zweite und dritte Zeile vertauschen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeile 2, Zeile 3 vertauschen}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Nun kann wie üblich fortgefahren werden.

3.4 Gleichungssysteme ohne eindeutige Lösung

Dass lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten nicht immer eine eindeutige Lösung besitzen, hatten wir bereits in Kapitel 2.5 gesehen.

Ein *unlösbares* Gleichungssystem enthält (mehr oder weniger versteckte) widersprüchliche Gleichungen wie:

$$x + y = 1$$

$$x + y = 2$$

Subtrahiert man die Gleichungen voneinander, so ergibt sich eine unzutreffende Gleichheit:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x + y & = & 2 \quad | \text{unten} - \text{oben} \\ \hline 0 & = & 1 \end{array}$$

Gleichungssysteme mit vielen Lösungen haben zu wenige Gleichungen, was oft erst beim Lösen offensichtlich wird:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3y & = & 6 \\ x + y & = & 2 \end{array}$$

Normiert man die erste Gleichung, so ergeben sich zwei identische Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3y & = & 6 \quad | :3 \\ x + y & = & 2 \\ x + y & = & 2 \\ x + y & = & 2 \end{array}$$

Nun liegt eine Gleichung mit zwei Unbekannten vor. Man kann eine Unbekannte (zum Beispiel y) als frei wählbar auffassen, und die andere dann berechnen, in Abhängigkeit von y .

Die geschilderten Phänomene treten auch bei linearen Gleichungssystemen mit drei Unbekannten auf. Die nachstehenden Beispiele zeigen die verschiedenen Situationen die dabei möglich sind.

Beispiel 1 (keine Lösung)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ x + 4y + 9z & = & 3 \\ 2x + 5y + 6z & = & 7 \end{array}$$

Lösung

Wir führen die Elimination anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix durch:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{Zeile 3} - 2 \cdot \text{Zeile 1}]{\text{Zeile 2} - \text{Zeile 1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{Zeile 2}):2} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeile 3} - \text{Zeile 2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Die letzte Zeile der Matrix entspricht der Gleichung: $0 = 4$. Diese unzutreffende Gleichheit bedeutet, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Beispiel 2 (viele Lösungen, z frei wählbar)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
 x + 2y + z & = & 1 \\
 x + 4y + 9z & = & 3 \\
 2x + 5y + 6z & = & 3
 \end{array}$$

Lösung

Wir führen die Gauß-Elimination anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix durch:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{Zeile 3} - 2 \cdot \text{Zeile 1}]{\text{Zeile 2} - \text{Zeile 1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{Zeile 2}):2} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeile 3} - \text{Zeile 2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Die letzte Zeile der Matrix entspricht der Gleichung: $0 = 0$, die zwar zutrifft, aber keinerlei Bedingung an die Unbekannten stellt. Es bleiben faktisch zwei substantielle Gleichungen, die wir noch einer Jordan-Elimination unterziehen können:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeile 1} - 2 \cdot \text{Zeile 2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

Die letzte Matrix stellt folgende Gleichungen dar:

$$\begin{aligned}x - 7z &= -1 \\ y + 2z &= 1\end{aligned}$$

Wir können z als frei wählbar auffassen, und dann nach x und y auflösen:

$$\begin{aligned}x - 7z &= -1 & | +7z \\ y + 2z &= 1 & | -2z \\ x &= 7z - 1 \\ y &= 3z + 1\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ist also:

$$\begin{aligned}x &= 7z - 1 \\ y &= 3z + 1 \quad (z \text{ frei wählbar})\end{aligned}$$

Beispiel 3 (viele Lösungen, y frei wählbar)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z &= 1 \\ 3x + 9y + 7z &= 6 \\ 2x + 6y + 6z &= 8\end{aligned}$$

Lösung

Wir führen die Gauß-Elimination anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix durch:

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 6 & 8\end{array}\right) & \xrightarrow[\text{Zeile 3} - 2 \cdot \text{Zeile 1}]{\text{Zeile 2} - 3 \cdot \text{Zeile 1}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6\end{array}\right) \\ & \xrightarrow{\text{Zeile 3} - 2 \cdot \text{Zeile 2}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Matrix entspricht der Gleichung: $0 = 0$, die zwar zutrifft, aber keinerlei Bedingung an die Unbekannten stellt. Es bleiben faktisch zwei substantielle Gleichungen, die wir noch

einer Jordan-Elimination unterziehen können:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeile 1} - 2 \cdot \text{Zeile 2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Die letzte Matrix stellt folgende Gleichungen dar:

$$\begin{aligned} x + 3y &= -7 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Wir können y als frei wählbar auffassen, und die erste Gleichung nach x auflösen. Die Unbekannte x hängt dann von der frei wählbaren Unbekannten y ab, während z den Wert 3 besitzt:

$$\begin{aligned} x + 3y &= -7 & | -3y \\ z &= 3 \\ x &= -7 - 3y \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ist also:

$$\begin{aligned} x &= -7 - 3y & (y \text{ frei wählbar}) \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Die in den Beispielen auftretenden Lösungskonstellationen sind allgemeiner Natur und lassen sich wie folgt beschreiben:

Nach Anwendung der Elimination nach Gauß-Jordan ergeben sich höchstens drei Arten von Unbekannten:

- Unbekannte mit je einem konkreten Wert
- Unbekannte mit frei wählbaren Werten
- Unbekannte, die von den frei wählbaren Unbekannten abhängen.

3.5 Anwendungen

Wir werden zwei Beispiele für die Anwendung der bisher entwickelten Methoden betrachten:

1. Die allgemeine Anwendbarkeit des Eliminationsverfahrens zeigen wir durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit vier Unbekannten.
2. Wir betrachten eine Textaufgabe, die etwa 100 v. Chr. in China gestellt und gelöst worden ist.

Beispiel 1

Löse das lineare Gleichungssystem

$$2a + 4b + 2c + 4d = -28$$

$$4a + 10b + 2c + 12d = -78$$

$$2a + 4b + c + 6d = -35$$

$$2a + 6b + 2c + 3d = -32$$

Lösung

Wir führen die Elimination anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix durch. Wir kürzen „Zeile 1“ ab als „Z1“, „Zeile 2“ als „Z2“, usw.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 4 & -28 \\ 4 & 10 & 2 & 12 & -78 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & -35 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & -32 \end{array} \right) \xrightarrow{Z1:2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \\ 4 & 10 & 2 & 12 & -78 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & -35 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & -32 \end{array} \right)$$

$$Z2 - 4 \cdot Z1$$

$$Z3 - 2 \cdot Z1$$

$$Z4 - 2 \cdot Z1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -22 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{Z2:2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{Z4 - 2 \cdot Z2} \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{Z3: (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 16 \end{array} \right) \\
 \\
 \xrightarrow{Z4 - 2 \cdot Z3} \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{Z4: (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
 \\
 \begin{array}{l} Z1 - 2 \cdot Z4 \\ Z2 - 2 \cdot Z4 \\ Z3 + 2 \cdot Z4 \end{array} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} Z1 - Z3 \\ Z2 + Z3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
 \\
 \xrightarrow{Z1 - 2 \cdot Z2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Also: $a = -5$, $b = -4$, $c = 3$, $d = -2$

Beispiel 2

Es gibt drei Arten von Getreide. Drei Bündel von der ersten Art, zwei Bündel von der zweiten und ein Bündel von der dritten ergeben zusammen 39 Maße. Zwei der ersten, drei der zweiten und eines von der dritten ergeben 34 Maße. Und eines von der ersten, zwei von der zweiten und drei von der dritten ergeben 26 Maße. Wie viele Maße sind in einem Bündel jeder Art enthalten?

Lösung

1. Unbekannte benennen

x = Anzahl der Maße in einem Bündel der ersten Art

y = Anzahl der Maße in einem Bündel der zweiten Art

z = Anzahl der Maße in einem Bündel der dritten Art

2. Gleichungen aufstellen

Alle drei Gleichungen beruhen auf der folgenden Grundgleichung:

Menge Art 1 + Menge Art 2 + Menge Art 3 = Gesamtmenge

Die Vorgaben liefern dann die folgenden drei Gleichungen:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

[Erläuterungen: Art 1: 1 Bündel $\rightarrow x$, also: 3 Bündel $\rightarrow 3x$]

3. Gleichungssystem lösen

Wir schreiben die dritte Gleichung als erste, da sie x schon ohne Koeffizient enthält. Ferner benutzen wir die Elimination nach Gauß-Jordan anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{Z2 - 2 \cdot Z1 \\ Z3 - 3 \cdot Z1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2 \cdot (-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3 + 4 \cdot Z2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3:12}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 2,75 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} Z1-3 \cdot Z3 \\ Z2-5 \cdot Z3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 17,75 \\ 0 & 1 & 0 & 4,25 \\ 0 & 0 & 1 & 2,75 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1-2 \cdot Z2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9,25 \\ 0 & 1 & 0 & 4,25 \\ 0 & 0 & 1 & 2,75 \end{array}\right)$$

Also: $x = 9,25$, $y = 4,25$, $z = 2,75$

Antwort

Ein Bündel der Getreideart 1 enthält 9,25 Maß, eines der Getreideart 2 enthält 4,25 Maß, und eines der Getreideart 3 enthält 2,75 Maß.

3.6 Cramersche Regel und Determinanten

Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten hatten wir in Kapitel 2.6 hergeleitet. Die Cramersche Regel selbst ist unmittelbar auf lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Unbekannten übertragbar. Ihre *Herleitung* und die *Definition* von *Determinanten* sind allerdings für mehrere Unbekannte erheblich schwieriger. Bei drei Unbekannten kann man die Cramersche Regel mit einiger Mühe elementar nachrechnen. In Kapitel 3.7 werden einige Erläuterungen zur Definition von Determinanten gegeben. Wir beschränken uns hier auf die Formulierung und Anwendung der Ergebnisse.

Determinanten mit zwei Zeilen und zwei Spalten werden als 2×2 -Determinanten bezeichnet, usw. Wir haben es hier mit 3×3 -Determinanten zu tun.

Cramersche Regel an einem Beispiel

Das lineare Gleichungssystem

$$2x + 4y + 6z = 8$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

hat die Lösung

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{8} & 4 & 6 \\ \mathbf{20} & 8 & 13 \\ \mathbf{11} & 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{8} & 6 \\ 3 & \mathbf{20} & 13 \\ 1 & \mathbf{11} & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & \mathbf{8} \\ 3 & 8 & \mathbf{20} \\ 1 & 3 & \mathbf{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass der Nenner nicht null ist.

Die Struktur entspricht der bei zwei Unbekannten:

$$\text{erste Unbekannte} = \frac{\begin{array}{c} \text{Determinante der Koeffizienten,} \\ \text{aber die } \mathbf{erste} \text{ Spalte ersetzt} \end{array}}{\text{Determinante der Koeffizienten}}$$

$$\text{zweite Unbekannte} = \frac{\begin{array}{c} \text{Determinante der Koeffizienten,} \\ \text{aber die } \mathbf{zweite} \text{ Spalte ersetzt} \end{array}}{\text{Determinante der Koeffizienten}}$$

$$\text{dritte Unbekannte} = \frac{\begin{array}{c} \text{Determinante der Koeffizienten,} \\ \text{aber die } \mathbf{dritte} \text{ Spalte ersetzt} \end{array}}{\text{Determinante der Koeffizienten}}$$

3×3-Determinanten nach Sarrus

Wir betrachten die nach Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) benannte Regel zur Berechnung von 3×3-Determinanten. Sie ähnelt der Berechnung von 2×2-Determinanten, erfordert jedoch einen vorbereitenden Schritt: Die ersten zwei Spalten werden zusätzlich an das Ende geschrieben.

Wir betrachten als Beispiel die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

des obigen Gleichungssystems. Wir fügen die ersten zwei Spalten hinzu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 13 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Nun haben wir drei Hauptdiagonalen und drei Nebendiagonalen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Das Rechenprinzip ist:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Wir führen nun diese Berechnung durch:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 2 \cdot 8 \cdot 8 + 4 \cdot 13 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 3 \\ & - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 3 \cdot 13 \cdot 2 - 8 \cdot 3 \cdot 4 \\ & = 128 + 52 + 54 - 48 - 78 - 96 \\ & = 234 - 222 \\ & = 12 \end{aligned}$$

Zur Lösung des obigen Gleichungssystems müssen noch drei weitere Determinanten berechnet werden:

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 20 & 8 & 13 \\ 11 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 20 & 8 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 8 \cdot 8 \cdot 8 + 4 \cdot 13 \cdot 11 + 6 \cdot 20 \cdot 3 \\ & - 11 \cdot 8 \cdot 6 - 3 \cdot 13 \cdot 8 - 8 \cdot 20 \cdot 4 \\ & = 512 + 572 + 360 - 528 - 312 - 640 \\ & = 1444 - 1480 \\ & = -36 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 20 & 13 \\ 1 & 11 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 20 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 2 \cdot 20 \cdot 8 + 8 \cdot 13 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 11 \\ & - 1 \cdot 20 \cdot 6 - 11 \cdot 13 \cdot 2 - 8 \cdot 3 \cdot 8 \\ & = 320 + 104 + 198 - 120 - 286 - 192 \\ & = 622 - 598 \\ & = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 20 \\ 1 & 3 & 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 2 \cdot 8 \cdot 11 + 4 \cdot 20 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \cdot 3 \\ & - 1 \cdot 8 \cdot 8 - 3 \cdot 20 \cdot 2 - 11 \cdot 3 \cdot 4 \\ & = 176 + 80 + 72 - 64 - 120 - 132 \\ & = 328 - 316 \\ & = 12 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 20 & 8 & 13 \\ 11 & 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-36}{12} = -3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 20 & 13 \\ 1 & 11 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{24}{12} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 20 \\ 1 & 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{12}{12} = 1$$

Rechenaufwand bei Determinanten

Bei der Berechnung von 2×2-Determinanten müssen

- 2 Multiplikationen und
- 1 Subtraktion

durchgeführt werden.

Dagegen erfordert die Berechnung einer 3×3-Determinante bei Anwendung der Sarrus-Regel einen erheblich größeren Aufwand:

- 12 Multiplikationen
- 5 Additionen/Subtraktionen

Der Rechenaufwand bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen mithilfe der Cramerschen Regel ist daher folgender:

Cramersche Regel bei zwei Unbekannten

Es sind zwei Divisionen durchzuführen und drei Determinanten zu berechnen, also insgesamt:

- 2 Divisionen
- 6 Multiplikationen
- 3 Additionen/Subtraktionen

Cramersche Regel bei drei Unbekannten

Es sind drei Divisionen durchzuführen und vier Determinanten zu berechnen, also insgesamt:

- 3 Divisionen
- 48 Multiplikationen
- 20 Additionen/Subtraktionen

Wie bestimmen nun zum Vergleich den Rechenaufwand bei der Elimination nach Gauß-Jordan:

Gauß-Jordan bei zwei Unbekannten

Wir führen die Gauß-Jordan-Elimination schematisch durch, die berechneten Zahlen sind fett gedruckt:

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right) \xrightarrow{2 \text{ Divisionen}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ * & * & * \end{array} \right) \xrightarrow[2 \text{ Subtraktionen}]{2 \text{ Multiplikationen}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ Divisionen}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{array} \right) \xrightarrow[1 \text{ Subtraktionen}]{1 \text{ Multiplikationen}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{array} \right) \end{array}$$

Insgesamt haben wir also:

- 3 Divisionen
- 3 Multiplikationen
- 3 Subtraktionen

Wir haben drei Divisionen mehr und drei Multiplikationen weniger als bei der Cramerschen Regel. Da Divisionen etwas

aufwendiger als Multiplikationen sind, ist der Rechenaufwand bei beiden Verfahren etwa gleich.

Gauß-Jordan bei drei Unbekannten

Wir führen die Gauß-Jordan-Elimination wieder schematisch durch, die tatsächlich *berechneten* Zahlen sind durch Fettdruck und Unterstreichen hervorgehoben:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ Div.}} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow[6 \text{ Subtraktionen}]{6 \text{ Multiplikationen}} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ Div.}} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \text{ Subtraktionen}]{2 \text{ Multiplikationen}} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ Div.}} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \text{ Subtraktionen}]{2 \text{ Multiplikationen}} \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \xrightarrow[1 \text{ Subtraktionen}]{1 \text{ Multiplikationen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Insgesamt haben wir also:

- 6 Divisionen
- 11 Multiplikationen
- 11 Subtraktionen

Wir haben eine Division mehr, 37 Multiplikationen weniger und neun Additionen/Subtraktionen weniger als bei der Cramerschen Regel. Obwohl Divisionen etwas aufwendiger als Multiplikationen sind, ist der Rechenaufwand bei der Elimination nach Gauß-Jordan wesentlich geringer.

Nur bei zwei Unbekannten ist die Cramersche Regel von praktischem Nutzen.

Die Cramersche Regel und vor allem Determinanten haben wichtige theoretische Anwendungen, zum Beispiel in der Matrizen- und Tensorrechnung. Aus diesem Grunde gehen wir im nächsten Kapitel näher auf die Determinanten ein und schaffen die Basis für die Lektüre fortgeschrittener Texte.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 3.1 bis 3.3

1. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$3x + 9y + 3z = 9$$

$$x + 4y - z = 0$$

$$2x + 7y + z = 5$$

2. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$x + 3y + 2z = 4$$

$$x + 5y + 3z = 8$$

$$3x + 2y + 4z = 1$$

3. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$2x + 3y + 6z = 1$$

$$x + y + 4z = 1$$

4. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$x + 6y + 4z = 17$$

$$2x + 2y - z = -2$$

5. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$x + 4y + z = 20$$

$$x + 3y + 2z = 25$$

$$2x + 5y + 6z = 56$$

6. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$x + y - z = 7$$

$$-x + 4y + 5z = 4$$

$$x + 6y + 4z = 18$$

7. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} x + y - 4z & = & -14 \\ x & - & 2z = -3 \\ -x + y + 2z & = & 0 \end{array}$$

8. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} -2x + 4y + 2z & = & 28 \\ 4x - 6y + 2z & = & -46 \\ -4x + 12y - 9z & = & 76 \end{array}$$

9. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} -3x - 9y + 9z & = & 3 \\ -x - 2y + 6z & = & 13 \\ -2x - 8y - 3z & = & -31 \end{array}$$

10. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 6y + 3z & = & 12 \\ -3x - y + 2z & = & -17 \\ x & + & 2z = 0 \end{array}$$

11. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} -2x + 6y + 4z & = & 14 \\ 4x - 16y - 8z & = & -28 \\ 2x - 9y - 8z & = & -34 \end{array}$$

12. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} 3x - 9y - 9z & = & -69 \\ 5x - 16y - 12z & = & -106 \\ x - y - 8z & = & -37 \end{array}$$

13. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x - 2y - 2z &= 13 \\4x - 10y - 6z &= 58 \\-2x + 3y + 9z &= -27\end{aligned}$$

14. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}-4x + 4y + 8z &= -12 \\-2x + 4y + 4z &= -2 \\-2x + 3y &= 8\end{aligned}$$

15. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}-3x + 3y + 9z &= 15 \\3x - 6y - 3z &= -24 \\5x - 4y - 14z &= -22\end{aligned}$$

16. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x - z &= -2 \\5x - 3y + 4z &= 11 \\x + 2y - 8z &= -20\end{aligned}$$

17. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}4x + 8y - 8z &= 36 \\2x + 6y - 10z &= 20 \\2x + 5y - 9z &= 17\end{aligned}$$

18. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}-2x - 6y &= -6 \\4x + 14y + 6z &= 46 \\-2x - 3y + 13z &= 65\end{aligned}$$

19. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x - 2y - z &= 0 \\x - y + 2z &= 7 \\-x + 4y + 4z &= 8\end{aligned}$$

20. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x - y - z &= 7 \\ 3x - 2y - z &= 12 \\ 5x - y + 6z &= -13\end{aligned}$$

Aufgaben zu Kapitel 3.4

1. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 8 \\ 3x + 3y + 3z &= 9\end{aligned}$$

2. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}3x + 6y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + 4z &= 12 \\ 3x + 6y + 4z &= 11\end{aligned}$$

3. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 4y + 6z &= 8 \\ 3x - 6y + 9z &= 12\end{aligned}$$

4. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + 4y + z &= 20 \\ x + 3y + 2z &= 25 \\ 2x + 5y + 5z &= 55\end{aligned}$$

5. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x - 2y + 2z &= 7 \\ x - 2y + 3z &= 10 \\ 3x - 6y + z &= 6\end{aligned}$$

Aufgaben zu Kapitel 3.5

1. 100 g der angegebenen Nahrungsmittel enthalten (laut Angaben auf der Packung):

	Kohlenhydrate	Eiweiß	Fett	Brennwert
Haferflocken	57,8 g	13,8 g	7,4 g	1491 kJ
Corn Flakes	82 g	7,7 g	1 g	1562 kJ
Weizenmehl	72 g	10 g	1 g	1431 kJ

- a) Welche Brennwerte haben 1 g Kohlenhydrate, Eiweiß, Fett?
 b) 100 g Trockenpflaumen enthalten 51,4 g Kohlenhydrate, 2,5 g Eiweiß und 0,6 g Fett. Wie viel kJ Brennwert haben 100 g Trockenpflaumen?

2. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$2a - 4b + 4c - 2d = 2$$

$$2a - 6b + 2c - 6d = 14$$

$$4a - 6b + 11c - 2d = -13$$

$$2a - 8b + 2c - 16d = 14$$

Aufgaben zu Kapitel 3.6

1. Berechne die folgenden Determinanten:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Berechne die folgenden Determinanten:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & b & 5 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 \\ 3 & 5 & c \end{vmatrix}$$

3. Löse einige der Aufgaben zu Kapitel 3.1 bis 3.3 mithilfe der Cramerschen Regel.

4. Berechne die Determinanten der Koeffizienten der linearen Gleichungssysteme aus den Aufgaben zu Kapitel 3.4.

4. Ausblick: Determinanten und Matrizen

Determinanten und Matrizen haben sich historisch aus linearen Gleichungssystemen entwickelt. Diese inhaltliche Beziehung werden wir in diesem Kapitel erläutern. Der Leser wird dann imstande sein, fortgeschrittene Texte zum Thema besser zu verstehen.

4.1 Eigenschaften von Determinanten

Die 2×2 -Determinanten ergaben sich durch Lösen eines allgemeinen linearen Gleichungssystems. Bei größeren Determinanten stößt dieses Vorgehen an seine Grenzen.

Wie gehen *umgekehrt* vor, unterstellen die Gültigkeit der Cramerschen Regel und überlegen, welche Eigenschaften die Determinanten haben müssen. Diese Eigenschaften erlauben dann die Berechnung und Definition von Determinanten.

Um die Übersichtlichkeit zu bewahren, beschränken wir uns auf lineare Gleichungssysteme von drei Gleichungen mit drei Unbekannten und die entsprechenden 3×3 -Determinante. Die Überlegungen sind aber allgemeiner Natur und lassen sich offensichtlich auf beliebig große Determinanten übertragen.

Eigenschaft 1

Wenn zwei Spalten gleich sind, ist die Determinante 0.

Begründung

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

zwei gleiche Spalten besitzt (hier beispielsweise die ersten beiden Spalten):

$$a_1x + a_1y + b_1z = e_1$$

$$a_2x + a_2y + b_2z = e_2$$

$$a_3x + a_3y + b_3z = e_3$$

Wir wählen $e_1 = a_1$, $e_2 = a_2$, $e_3 = a_3$, das Gleichungssystem ist dann:

$$a_1x + a_1y + b_1z = a_1$$

$$a_2x + a_2y + b_2z = a_2$$

$$a_3x + a_3y + b_3z = a_3$$

Eine Lösung ist:

$$x = 1$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Da die Koeffizienten von x und y gleich sind, kann man die Werte von x und y vertauschen, und man erhält eine weitere Lösung:

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$z = 0$$

Wenn nun die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

nicht Null wäre, so würde die Cramersche Regel einen **einzigen** Wert für x vorschreiben:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = 1$$

Das widerspricht der zweiten Lösung mit $x = 0$. Es bleibt nur die Schlussfolgerung, dass die Koeffizientendeterminante Null ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Anmerkung

Eine analoge Begründung liefert, dass eine Determinante auch dann Null ist, wenn zwei Zeilen gleich sind.

Eigenschaft 2

Die Spalten in einer Determinante verhalten sich wie die Faktoren in einem Produkt.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Dies entspricht dem Ausmultiplizieren bei Zahlen:

$$(a+b)cd = acd + bcd$$

Begründung

Wie betrachten drei lineare Gleichungssysteme, die folgende erweiterten Koeffizientenmatrizen und Lösungen haben:

$$1) \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & c_1 & d_1 & a_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 & a_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 & a_3 \end{array} \right), \text{Lösung: } x, y, z$$

$$2) \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array} \right), \text{Lösung: } u, v, w$$

$$3) \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & c_1 & d_1 & a_1 + b_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 & a_2 + b_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 & a_3 + b_3 \end{array} \right), \text{Lösung also: } x+u, y+v, z+w$$

Die Lösung aus dem Gleichungssystem 3) ergibt sich aus den Lösungen der ersten beiden Gleichungssystemen durch Addition der entsprechenden Gleichungen:

$$e_1x + c_1y + d_1z = a_1$$

$$e_2x + c_2y + d_2z = a_2$$

$$e_3x + c_3y + d_3z = a_3$$

und

$$e_1u + c_1v + d_1w = b_1$$

$$e_2u + c_2v + d_2w = b_2$$

$$e_3u + c_3v + d_3w = b_3$$

ergeben beim Addieren der entsprechenden Gleichungen:

$$e_1x + e_1u + c_1y + c_1v + d_1z + d_1w = a_1 + b_1$$

$$e_2x + e_2u + c_2y + c_2v + d_2z + d_2w = a_2 + b_2$$

$$e_3x + e_3u + c_3y + c_3v + d_3z + d_3w = a_3 + b_3$$

Wir klammern aus:

$$e_1(x+u) + c_1(y+v) + d_1(z+w) = a_1 + b_1$$

$$e_2(x+u) + c_2(y+v) + d_2(z+w) = a_2 + b_2$$

$$e_3(x+u) + c_3(y+v) + d_3(z+w) = a_3 + b_3$$

Also ist $x+u$, $y+v$, $z+w$ tatsächlich eine Lösung des linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & c_1 & d_1 & a_1 + b_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 & a_2 + b_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 & a_3 + b_3 \end{array} \right)$$

Die Cramersche Regel liefert für die jeweils erste Unbekannte der drei Gleichungssysteme:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}, \quad u = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}, \quad x+u = \frac{\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}$$

Die Nenner sind gleich und man kann direkt ablesen, dass

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Damit ist die zweite Eigenschaft begründet.

Eigenschaft 3

Ein gemeinsamer Faktor in einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

Beispiel: $\begin{vmatrix} ka_1 & c_1 & d_1 \\ ka_2 & c_2 & d_2 \\ ka_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$

Begründung

Wir betrachten zwei lineare Gleichungssysteme, die folgende erweiterten Koeffizientenmatrizen und Lösungen haben:

$$\begin{aligned} 1) & \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & c_1 & d_1 & a_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 & a_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 & a_3 \end{array} \right), \text{Lösung: } x, y, z \\ 2) & \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & c_1 & d_1 & ka_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 & ka_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 & ka_3 \end{array} \right), \text{Lösung: } kx, ky, kz \end{aligned}$$

Die Lösung aus dem Gleichungssystem 2) ergibt sich aus der Lösung des ersten Gleichungssystems durch Multiplikation der Gleichungen mit k :

$$\begin{aligned} e_1x + c_1y + d_1z &= a_1 & | \cdot k \\ e_2x + c_2y + d_2z &= a_2 & | \cdot k \\ e_3x + c_3y + d_3z &= a_3 & | \cdot k \\ e_1kx + c_1ky + d_1kz &= ka_1 \\ e_2kx + c_2ky + d_2kz &= ka_2 \\ e_3kx + c_3ky + d_3kz &= ka_3 \end{aligned}$$

Also ist kx, ky, kz tatsächlich eine Lösung des linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & c_1 & d_1 & ka_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 & ka_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 & ka_3 \end{array} \right)$$

Die Cramersche Regel liefert für die jeweils erste Unbekannte der zwei Gleichungssysteme:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}, \quad kx = \frac{\begin{vmatrix} ka_1 & c_1 & d_1 \\ ka_2 & c_2 & d_2 \\ ka_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}},$$

Wenn man die linke Formel mit k multipliziert, sieht man, dass

$$\begin{vmatrix} ka_1 & c_1 & d_1 \\ ka_2 & c_2 & d_2 \\ ka_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Die Eigenschaft 3 ist damit hergeleitet.

Eigenschaft 4

Folgende Determinanten haben den Wert 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ usw.,}$$

Im Fachjargon sagt man, dass die Determinanten der *Einheitsmatrizen* 1 sind. Eine Einheitsmatrix besteht aus Einsen in der Diagonale und sonst nur aus Nullen.

Begründung

Die ersten zwei Determinanten ergeben sich aus unseren Formeln,

die weiteren sind eine natürlich Fortsetzung des Ergebnisses:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

Anmerkung

Da die Cramersche Regel Brüche von Determinanten enthält, würde sie weiterhin gültig sein wenn man die Determinanten beispielsweise durch das Doppelte der Determinanten ersetzt (die 2 der Verdopplung kann gekürzt werden). Die Eigenschaft 4 beendet diese Mehrdeutigkeit.

Zusammenfassung:

Eigenschaft 1

Wenn zwei Spalten gleich sind, ist die Determinante 0.

Beispiel: $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

Eigenschaft 2

Die Spalten in einer Determinante verhalten sich wie die Faktoren in einem Produkt.

Beispiel: $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$

Eigenschaft 3

Ein gemeinsamer Faktor in einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

Beispiel: $\begin{vmatrix} ka_1 & c_1 & d_1 \\ ka_2 & c_2 & d_2 \\ ka_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$

Eigenschaft 4

Die Determinanten der Einheitsmatrizen sind 1

Beispiele. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

4.2 Praktische Rechenregeln für Determinanten

Aus den in Kapitel 4.1 entwickelten Eigenschaften lassen sich einige praktische Rechenregeln ableiten.

Um die Formulierungen übersichtlicher zu gestalten, beschränken wir uns wieder auf 3×3-Determinanten und kürzen die Spalten durch **Fettbuchstaben** ab:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ usw.}$$

Die komponentenweise Addition von zwei Spalten schreiben wir als

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Determinanten können nun kompakt und übersichtlich geschrieben werden:

$$|\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Vertauschung von Spalten

Wenn man zwei Spalten vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \end{vmatrix} \quad (a, b \text{ vertauscht})$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \end{vmatrix} \quad (a, c \text{ vertauscht})$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \end{vmatrix} \quad (b, c \text{ vertauscht})$$

Begründung

Exemplarisch leiten wir das Ergebnis bei der Vertauschung der ersten beiden Spalten ab.

Einerseits ist

$$\begin{vmatrix} (a+b) & (a+b) & c \end{vmatrix} = 0,$$

weil die ersten beiden Spalten gleich sind (Eigenschaft 1).

Andererseits können wir nach Eigenschaft 2 ausmultiplizieren und wiederum Eigenschaft 1 benutzen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (a+b) & (a+b) & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & (a+b) & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & (a+b) & c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c \end{vmatrix} \\ &= 0 + \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & c \end{vmatrix} + 0 \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & c \end{vmatrix} = 0$$

und daher

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \end{vmatrix}.$$

Die Regel ist damit bewiesen.

Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addieren

Wenn man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen hinzuaddiert, bleibt die Determinante unverändert.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & (b+ka) & c \end{vmatrix}$$

Begründung

Wir betrachten (exemplarisch) den Fall, dass zur zweiten Spalte ein Vielfaches der ersten Spalte addiert wird.

Berechne $\begin{vmatrix} a & (b+ka) & c \end{vmatrix}$ durch ausmultiplizieren im Sinne der Eigenschaft 2:

$$\begin{vmatrix} a & (b+ka) & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & (ka) & c \end{vmatrix}$$

Nun kann der Faktor k nach Eigenschaft 3 vor die Determinante gezogen werden, es taucht dann eine Determinante mit zwei gleichen Spalten auf (die also nach Eigenschaft 1 Null ist):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & (b+ka) & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & (ka) & c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & a & c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + 0 \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

Spalte aus Nullen

Wenn eine Spalte nur aus Nullen besteht (*Nullspalte*), dann ist die Determinante Null.

Begründungen

Wir betrachten drei verschiedene Argumente, die auch in anderen Bereichen der Mathematik Anwendung finden.

Begründung 1

Da $0 = 0 \cdot 0$, kann 0 als Faktor der Nullspalte aufgefasst und vor die Determinante gezogen werden:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \cdot 0 & b_1 & c_1 \\ 0 \cdot 0 & b_2 & c_2 \\ 0 \cdot 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Begründung 2

Wenn man eine andere Spalte zur Nullspalte addiert, enthält sie Determinante zwei gleiche Spalten:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (0+b) & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Begründung 3

Man kann die Nullspalte als Summe zweier Nullspalten auffassen und dann ausmultiplizieren:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (0+0) & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix}$$

Daher

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} && (\text{subtrahiere } \begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix}) \\ 0 &= \begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Wir stellen nun alle wichtigen Regeln zusammen. Die ersten vier sind auch von theoretischer Bedeutung, da sie in der höheren Mathematik oft als Grundlage der Definition der Determinante genommen werden. Die übrigen Regeln lassen sich aus ihnen ableiten. Trotzdem werden sie wegen ihrer großen praktischen Bedeutung gesondert aufgeführt.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir Beispiele zur Anwendung der Regeln. Der Leser wird bemerken, dass jede Determinante allein mithilfe der Regeln berechenbar ist. Auch unsere Definition der 2×2 -Determinanten und die Regel von Sarrus ergeben sich aus den Regeln.

Rechenregeln für Determinanten	
Regel 1	
Wenn zwei Spalten gleich sind, ist die Determinante 0. Beispiel: $\begin{vmatrix} a & a & c \end{vmatrix} = 0$	
Regel 2	
Die Spalten in einer Determinante verhalten sich wie die Faktoren in einem Produkt. Beispiel: $\begin{vmatrix} (a+b) & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \end{vmatrix}$	
Regel 3	
Ein gemeinsamer Faktor in einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden: Beispiel: $\begin{vmatrix} ka & b & c \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix}$	
Regel 4	
Die Determinanten der Einheitsmatrizen sind 1 Beispiele: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$	
Regel 5	
Wenn man zwei Spalten vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante: Beispiel: $\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a & c \end{vmatrix}$	
Regel 6	
Wenn man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen hinzuaddiert, bleibt die Determinante unverändert. Beispiel: $\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & (b+ka) & c \end{vmatrix}$	
Regel 7	
Wenn eine Spalte nur aus Nullen besteht (<i>Nullspalte</i>), dann ist die Determinante Null. Beispiel: $\begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} = 0$	

4.3 Anwendung der Rechenregeln für Determinanten

Wir betrachten nun einige Beispiele zur Anwendung der Rechenregeln für Determinanten:

Beispiel 1

Berechne die Determinante $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Lösung

Wir zerlegen die erste Spalte und multiplizieren aus:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3+0 & 4 \\ 0+2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nun können wir 3 als Faktor der ersten Spalte der ersten Determinante auffassen und nach vorne ziehen. Ebenso können wir 2 vor die zweite Determinante ziehen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 \cdot 1 & 4 \\ 3 \cdot 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 \cdot 0 & 4 \\ 2 \cdot 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Auch mit den zweiten Spalten können wir genauso verfahren:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) \\ &= 3 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Nun sind die erste und die letzte Determinante Null, weil sie gleich Spalten besitzen:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Die links stehende Determinante der Einheitsmatrix ist 1. Die Spalten der rechten Determinante können vertauscht werden (wobei sich das Vorzeichen der Determinante ändert!) und bilden dann ebenfalls die Einheitsmatrix:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \\ &= 15 - 8 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Also ist $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

Beispiel 2

Berechne die Determinante $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Lösung

Wir zerlegen die erste Spalte und multiplizieren aus:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3+0 & 4 \\ 0+2 & 7 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nun kann man 3 als Faktor der ersten Spalte der ersten Determinante auffassen und nach vorne ziehen. Ebenso können wir 2 vor

die zweite Determinante ziehen:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 1 & 4 \\ 3 \cdot 0 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 \cdot 0 & 4 \\ 2 \cdot 1 & 7 \end{vmatrix} \\ = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Die verbleibenden Determinanten können berechnet werden, indem man geeignete Vielfache der ersten Spalte zur zweiten Spalte hinzuaddiert, damit Nullen erzeugt werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \quad (\text{Spalt 2} - 4 \cdot \text{Spalte 1}) \\ = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Determinante der Einheitsmatrix ist 1}) \\ = 7 \cdot 1 \\ = 7$$

Und

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{Spalt 2} - 7 \cdot \text{Spalte 1}) \\ = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{Spalten vertauschen, Vorzeichenwechsel}) \\ = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Determinante der Einheitsmatrix ist 1}) \\ = -4$$

Also

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ = 3 \cdot 7 + 2 \cdot (-4) \\ = 21 - 8 \\ = 13$$

Das Beispiel 1 zeigt eindrucksvoll, wie die Regeln 1 bis 4 die Determinante vollständig bestimmen und somit berechenbar machen.

Wir betrachten nun zum Abschluss eine bekannte Methode zur Berechnung von Determinanten, die Laplace-Entwicklung.

Laplace-Entwicklung

Die Laplace-Entwicklung beginnt mit der Auswahl einer beliebigen Spalte (oder sogar Zeile). Bei der Herleitung nehmen wir der Übersichtlichkeit halber die erste Spalte einer 3×3 -Determinante.

Wir zerlegen die erste Spalte, multiplizieren aus (Regel 2) und ziehen Faktoren vor die Determinanten (Regel 3):

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_1 & * & * \\ a_2 & * & * \\ a_3 & * & * \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 + 0 + 0 & * & * \\ 0 + a_2 + 0 & * & * \\ 0 + 0 + a_3 & * & * \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & * & * \\ a_2 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ a_3 & * & * \end{vmatrix} \\
 &= a_1 \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 1 & * & * \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Nun Vertauschen wir die erste Spalte so lange mit ihren rechten Nachbarspalte, bis die 1 in der *Diagonalen* zu stehen kommt. Die 1 der ersten Determinante steht bereits in der Diagonale. Die zweite Determinante erfordert eine Vertauschung (*ein* Vorzeichenwechsel) und die dritte zwei Vertauschungen (*zwei* Vorzeichenwechsel, es bleibt also beim ursprünglichen Vorzeichen):

$$a_1 \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 1 & * & * \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} * & 0 & * \\ * & 1 & * \\ * & 0 & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{vmatrix}$$

Geeignete Vielfache der 0-1-Spalten können zu den anderen addiert werden, sodass die Sterne in den Zeilen mit 1 zu 0 werden. Die übrigen Elemente bleiben *unverändert* (wegen der Nullen):

$$a_1 \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} * & 0 & * \\ * & 1 & * \\ * & 0 & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nun müssen die auftauchenden 3×3-Determinanten den enthaltenen 2×2-Determinanten gleich sein, weil sie die Regeln 1 bis 4 erfüllen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & \cancel{a_1} & \cancel{a_3} \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & \cancel{a_1} & \cancel{a_3} \end{vmatrix}$$

Die 3×3-Determinante ist damit auf 2×2-Determinanten zurückgeführt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & * \\ a_2 & * & * \\ a_3 & * & * \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{*} & \cancel{*} \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & \cancel{*} & \cancel{*} \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & \cancel{*} & \cancel{*} \end{vmatrix}$$

Wir fassen zusammen:

Laplace-Entwicklung

Determinanten können wie folgt auf kleinere Determinanten zurückgeführt werden:

1. Wähle eine Spalte.
2. Gehe alle Elemente der Spalte durch. Streiche die gewählte Spalte und die Zeile des gewählten Elementes aus der Determinante. Es ergibt sich eine sogenannte Unterdeterminante.
3. Multipliziere die gewählten Elemente mit den zugehörigen Unterdeterminanten.
4. Versehe die Produkte mit Vorzeichen gemäß dem Schachbrett-Muster:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

5. Addiere die Produkte (mit Vorzeichen):

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & * \\ a_2 & * & * \\ a_3 & * & * \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{*} & \cancel{*} \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & \cancel{*} & \cancel{*} \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & \cancel{*} & \cancel{*} \end{vmatrix}$$

Beispiel 3

Berechne die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Lösung

Wir wählen die erste Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ \cancel{3} & 8 & 13 \\ \cancel{1} & 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \cancel{2} & 4 & 6 \\ \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{13} \\ \cancel{1} & 5 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \cancel{2} & 4 & 6 \\ \cancel{3} & 8 & 13 \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 8 & 13 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8 \cdot 7 - 5 \cdot 13) - 3(4 \cdot 7 - 5 \cdot 6) + 1(4 \cdot 13 - 8 \cdot 6)$$

$$= 2(56 - 65) - 3(28 - 30) + 1(52 - 48)$$

$$= -18 + 6 + 4$$

$$= -8$$

Anmerkungen

1. Bei der Laplace-Entwicklung kann man auch Zeilen wählen und analog verfahren.
2. Determinanten haben auch eine geometrische Bedeutung. Fasst man die zwei Spalten einer 2×2 -Determinante als Spaltenvektoren (Pfeile) auf, so ist die Determinante der Flächeninhalt des von den beiden Vektoren (Pfeilen) aufgespannten Parallelogramms. Entsprechend ist eine 3×3 -Determinante das Volumen des von den drei Spaltenvektoren aufgespannten Spats.

4.4 Matrizen

Matrizen sind rechteckige Zahlenschemata. Wir haben sie schon als Koeffizientenmatrizen kennengelernt. Auch einfache Spalten sind Matrizen, ebenso bloße Zeilen. Determinanten beziehen sich auf Matrizen.

Wir gehen hier einen Schritt weiter und fassen die Matrizen gewissermaßen als *Superzahlen* auf, mit den wir *rechnen* möchten. Wie man mit Matrizen rechnet, wird von den Gleichungssystemen und Determinanten nahegelegt.

Addition von Matrizen

Bei der Betrachtung von Determinanten haben wir bereits Spalten addiert, und zwar geschah dies *komponentenweise*:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 8+4 \\ 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Dies überträgt sich zwanglos auf Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 & 4+8 \\ 2+9 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Matrizen

Da sich die Subtraktion immer als Addition (mit einer negativen Zahl) darstellen lässt überträgt sich das Prinzip der Matrixaddition auf die Subtraktion:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 & 8-4 \\ 9-2 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Vielfaches einer Matrix

Das Vervielfachen entspricht einer fortgesetzten Addition:

$$\begin{aligned} 2 \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+3 & 7+7 \\ 4+4 & 5+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man multipliziert also eine Zahl mit einer Matrix, indem man alle Elemente der Matrix mit dieser Zahl multipliziert.

Multiplikation von Matrizen

Die Multiplikation von Matrizen ist nicht so einfach wie die Addition und Multiplikation. Ein genauer Blick auf die linearen Gleichungssysteme wird uns zeigen, wie die Multiplikation von Matrizen aussehen sollte.

Wir betrachten folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x + 4y &= 13 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Unbekannten hatten wir zu einer Matrix zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite erschien in der Cramerschen Regel als Spalte:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Es erscheint dann natürlich, die Unbekannten zu einer Spalte zusammenzufassen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Stellt man sich nun auf den Standpunkt, dass ein lineares Gleichungssystem schlichtweg eine elementare Gleichung wie

$$7x = 14$$

ist, allerdings mit Superzahlen (Matrizen) statt Zahlen, so kann man das lineare Gleichungssystem wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Auf der linken Seite steht ein *Matrizenprodukt*, und was es konkret bedeutet, zeigt uns das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 5x+4y \end{pmatrix}$$

Die Spalte wird gewissermaßen über die Matrix gelegt und die ihre Elemente werden mit den darunterliegenden Zahlen multipliziert:

$$\begin{matrix} & x & y \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 5x+4y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Beispiel 1

Berechne: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung

$$\begin{matrix} & 7 & 6 \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 \\ 5 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 + 18 \\ 35 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 59 \end{pmatrix}$$

Die nächsten beiden Beispiele werden wir benutzen, um die Multiplikation von Matrizen (nicht nur Spalten) abzuleiten.

Beispiel 2

Berechne: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung

$$\begin{matrix} & 1 & 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

Fazit: Multipliziert man eine Matrix mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so kommt die *erste Spalte* der Matrix heraus.

Beispiel 3

Berechne: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung

$$\begin{matrix} & 0 & 1 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Fazit: Multipliziert man eine Matrix mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so kommt die *zweite Spalte* der Matrix heraus.

Nun können wir das Produkt zweier Matrizen (mit mehr als einer Spalte) ins Auge fassen. Wir gehen spaltenweise vor:

Ziel: Berechnung des Produkts: $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

a) Berechne die erste Spalte von P

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}$$

Man erhält die *erste* Spalte des Produkts, indem man mit der *ersten* Spalte der rechten Matrix multipliziert.

b) Berechne die zweite Spalte von P

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}$$

Man erhält die *zweite* Spalte des Produkts, indem man mit der *zweiten* Spalte der rechten Matrix multipliziert.

Also ist das gesuchte Produkt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}$$

Beispiel 4

Berechne: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Lösung

$$\begin{matrix} 4 & 7 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 26 & 28 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5

Berechne: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obwohl beide Matrizen nicht Null sind, ist ihr Produkt Null. Bei Zahlen kommt dies nicht vor.

Beispiel 6

Berechne: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die beiden Produkte unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Faktoren.

Lösung

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis der Matrizenmultiplikation hängt von der Reihenfolge ab. Bei Zahlen kommt dies nicht vor.

Damit schließen wir die kurze Einführung in die Determinanten und Matrizen. Die erworbenen Einsichten und Ansätze werden dem Leser bei der Lektüre weitergehender Literatur (*lineare Algebra*) nützlich sein.

Aufgaben

Aufgaben zu Kapitel 4.1 bis 4.3

1. Berechne die folgenden Determinanten mithilfe der Laplace-Entwicklung:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Berechne die folgenden Determinanten mithilfe der Laplace-Entwicklung:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & b & 5 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 \\ 3 & 5 & c \end{vmatrix}$$

Aufgaben zu Kapitel 4.4

1. Berechne die folgenden Matrizen:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Berechne die folgenden Matrizen:

$$\text{a) } 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } 5 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } -3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } 2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e) } 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Berechne die folgenden Matrizenprodukte:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Berechne die folgenden Matrizenprodukte:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{h) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{5. Berechne: } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Addiere die Matrizen A und B :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Berechne das Produkt AB der Matrizen A und B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Berechne $AB - BA$, wobei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Berechne die folgenden Matrizen:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Berechne die folgenden Matrizen:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen

Lösungen zu Kapitel 2.1 bis 2.3

1. $x=6, y=-1$
2. $x=1, y=2$
3. $x=-1, y=4$
4. $x=11, y=-7$
5. $x=8, y=-2$
6. $x=1, y=2$
7. $x=-1, y=2$
8. $a=2, b=-3$
9. $x=3, y=4$
10. $x_1=1, x_2=-2$
11. $x=2, y=-1$
12. $x=1, y=2$
13. $v=-2, w=-5$
14. $a=1, b=-3$
15. $x \approx 3,72, y \approx -1,88$
16. $x=-2, y=-9$
17. $x=-4, y=-3$
18. $x=3, y=4$
19. $x=-4, y=-2$
20. $x=2, y=1$
21. $x=6, y=-2$
22. $x=-9, y=3$
23. $x=-1, y=-2$
24. $x=-5, y=2$
25. $x=8, y=5$
26. $x=-8, y=9$
27. $x=-6, y=-1$

28. $x = 7, y = -5$

29. $x = 2, y = 5$

30. $x = -9, y = 4$

Lösungen zu Kapitel 2.4

1. 15,5 und 8,5
2. Apfel: 0,50 €, Birne: 0,60 €
3. 89 Schafe; 310 Hühner
4. 15 Äpfel, 10 Birnen
5. 18 Spinnen, 41 Fliegen
6. 14 zu 20 € und 21 zu 50 €
7. ermäßigte: 6 €, normale: 10 €
8. Up-Quark: $2/3$, Down-Quark: $-1/3$
9. 1200 m^2 ; 600 m^2
10. 0,25 Liter Vollmilch, 0,75 Liter fettarme Milch
11. ca. 0,04 l Vollmilch
12. E1: 7 t, E2: 9 t
13. ca. $0,800 \text{ cm}^3$ Blei und $0,200 \text{ cm}^3$ Zink
14. $1/6$ Liter oder ca. 0,167 Liter

Lösungsansatz zu Aufgabe 1

Größere Zahl + kleinere Zahl = Summe

Größere Zahl – kleinere Zahl = Differenz

Lösungsansatz zu Aufgabe 2

Peter: Wert der Äpfel + Wert der Birnen = Gesamtwert

Anja: Wert der Äpfel + Wert der Birnen = Gesamtwert

Lösungsansatz zu Aufgabe 3

Beine: Anzahl der Schafsbeine + Anzahl der Hühnerbeine =
Gesamtzahl der Beine

Augen: Anzahl der Schafsaugen + Anzahl der Hühneraugen =
Gesamtzahl der Augen

Lösungsansatz zu Aufgabe 4

Wert: Wert der Äpfel + Wert der Birnen = Gesamtwert

Anzahl: Zahl der Äpfel + Zahl der Birnen = Gesamtzahl

Lösungsansatz zu Aufgabe 5

Beine: Anzahl der Spinnenbeine + Anzahl der Fliegenbeine = Gesamtzahl der Beine

Tiere: Anzahl der Spinnen + Anzahl der Fliegen = Gesamtzahl der Tiere

Lösungsansatz zu Aufgabe 6

Anzahl: Anzahl der 20er + Anzahl der 50er = Gesamtzahl der Scheine

Wert: Wert der 20er + Wert der 50er = Gesamtwert der Scheine

Lösungsansatz zu Aufgabe 7

Verkauf am Tag 1: Wert der normalen Tickets + Wert der ermäßigten Tickets = Gesamtwert

Verkauf am Tag 2: Wert der normalen Tickets + Wert der ermäßigten Tickets = Gesamtwert

Lösungsansatz zu Aufgabe 8

Proton: Ladung der Up-Quarks + Ladung des Down-Quarks = Ladung des Protons

Neutron: Ladung des Up-Quarks + Ladung der Down-Quarks = Ladung des Neutrons

Lösungsansatz zu Aufgabe 9

Fläche: Fläche von Feld 1 + Fläche von Feld 2 = Gesamtfläche

Ertrag: Ertrag von Feld 1 + Ertrag von Feld 2 = Gesamtertrag

Lösungsansatz zu Aufgabe 10

Volumen: Volumen 3,5-%-Milch + Volumen 1,5-%-Milch = Gesamtvolumen

Fettmenge: Fettmenge der 3,5-%-Milch + Fettmenge der 1,5-%-Milch = Gesamt-Fettmenge

Lösungsansatz zu Aufgabe 11

Volumen: $\text{Volumen } 3,5\text{-\%}\text{-Milch} + \text{Volumen } 0,3\text{-\%}\text{-Milch} = \text{Gesamtvolumen}$

Fettmenge: $\text{Fettmenge der } 3,5\text{-\%}\text{-Milch} + \text{Fettmenge der } 0,3\text{-\%}\text{-Milch} = \text{Gesamt-Fettmenge}$

Lösungsansatz zu Aufgabe 12

Menge von Rohstoff 1: $\text{Menge R1 für E1} + \text{Menge R1 für E2} = \text{Gesamtmenge von R1}$

Menge von Rohstoff 2: $\text{Menge R2 für E1} + \text{Menge R2 für E2} = \text{Gesamtmenge von R2}$

Lösungsansatz zu Aufgabe 13

Volumen: $\text{Volumen Blei} + \text{Volumen Zink} = \text{Gesamtvolumen}$

Masse: $\text{Masse Blei} + \text{Masse Zink} = \text{Masse Silber}$

Lösungsansatz zu Aufgabe 14

Volumen: $\text{Volumen Kölsch} + \text{Volumen Limonade} = \text{Gesamtvolumen}$

Alkohol: $\text{Alkoholmenge Kölsch} + \text{Alkoholmenge Limonade} = \text{Gesamt-Alkoholmenge}$

Lösungen zu Kapitel 2.5

1. Allgemeine Lösung: $x = 5 - y$, wobei y frei wählbar ist.
2. Es gibt keine Lösung.
3. Allgemeine Lösung: $x = 2 - 1,5y$, wobei y frei wählbar ist.
4. Es gibt keine Lösung.
5. Allgemeine Lösung: $x = 3 + 2y$, wobei y frei wählbar ist.
6. Allgemeine Lösung: $x = 5 - 2y$, wobei y frei wählbar ist.

Lösungen zu Kapitel 2.6

1. a) 1 b) 1 c) 5 d) 8
e) -29 f) -2 g) 0 h) 26
2. Alle Determinanten sind 0.
3. Siehe die Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 2.1 bis 2.3.

4. Alle Determinanten sind 0.

Lösungen zu Kapitel 3.1 bis 3.3

1. $x = -2, y = 1, z = 2$
2. $x = -3, y = 1, z = 2$
3. $x = -4, y = 1, z = 1$
4. $x = -6, y = 4, 5, z = -1$
5. $x = 35, y = -4, z = 1$
6. $x = 4, 8, y = 2, 2, z = 0$
7. $x = 5, y = -3, z = 4$
8. $x = -4, y = 5, z = 0$
9. $x = -1, y = 3, z = 3$
10. $x = 4, y = 1, z = -2$
11. $x = 3, y = 0, z = 5$
12. $x = -2, y = 3, z = 4$
13. $x = 3, y = -4, z = -1$
14. $x = -1, y = 2, z = -3$
15. $x = -2, y = 3, z = 0$
16. $x = 2, y = 5, z = 4$
17. $x = 3, y = 4, z = 1$
18. $x = -3, y = 2, z = 5$
19. $x = 4, y = 1, z = 2$
20. $x = 2, y = -1, z = -4$

Lösungen zu Kapitel 3.4

1. Es gibt keine Lösung
2. Es gibt keine Lösung
3. Allgemeine Lösung: $x = 2y - 3z + 4$ (y und z frei wählbar)
4. Allgemeine Lösung: $x = -5z + 40, y = z - 5$ (z frei wählbar)
5. Allgemeine Lösung: $x = 2y + 1, z = 3$ (y frei wählbar)

Lösungen zu Kapitel 3.5

1. a) Kohlenhydrate: 17,00 kJ, Eiweiß: 16,97 kJ, Fett: 37,02 kJ
b) ca. 938 kJ
2. $a = -2$, $b = -5$, $c = -3$, $d = 1$

Lösungen zu Kapitel 3.6

1. a) 2 b) -1 c) 6 d) 8 e) 1 f) 30
2. a) abc b) 0 c) 0 d) abc e) abc
3. Siehe die Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 3.1 bis 3.3.
4. Alle Determinanten sind 0.

Lösungen zu Kapitel 4.1 bis 4.3

1. a) 2 b) -1 c) 6 d) 8 e) 1 f) 30
2. a) abc b) 0 c) 0 d) abc e) abc

Lösungen zu Kapitel 4.4

1. a) $\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
2. a) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 21 & 15 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 27 & 16 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$
3. a) $\begin{pmatrix} 32 \\ 15 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 68 \\ 48 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -15 \\ -30 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 27 \\ 16 \end{pmatrix}$
f) $\begin{pmatrix} -11 \\ 23 \end{pmatrix}$
4. a) $\begin{pmatrix} 48 & 36 \\ 32 & 28 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 36 & 36 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 34 & 50 \\ 8 & 25 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 56 & 5 \\ 35 & 10 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -16 & -21 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 14 & 27 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 24 & 30 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 19 & 38 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -11 & 19 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$

6. a) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 19 & 15 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$

9. a) (26) b) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

10. a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Anhang: Zusammenfassung

Das Additionsverfahren

Beispiel

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ -4x + 5y &= 6 \end{aligned}$$

Lösung

1. Entferne x

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 7 \quad | \cdot 4 \text{ (ohne Vorzeichen)} \\ -4x + 5y & = & 6 \quad | \cdot 3 \\ \hline 12x + 8y & = & 28 \\ -12x + 15y & = & 18 \quad | \text{oben} + \text{unten} \\ \hline 23y & = & 46 \quad | : 23 \\ y & = & 2 \end{array}$$

2. Entferne y

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 7 \quad | \cdot 5 \\ -4x + 5y & = & 6 \quad | \cdot 2 \\ \hline 15x + 10y & = & 35 \\ -8x + 10y & = & 12 \quad | \text{oben} - \text{unten} \\ \hline 23x & = & 23 \quad | : 23 \\ x & = & 1 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Das Einsetzungsverfahren

Beispiel

$$2x + 3y = 8$$

$$5x + 2y = 9$$

Lösung

1. Löse die erste Gleichung nach x auf

$$2x + 3y = 8 \quad | -3y$$

$$2x = 8 - 3y \quad | :2$$

$$x = \frac{8 - 3y}{2}$$

2. Setze das Ergebnis in die zweite Gleichung ein

$$x = \frac{8 - 3y}{2} \quad \text{eingesetzt in}$$

$$5x + 2y = 9 \quad \text{ergibt:}$$

$$5 \cdot \frac{8 - 3y}{2} + 2y = 9 \quad | \cdot 5 \text{ mit dem Zähler multiplizieren}$$

$$\frac{40 - 15y}{2} + 2y = 9 \quad | \cdot 2 \text{ (damit der Bruch wegfällt)}$$

$$40 - 15y + 4y = 18 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$40 - 11y = 18 \quad | -40$$

$$-11y = -22 \quad | :(-11)$$

$$y = 2$$

3. Setze $y = 2$ in die erste Gleichung ein

$$2x + 3y = 8 \quad | y = 2 \text{ einsetzen}$$

$$2x + 3 \cdot 2 = 8 \quad | \text{ausrechnen}$$

$$2x + 6 = 8 \quad | -6$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

Die Lösung ist also: $x = 1, y = 2$

Das Gleichsetzungsverfahren

Beispiel

$$2x + 3y = 8$$

$$5x + 2y = 9$$

Lösung

1. Löse beide Gleichungen nach x auf

$$2x + 3y = 8 \quad | -3y$$

$$2x = 8 - 3y \quad | :2$$

$$x = \frac{8 - 3y}{2}$$

$$5x + 2y = 9 \quad | -2y$$

$$5x = 9 - 2y \quad | :5$$

$$x = \frac{9 - 2y}{5}$$

2. Setze die Ergebnisse gleich

$$x = \frac{8 - 3y}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{9 - 2y}{5} \quad \text{gleichsetzen:}$$

$$\frac{8 - 3y}{2} = \frac{9 - 2y}{5} \quad | \cdot 2 \text{ (damit der linke Bruch wegfällt)}$$

$$8 - 3y = 2 \cdot \frac{9 - 2y}{5} \quad | 2 \text{ mit dem Zähler multiplizieren}$$

$$8 - 3y = \frac{18 - 4y}{5} \quad | \cdot 5 \text{ (damit der Bruch wegfällt)}$$

$$40 - 15y = 18 - 4y \quad | +4y$$

$$40 - 11y = 18 \quad | -40$$

$$-11y = -22 \quad | :(-11)$$

$$y = 2$$

Das Gleichsetzungsverfahren (Forts.)

3. Setze $y=2$ ein in die erste Gleichung

$$2x + 3y = 8 \quad | y=2 \text{ einsetzen}$$

$$2x + 3 \cdot 2 = 8 \quad | \text{ausrechnen}$$

$$2x + 6 = 8 \quad | -6$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$x = 1$$

$$y = 2$$

2×2-Determinanten

Die Determinante eines quadratischen Schemas von vier (2×2) Zahlen ist

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$$

Das Rechenprinzip dabei ist:

Produkt der Hauptdiagonale – Produkt der Nebendiagonale,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

Determinantenverfahren (Cramersche Regel)

Beispiel

Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 8$$

Lösung

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7 \cdot 2 - 8 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = \frac{14 - 24}{4 - 3} = \frac{-10}{1} = -10$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 8 - 1 \cdot 7}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = \frac{16 - 7}{4 - 3} = \frac{9}{1} = 9$$

Also: $x = -10$, $y = 9$.

Erläuterung zur Struktur:

$$\text{erste Unbekannte} = \frac{\text{Determinante der Koeffizienten, aber die \textbf{erste} Spalte ersetzt}}{\text{Determinante der Koeffizienten}}$$

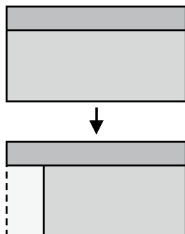
$$\text{zweite Unbekannte} = \frac{\text{Determinante der Koeffizienten, aber die \textbf{zweite} Spalte ersetzt}}{\text{Determinante der Koeffizienten}}$$

Diese Struktur gilt auch bei linearen Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten.

Der Grundgedanke des Eliminationsverfahrens

Der **Grundgedanke** der Elimination kann in einem einzigen Satz zusammengefasst werden:

Benutze die erste Gleichung, um die erste Unbekannte aus allen nachfolgenden Gleichungen zu entfernen.



Die Unbekannte wird wie beim Additionsverfahren entfernt. Man erhält ein kleineres lineares Gleichungssystem, das eine Unbekannte weniger enthält.

Nun kann derselbe Ansatz auf das kleine System angewendet werden. Fährt man fort, so bleibt schließlich nur eine Unbekannte übrig, und diese kann man dann mühelos berechnen. Durch Einsetzen der konkreten Ergebnisse in die vorangehenden Gleichungen, lassen sich alle Unbekannte ermitteln.

Das Eliminationsverfahren

Beispiel

Löse das lineare Gleichungssystem:

$$2x + 4y + 6z = 8$$

$$3x + 8y + 13z = 20$$

$$x + 3y + 8z = 11$$

Das Eliminationsverfahren (Forts.)

Lösung

1. Benutze die erste Gleichung (als *Werkzeug*), um aus den nachfolgenden Gleichungen die erste Unbekannte (nämlich x) zu entfernen:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 6z & = & 8 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \\ x + 3y + 8z & = & 11 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}$$

a) Normiere die Werkzeug-Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 6z & = & 8 \quad | :2 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \\ x + 3y + 8z & = & 11 \\ \\ x + 2y + 3z & = & 4 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \\ x + 3y + 8z & = & 11 \end{array}$$

b) Entferne x aus der zweiten und dritten Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ 3x + 8y + 13z & = & 20 \quad | -3 \cdot \text{Gleichung 1} \\ x + 3y + 8z & = & 11 \quad | - \text{Gleichung 1} \\ \\ x + 2y + 3z & = & 4 \\ 2y + 4z & = & 8 \\ y + 5z & = & 7 \end{array}$$

Die zwei letzten Gleichungen bilden nun ein kleines lineares Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten y und z :

$$\begin{array}{rcl} 2y + 4z & = & 8 \\ y + 5z & = & 7 \end{array}$$

Auf dieses kleine System wird nun nochmals dieselbe Methode angewendet.

Das Eliminationsverfahren (Forts. 2)

2. Benutze die erste kleine Gleichung (als Werkzeug), um aus der nachfolgenden Gleichung die erste Unbekannte (nämlich y) zu entfernen:

a) Normiere die Werkzeug-Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ 2y + 4z & = & 8 \quad | :2 \\ y + 5z & = & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ y + 2z & = & 4 \\ y + 5z & = & 7 \end{array}$$

b) Entferne y aus der zweiten kleinen Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ y + 2z & = & 4 \\ y + 5z & = & 7 \quad | - \text{Gleichung 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ y + 2z & = & 4 \\ 3z & = & 3 \quad | :3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ y + 2z & = & 4 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Bei den weiteren Berechnungen benutzen wir dieses erheblich vereinfachte lineare Gleichungssystem.

3. Setze $z = 1$ in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{array}{rcl} y + 2z & = & 4 \quad | z = 1 \text{ einsetzen} \\ y + 2 \cdot 1 & = & 4 \\ y + 2 & = & 4 \quad | -2 \\ y & = & 2 \end{array}$$

Das Eliminationsverfahren (Forts. 3)

4. Setze $y=2$ und $z=1$ in die erste Gleichung ein:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 && | y=2, z=1 \text{ einsetzen} \\ x + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 &= 4 \\ x + 4 + 3 &= 4 \\ x + 7 &= 4 && | -7 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die Lösung:

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Das Eliminationsverfahren anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix

Beispiel

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 8 \\ 3x + 8y + 13z &= 20 \\ x + 3y + 8z &= 11 \end{aligned}$$

Lösung

1. Elimination nach Gauß

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 13 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{(Zeile\ 1):2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 13 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zeile 2} - 3 \cdot \text{Zeile 1} \\ \text{Zeile 3} - \text{Zeile 1} \end{array} \rightarrow$$

Das Eliminationsverfahren anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix (Forts.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{(Zeile\ 2):2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Zeile\ 3 - Zeile\ 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(Zeile\ 3):3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2. Elimination, Fortsetzung nach Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} Zeile\ 1 - 3 \cdot Zeile\ 3 \\ Zeile\ 2 - 2 \cdot Zeile\ 3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Zeile\ 1 - 2 \cdot Zeile\ 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also:

$$x = -3$$

$$y = 2$$

$$z = 1$$

3×3-Determinanten (Sarrus)

Die Determinante eines quadratischen Schemas von neun (3×3) Zahlen wird nach Sarrus wie folgt berechnet:

1. Schreibe die ersten zwei Spalten zusätzlich an das Ende:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 13 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Man hat nun drei Haupt- und drei Nebendiagonalen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Rechne nach dem Prinzip Haupt- – Nebendiagonalen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \backslash \backslash \backslash \\ \backslash \backslash \backslash \end{array} - \begin{array}{c} // \\ // \\ // \end{array}$$

3. Die Determinante ist also:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 8 + 4 \cdot 13 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 3 \\ - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 3 \cdot 13 \cdot 2 - 8 \cdot 3 \cdot 4 \\ = 128 + 52 + 54 - 48 - 78 - 96 \\ = 234 - 222 \\ = 12$$

Laplace-Entwicklung

Determinanten können wie folgt auf *kleinere* Determinanten zurückgeführt werden:

1. Wähle eine Spalte.
2. Gehe alle Elemente der Spalte durch. Streiche die gewählte Spalte und die Zeile des gewählten Elementes aus der Determinante. Es ergibt sich eine sogenannte Unterdeterminante.
3. Multipliziere die gewählten Elemente mit den zugehörigen Unterdeterminanten.
4. Versehe die Produkte mit Vorzeichen gemäß dem Schachbrett-Muster:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

5. Addiere die Produkte (mit Vorzeichen):

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & * \\ a_2 & * & * \\ a_3 & * & * \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{*} & \cancel{*} \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & \cancel{*} & \cancel{*} \\ \cancel{a_3} & * & * \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & * & * \\ \cancel{a_2} & * & * \\ \cancel{a_3} & \cancel{*} & \cancel{*} \end{vmatrix}$$

Laplace-Entwicklung (Forts.)

Beispiel

Berechne die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Lösung

Wir wählen die erste Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{13} \\ \cancel{1} & 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \cancel{2} & 4 & 6 \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \cancel{2} & 4 & 6 \\ \cancel{3} & 8 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 8 & 13 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8 \cdot 7 - 5 \cdot 13) - 3(4 \cdot 7 - 5 \cdot 6) + 1(4 \cdot 13 - 8 \cdot 6)$$

$$= 2(56 - 65) - 3(28 - 30) + 1(52 - 48)$$

$$= -18 + 6 + 4$$

$$= -8$$

Rechenregeln für Determinanten

Regel 1

Wenn zwei Spalten gleich sind, ist die Determinante 0.

Beispiel: $\begin{vmatrix} a & a & c \end{vmatrix} = 0$

Regel 2

Die Spalten in einer Determinante verhalten sich wie die Faktoren in einem Produkt.

Beispiel: $\begin{vmatrix} (a+b) & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \end{vmatrix}$

Regel 3

Ein gemeinsamer Faktor in einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

Beispiel: $\begin{vmatrix} ka & b & c \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix}$

Regel 4

Die Determinanten der Einheitsmatrizen sind 1

Beispiele: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Regel 5

Wenn man zwei Spalten vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

Beispiel: $\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a & c \end{vmatrix}$

Regel 6

Wenn man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen hinzuaddiert, bleibt die Determinante unverändert.

Beispiel: $\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & (b+ka) & c \end{vmatrix}$

Regel 7

Wenn eine Spalte nur aus Nullen besteht (*Nullspalte*), dann ist die Determinante Null.

Beispiel: $\begin{vmatrix} 0 & b & c \end{vmatrix} = 0$

Matrizen

Matrizen

Matrizen sind rechteckige Anordnungen von Zahlen. Hat eine Matrix beispielsweise 2 Zeilen und 3 Spalten, so bezeichnet man sie als 2×3 -Matrix.

Beispiele:

$$2 \times 2\text{-Matrix: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3\text{-Matrix: } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 2\text{-Matrix: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 1\text{-Matrix: } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \times 2\text{-Matrix: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion von Matrizen

Matrizen werden *komponentenweise* addiert und subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 & 4+8 \\ 2+9 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 & 8-4 \\ 9-2 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Vielfaches einer Matrix

Man multipliziert eine Zahl mit einer Matrix, indem man alle Elemente der Matrix mit dieser Zahl multipliziert:

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Matrizen (Forts.)

Multiplikation von Matrizen

Ein genauer Blick auf die linearen Gleichungssysteme zeigt, wie die Multiplikation von Matrizen aussehen sollte.

Wenn man ein lineares Gleichungssystem wie

$$2x + 3y = 8$$

$$5x + 4y = 13$$

kompakt mithilfe von Matrizen schreibt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix},$$

wird folgende Definition des Matrizenproduktes nahegelegt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x + 4y \end{pmatrix}$$

Die Spalte wird über die Matrix gelegt und die ihre Elemente werden mit den darunterliegenden Zahlen multipliziert:

$$\begin{matrix} & x & y \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x + 4y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Multiplikation von Matrizen (Beispiele)

Beispiel 1

7 6

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 \\ 5 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 + 18 \\ 35 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 59 \end{pmatrix}$$

Matrizen (Forts.)**Beispiel 2**

Berechne: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Lösung

$$\begin{matrix} & 4 & 7 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 \\ \boxed{7} & 5 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \boxed{2 \cdot 4 + 1 \cdot 7} & 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \\ \boxed{3 \cdot 4 + 2 \cdot 7} & 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 26 & 28 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Man erhält die *zweite* Spalte des Produkts, indem man mit der *zweiten* Spalte der rechten Matrix multipliziert. Analog verfährt man bei weiteren Spalten in der rechten Matrix.

